

# СПЕКТРЫ НОРМИРОВАННЫХ ОБЪЕМОВ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГОГРАННИКОВ

А. Ю. ВЕСНИН, А. А. ЕГОРОВ

**АННОТАЦИЯ.** Пусть трехмерный гиперболический многогранник  $\mathcal{P}$  имеет конечный объем  $\text{vol}(\mathcal{P})$  и конечное число вершин  $\text{ver}(\mathcal{P})$ . Его нормированным объемом будем называть величину  $\omega(\mathcal{P}) = \text{vol}(\mathcal{P})/\text{ver}(\mathcal{P})$ . Если  $\mathcal{R}$  – некоторое множество гиперболических многогранников, то сопоставим ему множество нормированных объемов  $\Omega(\mathcal{R}) = \{\omega(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathcal{R}\}$ , которое будем называть спектром нормированных объемов множества  $\mathcal{R}$ . В работе рассматриваются множество  $\mathcal{R}_{comp}$  компактных прямоугольных гиперболических многогранников и множество  $\mathcal{R}_{ideal}$  идеальных прямоугольных гиперболических многогранников.

Мы доказываем, что спектр  $\Omega(\mathcal{R}_{ideal})$  принадлежит интервалу  $[\frac{1}{6}v_{oct}, \frac{1}{2}v_{oct}]$  и обе границы являются точными. Причем, спектр является дискретным в  $[\frac{1}{6}v_{oct}, \frac{1}{4}v_{oct})$  и всюду плотным в  $[\frac{1}{4}v_{oct}, \frac{1}{2}v_{oct}]$ , где  $v_{oct}$  – объем правильного идеального гиперболического октаэдра. Также, мы устанавливаем, что спектр  $\Omega(\mathcal{R}_{comp})$  принадлежит интервалу  $[\frac{5}{192}v_{oct}, \frac{5}{8}v_{tet}]$  и верхняя граница является точной. Причем, на интервале  $[\frac{5}{192}v_{oct}, \frac{1}{32}v_{oct})$  спектр является дискретным, а на интервале  $[\frac{5}{16}v_{tet}, \frac{5}{8}v_{tet}]$  – всюду плотным, где  $v_{tet}$  – объем правильного идеального гиперболического тетраэдра.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение объемов трехмерных гиперболических многообразий и гиперболических многогранников является важным направлением развития современной геометрии. Представляет интерес описание множеств объемов и их свойств для различных классов многогранников, см., например, [Bel21, CGV]. С одной стороны, можно зафиксировать комбинаторное строение многогранника и ставить вопрос о том, при каких двугранных углах многогранник (с конечными или идеальными вершинами) имеет максимальный объем? Например, в силу известного результата Милнора [Mil82] наибольший объем гиперболического 3-симплекса достигается на правильном идеальном 3-симплексе, то есть на таком, у которого все вершины являются идеальными, а все двугранные углы равны между собой, и следовательно, равны  $\pi/3$ . Аналогичный результат имеет место и в  $n$ -мерном случае. Как показано в [HaMu81], наибольший объем гиперболического  $n$ -симплекса достигается на правильном идеальном  $n$ -симплексе. С другой стороны, можно зафиксировать двугранные углы и ставить вопрос о том, какой многогранник имеет максимальный объем при заданном числе граней или вершин? Гиперболический

---

*Date:* 16 апреля 2026 г.

*2000 Mathematics Subject Classification.* 57M25.

*Key words and phrases.* пространство Лобачевского, гиперболический многогранник, прямоугольный многогранник, объем многогранника.

Работа выполнена в рамках госзадания ИМ СО РАН, а именно А. Ю. Веснин поддержан проектом No. FWNF-2026-0031, А. А. Егоров поддержан проектом No. FWNF-2026-0011.

многогранник называется прямоугольным, если все его двугранные углы равны  $\pi/2$ . О построении трехмерных гиперболических многообразий, соответствующих подгруппам без кручения в группах отражений прямоугольных многогранников см. [Be17]. Целью данной работы является исследование объемов прямоугольных многогранников нормированных по числу вершин многогранников.

Следуя [Ve], для гиперболического многогранника  $\mathcal{P}$  конечного объема  $\text{vol}(\mathcal{P})$  с конечным числом вершин  $\text{ver}(\mathcal{P})$  определим *нормированный объем* как величину  $\omega(\mathcal{P}) = \text{vol}(\mathcal{P})/\text{ver}(\mathcal{P})$ . Пусть  $\mathcal{R}$  – некоторое множество гиперболических многогранников. Множество  $\Omega(\mathcal{R}) = \{\omega(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathcal{R}\}$  нормированных объемов многогранников из  $\mathcal{R}$  будем называть *спектром нормированных объемов*  $\mathcal{R}$ .

Двусторонние оценки объемов прямоугольных гиперболических многогранников через число их граней были получены Аткинсоном в [At09]. Список из 825 наименьших по объему компактных прямоугольных гиперболических многогранников привел Иноуе в работе [In22]. Список из 248 наименьших значений объемов идеальных прямоугольных гиперболических многогранников приведен в [VeEg].

Обозначим через  $\mathcal{R}_{ideal}$  множество всех идеальных прямоугольных гиперболических многогранников, а через  $\mathcal{R}_{comp}$  – множество всех компактных прямоугольных гиперболических многогранников. В обоих случаях мы предполагаем, что многогранники имеют конечный объем и конечное число вершин.

Нормированные объемы этих множеств и их спектры описываются в следующих теоремах, где используемые константы с точностью до шести знаков имеют следующие значения:  $v_{oct} = 3,663862$  и  $v_{tet} = 1,014941$ .

**Теорема 1.1.** *Спектр нормированных объемов идеальных прямоугольных многогранников  $\Omega(\mathcal{R}_{ideal}) = \{\omega(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathcal{R}_{ideal}\}$  принадлежит интервалу  $[\frac{1}{6}v_{oct}, \frac{1}{2}v_{oct}]$ , где нижняя граница достигается на октаэдре, а верхняя граница является точной. Спектр является дискретным на интервале  $[\frac{1}{6}v_{oct}, \frac{1}{4}v_{oct})$  и всюду плотным на интервале  $[\frac{1}{4}v_{oct}, \frac{1}{2}v_{oct}]$ .*

**Теорема 1.2.** *Спектр нормированных объемов компактных прямоугольных многогранников  $\Omega(\mathcal{R}_{comp}) = \{\omega(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathcal{R}_{comp}\}$  принадлежит интервалу  $[\frac{5}{192}v_{oct}, \frac{5}{8}v_{tet})$ , где верхняя граница является точной. На интервале  $[\frac{5}{192}v_{oct}, \frac{1}{32}v_{oct})$  спектр является дискретным, а на интервале  $[\frac{5}{16}v_{tet}, \frac{5}{8}v_{tet}]$  – всюду плотным.*

Поведение спектра  $\Omega(\mathcal{R}_{comp})$  на интервале  $[\frac{1}{32}v_{oct}, \frac{5}{16}v_{tet}]$  пока остается невыясненным, см. вопрос 6.2.

Отметим связь полученных результатов с теорией гиперболических узлов и зацеплений. Для гиперболического зацепления  $L \subset S^3$  рассмотрим объем дополнения к нему, снабженного полной метрикой постоянной отрицательной кривизны и обозначим его  $\text{vol}(L)$ . Пусть  $c(L)$  – минимальное число перекрестков среди всех диаграмм зацепления  $L$ . В работе [СКР] Чампанеркар, Кофман и Парселл определили *плотность объема* зацепления следующим образом:  $\text{vd}(L) = \text{vol}(L)/c(L)$ . Известно, что  $\text{vd}(L) \leq v_{oct}$ . Последовательность зацеплений  $L_n$ , таких что  $c(L_n) \rightarrow \infty$  называется *геометрически максимальной*, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{vd}(L_n) = v_{oct}$ . Примеры геометрически максимальных последовательностей зацеплений построены в [СКР].

Впоследствии Бартон [Bu] показал, что множество плотностей объемов всех гиперболических зацеплений всюду плотно в интервале  $[0, v_{\text{oct}}]$ . Адамс, Калдерон и Майер показали в работе [ACM], что множество плотностей объемов гиперболических зацеплений в утолщенных поверхностях  $S_g \times I$ , где  $g \geq 2$ , всюду плотно в интервале  $[0, 2v_{\text{oct}}]$ .

В работе [KwTh] Квон и Тхам исследовали специальный класс гиперболических зацеплений, которые называются полностью аугментированными зацеплениями (в англоязычной литературе они называются *fully augmented links* или кратко *FAL*). Для них естественной мерой сложности является число аугментаций (их также называют вертикальными компонентами зацепления). Для данного класса Квон и Тхам определили плотность объема как отношение объема дополнения зацепления к числу его вертикальных компонент и показали, что множества плотностей лежит в интервале  $[v_{\text{oct}}, 10v_{\text{tet}}]$ , причем обе границы точны. Кроме того, они установили, что спектр дискретен в  $[v_{\text{oct}}, 2v_{\text{oct}})$  и всюду плотен в  $[2v_{\text{oct}}, 10v_{\text{tet}}]$ .

Между полностью аугментированными зацеплениями и идеальными прямоугольными многогранниками существует естественная геометрическая связь: дополнение каждого такого зацепления разбивается на два изометричных друг другу идеальных прямоугольных многогранника [La, Pur, BeEr24] (об аналогичном разбиении дополнений к зацеплениям в утолщенном торе см. [Kw]). При этом объем зацепления равен удвоенному объему многогранника, а число вертикальных компонент зацепления связано с числом вершин многогранника. Следовательно, с использованием подходящей нормировки спектр плотностей объемов зацеплений можно вложить в спектр нормированных объемов многогранников. Однако класс идеальных прямоугольных многогранников существенно шире, чем подкласс многогранников, возникающий из зацеплений, в связи с чем естественно возникает вопрос об описании спектра объемов класса всех идеальных прямоугольных гиперболических многогранников.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 приводятся основные определения и свойства идеальных прямоугольных гиперболических многогранников. Раздел 3 посвящен компактным прямоугольным гиперболическим многогранникам, в частности, многогранникам Лебелля. В разделах 4 и 5 приводятся доказательства теоремы 1.1 и теоремы 1.2 соответственно. В разделе 6 сравниваются полученные результаты для нормированных объемов идеальных и компактных прямоугольных многогранников с результатами Квон и Тхам о спектре плотности объемов аугментированных зацеплений. В заключение мы формулируем некоторые открытые вопросы и одну гипотезу.

## 2. ИДЕАЛЬНЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

*Абстрактным многогранником* мы будем называть такой клеточный комплекс на  $S^2$ , который можно реализовать как выпуклый многогранник в трехмерном евклидовом пространстве. Согласно классической теореме Штейница, см., например [Пра, Гл. 1], реализуемость клеточного комплекса как выпуклого евклидова многогранника эквивалентна тому, что его одномерный скелет является 3-связным графом без петель и кратных ребер. Напомним, что граф называется  $k$ -связным, если он содержит по крайней мере  $k + 1$  вершину и любые две его различные вершины можно соединить

по крайней мере  $k$  независимыми путями. В силу теоремы Менгера – Уитни, граф, содержащий по крайней мере  $k + 1$  вершину, является  $k$ -связным тогда и только тогда, когда после удаления любых его  $k - 1$  вершин (и инцидентных им ребер), получается связный граф. Обозначим через  $E(P)$  множество ребер абстрактного многогранника  $P$ . Разметкой абстрактного графа  $P$  будем называть отображение  $\mathcal{E} : E(P) \rightarrow (0, \pi/2]$ . Пару  $(P, \mathcal{E})$  будем называть *размеченным абстрактным многогранником*. Будем говорить, что размеченный абстрактный многогранник *реализуется как гиперболический многогранник*, если имеется такой многогранник  $\mathcal{P}$  в гиперболическом пространстве  $\mathbb{H}^3$ , что существует сохраняющий разметку изоморфизм графов, переводящий одномерный скелет  $\mathcal{P}^{(1)}$  с разметкой его ребер двугранными углами в размеченный абстрактный многогранник  $(P, \mathcal{E})$ . Ниже мы будем рассматривать такие многогранники в  $\mathbb{H}^3$ , у которых все двугранные углы равны  $\pi/2$  и будем называть их *прямоугольными*. Вершина многогранника в  $\mathbb{H}^3$  называется *идеальной*, если она лежит на абсолюте  $\partial\mathbb{H}^3$ . Подробнее о многогранниках в пространстве  $\mathbb{H}^3$  см. [AVS].

Пусть  $G$  – плоский граф, а  $G^*$  – граф, двойственный к  $G$ . Простую замкнутую кривую, составленную из  $k \geq 3$  ребер в  $G^*$  будем называть  *$k$ -обходом*. Призматическим  $k$ -обходом будем называть такой  $k$ -обход  $\gamma$ , что никакие два ребра графа  $G$ , пересекающие  $\gamma$ , не имеют общей вершины.

Необходимые и достаточные условия реализации в  $\mathbb{H}^3$  размеченного абстрактного многогранника конечного объема были получены в работах Андреева [Ан1, Ан2], см. также [RHD]. Мы приведем результат для частного случая прямоугольных многогранников следуя работе [At09]. В этом случае необходимые и достаточные условия являются чисто комбинаторными.

**Теорема 2.1.** *Прямоугольный абстрактный многогранник  $(P, \mathcal{E})$  реализуется как гиперболический многогранник, который мы обозначим через  $\mathcal{P}$ , тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- (1)  $P$  имеет не менее шести граней;
- (2) каждая вершина в  $P$  имеет валентность 3 или 4;
- (3) для каждой трех граней  $(F_i, F_j, F_k)$  в  $P$  таких, что  $F_i \cap F_j$  и  $F_j \cap F_k$  являются ребрами в  $P$  с различными концами, выполнено  $F_i \cap F_k = \emptyset$ ;
- (4)  $P^*$  не имеет призматических 4-обходов.

При этом, каждая 3-валентная вершина в  $P$  соответствует конечной вершине в  $\mathcal{P}$ , каждая 4-валентная вершина в  $P$  соответствует идеальной вершине в  $\mathcal{P}$ , и реализация единственна с точностью до изометрии.

Идеальным прямоугольным многогранником мы будем называть такой прямоугольный гиперболический многогранник у которого все вершины являются идеальными. Идеальные прямоугольные многогранники естественным образом связаны с теорией узлов, поскольку дополнения к гиперболическим полностью аугментированным зацеплениями разбиваются на пары изометричных идеальных прямоугольных многогранников, см. [La, Pur, BeEr24].

Для многогранника  $\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{ideal}$  обозначим через  $F$  число граней, через  $V$  число вершин, а через  $p_k$  число  $k$ -угольных граней, где  $k \geq 3$ . Тогда  $F = \sum_{k \geq 3} p_k$ . Поскольку

все вершины многогранника являются 4-валентными, из формулы Эйлера для многогранников следует, что  $F = V + 2$ , откуда

$$(1) \quad p_3 = 8 + \sum_{k \geq 5} (k - 4)p_k.$$

В частности, идеальным прямоугольным многогранником с наименьшим числом граней является октаэдр.

В следующем примере мы опишем одно бесконечное семейство идеальных прямоугольных многогранников, обобщающих октаэдр, которое будет играть важную роль в наших рассуждениях.

**Пример 2.1.** Для  $n \geq 3$ ,  $n$ -антипризмой  $A(n)$  называется  $(2n + 2)$ -гранник с верхним и нижним  $n$ -угольными основаниями и боковой поверхностью из двух слоев по  $n$  треугольников, у которого в каждой вершине сходится по четыре ребра. Диаграммы Шлегеля антипризм  $A(3)$  и  $A(4)$  приведены на рис. 1. В частности,  $A(3)$  является октаэдром. Реализуемость прямоугольных антипризм как идеальных гиперболических многогранников следует из теоремы 2.1. Прямоугольную гиперболическую  $n$ -антипризму будем обозначать через  $\mathcal{A}(n)$ .

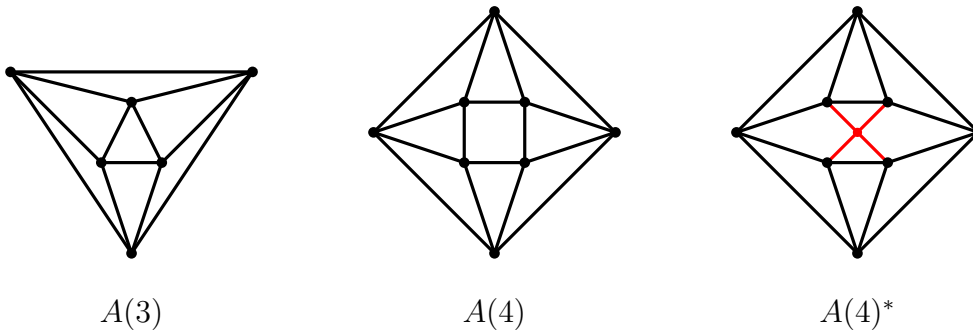
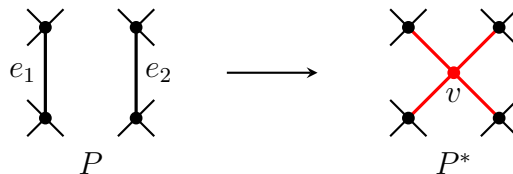


Рис. 1. Антипризмы  $A(3)$  и  $A(4)$ , скрученная антипризма  $A(4)^*$ .

Следуя [Bri] определим операцию, которая называется *скручиванием ребер*. Операция состоит в следующем. Пусть  $P$  — абстрактный многогранник, у которого в некоторой грани имеются четыре различные 4-валентные вершины, образующие две пары смежных вершин, соединённых ребрами  $e_1$  и  $e_2$ . Применим преобразование в грани, состоящее в удалении ребер  $e_1$  и  $e_2$ , создании новой вершины  $v$  и соединении этой вершины ребрами с рассматриваемыми четырьмя вершинами. Многогранник, полученный в результате такого преобразования, обозначим через  $P^*$ . Будем говорить, что  $P^*$  получен из  $P$  *скручиванием ребер*. На рис. 2 указаны участвующие в скручивании ребра  $e_1$ ,  $e_2$  и появившаяся новая вершина  $v$  с инцидентными ей ребрами.

Из теоремы 2.1 следует, что если  $\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{ideal}$ , то  $\mathcal{P}^* \in \mathcal{R}_{ideal}$ . Следующий результат показывает, что любой многогранник из  $\mathcal{R}_{ideal}$  является антипризмой или может быть получен из антипризмы с помощью конечного числа операций скручивания ребер.

Рис. 2. Скручивание ребер  $e_1$  и  $e_2$ .

**Теорема 2.2.** [Bri] *Класс многогранников  $\mathcal{R}_{ideal}$  порождается антипризмами  $\mathcal{A}(n)$ ,  $n \geq 3$ , и операциями скручивания ребер.*

Традиционно объемы многогранников в трехмерном гиперболическом пространстве вычисляются с помощью *функции Лобачевского*  $\Lambda(\theta)$ , введенной Милнором [Mil82],

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^\theta \log |2 \sin t| dt.$$

Как показал Терстон [Thu], объем прямоугольной гиперболической  $n$ -антипризмы  $\mathcal{A}(n)$ ,  $n \geq 3$ , выражается следующей формулой:

$$(2) \quad \text{vol}(\mathcal{A}(n)) = 2n \left[ \Lambda \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n} \right) + \Lambda \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n} \right) \right].$$

Далее мы будем приводить все приближенные значения функции Лобачевского и объемы многогранников с точностью до шести знаков после запятой, без указания отброшенных цифр многоточием. В частности, при  $n = 3$  получаем объем идеального прямоугольного октаэдра:

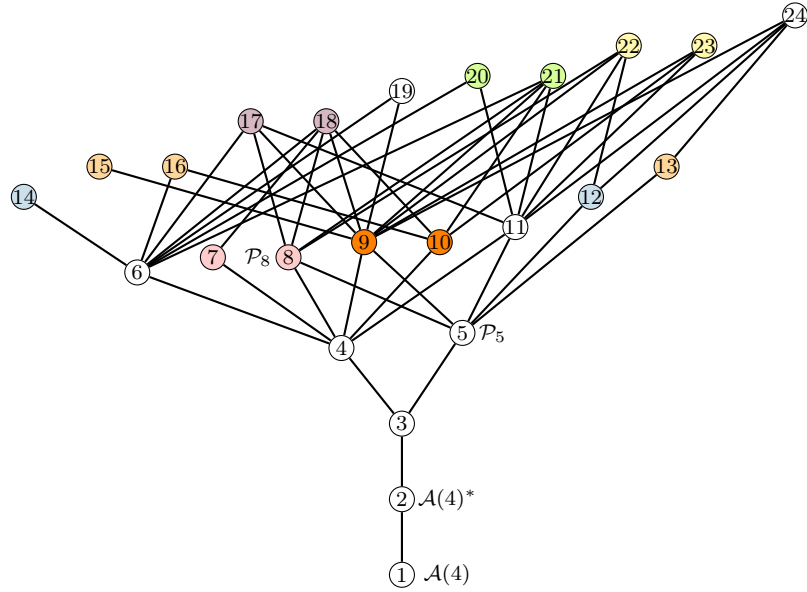
$$v_{\text{oct}} = \text{vol}(\mathcal{A}(3)) = 8\Lambda(\pi/4) = 3,663862.$$

Из формулы (2) следует, что величина  $\text{vol}(\mathcal{A}(n))$  стремится к  $\frac{v_{\text{oct}}}{2}n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

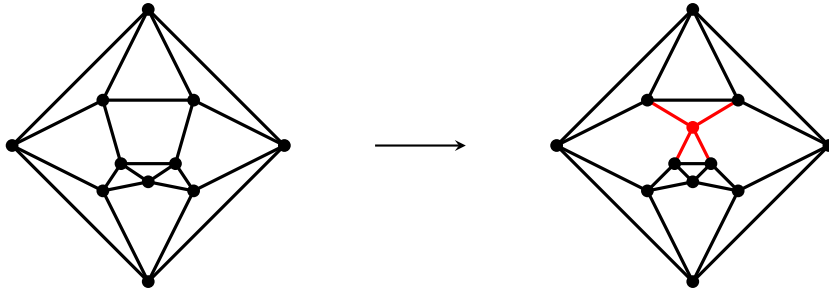
На рис. 3 приведен граф, представляющий пять поколений многогранников, полученных из  $\mathcal{A}(4)$  операциями скручивания ребер. Вершины графа соответствуют многогранникам  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{24}$ , где  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{A}(4)$ . Две вершины соединяются ребром если многогранники, соответствующие вершинам, связаны одним преобразованием скручивания ребер. Отметим, что в рамках приближенных расчетов имеют место следующие равенства объемов:

$$(3) \quad \begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{P}_7) &= \text{vol}(\mathcal{P}_8) = 10,991587; & \text{vol}(\mathcal{P}_9) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{10}) = 11,136296; \\ \text{vol}(\mathcal{P}_{12}) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{14}) = 11,801747; & \text{vol}(\mathcal{P}_{13}) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{15}) = \text{vol}(\mathcal{P}_{16}) = 12,046092; \\ \text{vol}(\mathcal{P}_{17}) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{18}) = 12,276278; & \text{vol}(\mathcal{P}_{20}) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{21}) = 12,611908; \\ \text{vol}(\mathcal{P}_{22}) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{23}) = 12,883862. \end{aligned}$$

**Замечание 2.1.** При операции скручивания ребер нормированный объем может как увеличиваться, так и уменьшаться. Примером увеличения нормированного объема является пара  $\mathcal{A}(4)$  и  $\mathcal{A}(4)^*$ . Имеет место неравенство  $\omega(\mathcal{A}(4)^*) > \omega(\mathcal{A}(4))$ , поскольку  $\omega(\mathcal{A}(4)) = \frac{6,023046}{8} = 0,75288$ , а  $\omega(\mathcal{A}(4)^*) = \frac{7,327725}{9} = 0,814191$ . Так как многогранник  $\mathcal{A}(4)^*$  можно составить из двух экземпляров  $\mathcal{A}(3)$ , то  $\text{vol}(\mathcal{A}(4)^*) = 2\text{vol}(\mathcal{A}(3))$ .

Рис. 3. Начальная часть графа роста многогранников из  $\mathcal{A}(4)$ .

Объемы многогранников  $\mathcal{A}(3)$  и  $\mathcal{A}(4)$  вычислены по формуле (2). Примером уменьшения нормированного объема является пара многогранников, отмеченных на рис. 3 как  $\mathcal{P}_5$  и  $\mathcal{P}_8 = \mathcal{P}_5^*$ . Диаграммы Шлегеля этих многогранников приведены на рис. 4. Имеет место неравенство  $\omega(\mathcal{P}_5^*) < \omega(\mathcal{P}_5)$ , поскольку  $\omega(\mathcal{P}_5) = \frac{10,149416}{11} = 0,922674$ , а  $\omega(\mathcal{P}_5^*) = \omega(\mathcal{P}_8) = \frac{10,991587}{12} = 0,915965$ . Объемы многогранников  $\mathcal{P}_5$  и  $\mathcal{P}_8$  были вычислены в работе [VeEg].

Рис. 4. Многогранники  $\mathcal{P}_5$  и  $\mathcal{P}_8 = \mathcal{P}_5^*$ .

Верхние и нижние оценки объемов идеальных прямоугольных многогранников через число вершин были получены Аткинсоном в [At09].

**Теорема 2.3.** [At09, Theorem 2.2] *Если идеальный прямоугольный гиперболический многогранник  $\mathcal{P}$  имеет  $\text{ver}(\mathcal{P})$  вершин, то*

$$(4) \quad \frac{v_{\text{oct}}}{4} (\text{ver}(\mathcal{P}) - 2) \leq \text{vol}(\mathcal{P}) \leq \frac{v_{\text{oct}}}{2} (\text{ver}(\mathcal{P}) - 4).$$

Оба неравенства превращаются в равенства для правильного идеального гиперболического октаэдра — единственного идеального прямоугольного многогранника с шестью вершинами. Более того, верхняя оценка асимптотически точна: существует последовательность идеальных прямоугольных многогранников  $\{Q_i\}$  с  $\text{ver}(Q_i) \rightarrow \infty$  такая, что  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(Q_i)}{\text{ver}(Q_i)} = \frac{1}{2}v_{\text{oct}}$ .

Отметим, что в силу теоремы 2.1 в неравенстве (4) подразумевается, что  $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 6$ . В дальнейшем верхняя оценка из (4) была улучшена в [EgVe20-2] для случая  $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 8$ , а в [АБВЕ] — для случая  $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 24$ .

Рассмотрим множество  $\mathcal{R}_{ideal}^n = \{\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{ideal} \mid \text{ver}(\mathcal{P}) = n\}$ , то есть множество идеальных прямоугольных гиперболических многогранников, имеющих  $n$  вершин. Объемы многогранников, принадлежащих множествам  $\mathcal{R}_{ideal}^n$ , где  $6 \leq n \leq 21$ , были вычислены в [VeEg].

В таблице 1 для  $6 \leq n \leq 21$  приведены следующие величины: число элементов  $|\mathcal{R}_{ideal}^n|$  в множестве  $\mathcal{R}_{ideal}^n$ ; число различных нормированных объемов  $|\Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n)|$ ; минимальные  $\min \Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n)$  и максимальные  $\max \Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n)$  значения нормированных объемов.

ТАБЛИЦА 1. Свойства нормированных объемов в идеальном случае.

$n$	$ \mathcal{R}_{ideal}^n $	$ \Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n) $	$\min \Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n)$	$\max \Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n)$
6	1	1	0,610643	0,610643
7	0	0	-	-
8	1	1	0,752880	0,752880
9	1	1	0,814191	0,814191
10	2	2	0,813788	0,861241
11	2	2	0,880628	0,922674
12	9	7	0,845784	1,003841
13	11	7	0,907826	1,026982
14	37	17	0,864735	1,059477
15	79	31	0,920885	1,088771
16	249	79	0,876903	1,129321
17	671	172	0,927656	1,148432
18	2182	495	0,885188	1,180085
19	6692	1359	0,931280	1,204969
20	22131	4276	0,891085	1,229961
21	72405	13031	0,933202	1,248958

### 3. КОМПАКТНЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Компактным прямоугольным многогранником мы будем называть такой прямоугольный гиперболический многогранник у которого все вершины являются конечными. В силу теоремы 2.1 все вершины компактного прямоугольного многогранника

являются 3-валентными. Отметим, см., например [In08, Th. 3.2], что каждая грань компактного прямоугольного многогранника является прямоугольным многоугольником, и следовательно, имеет не менее, чем 5 сторон.

Для многогранника  $\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{comp}$  обозначим через  $F$  число его граней,  $V$  число его вершин, и  $p_k$  число его  $k$ -угольных граней,  $k \geq 5$ . Тогда  $F = \sum_{k \geq 5} p_k$ . Из формулы Эйлера и 3-валентности вершин многогранника следует, что  $2F = \bar{V} + 4$ , откуда

$$(5) \quad p_5 = 12 + \sum_{k \geq 7} (k - 6)p_k.$$

В частности, компактным прямоугольным гиперболическим многогранником с наименьшим числом граней, а следовательно и с наименьшим числом вершин, является додекаэдр.

Поскольку условия реализации абстрактного прямоугольного многогранника как компактного прямоугольного многогранника в  $\mathbb{H}^3$  впервые исследовались Погореловым [Por], эти многогранники называют также *многогранниками Погорелова*. Информация о жизни и научных исследованиях Алексея Васильевича Погорелова изложена в статье [БВИ], приуроченной к 100-летию со дня его рождения. Отметим, что многогранники фуллеренов являются многогранниками Погорелова. Корреляция объемов прямоугольных гиперболических фуллеренов с химическими свойствами фуллеренов обсуждается в работе [EgVe20-1].

В следующем примере мы опишем одно бесконечное семейство компактных прямоугольных многогранников, обобщающих додекаэдр, которое будет играть важную роль в наших рассуждениях.

**Пример 3.1.** [Be87] Для  $n \geq 5$ , многогранником Лебелля  $L(n)$  называется  $(2n + 2)$ -гранник с верхним и нижним  $n$ -угольными основаниями и боковой поверхностью из двух слоев по  $n$  пятиугольников, у которого в каждой вершине сходится по три ребра. Диаграммы Шлегеля многогранников  $L(5)$  и  $L(6)$  приведены на рис. 5. В частности,  $L(5)$  является додекаэдром. Реализуемость прямоугольных многогранников Лебелля как гиперболических многогранников следует из теоремы 2.1. Прямоугольные гиперболические многогранники Лебелля будем обозначать через  $\mathcal{L}(n)$ .

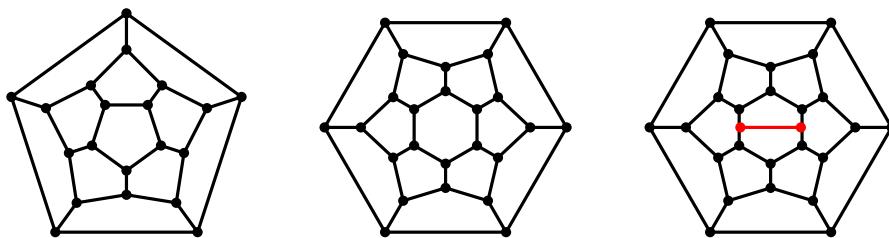


Рис. 5. Додекаэдр  $L(5)$ , многогранник  $L(6)$  и многогранник  $L(6)^+$ .

Как показано в [Be98], объем многогранника  $\mathcal{L}(n)$ ,  $n \geq 5$ , выражается следующей формулой:

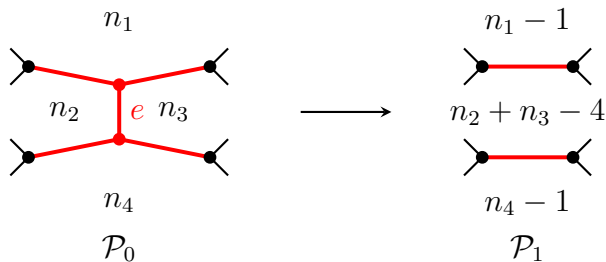
$$(6) \quad \text{vol}(\mathcal{L}(n)) = \frac{n}{2} \left[ 2\Lambda(\theta_n) + \Lambda\left(\theta_n + \frac{\pi}{n}\right) + \Lambda\left(\theta_n - \frac{\pi}{n}\right) - \Lambda\left(2\theta_n - \frac{\pi}{2}\right) \right],$$

где  $\theta_n = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{2\cos(\pi/n)}\right)$ . В частности,  $\text{vol}(\mathcal{L}(5)) = 4,306210$  и  $\text{vol}(\mathcal{L}(6)) = 6,023046$ . Геометрические и арифметические свойства многогранников  $\mathcal{L}(n)$  обсуждаются в работе [BoDo]. О геометрических свойствах почти прямоугольных многогранников Лебелля см. [BuMeVe].

Следуя [In08] опередем две операции на множестве абстрактных многогранников: композицию и реберную хирургию. Пусть  $P_1$  и  $P_2$  – два абстрактных многогранника. Пусть  $F_1$  – грань в  $P_1$ , которая имеет столько же сторон, что и некоторая грань  $F_2$  в  $P_2$ . Определим новый абстрактный многогранник  $P = P_1 \# P_2$  как результат комбинаторного объединения многогранников  $P_1$  и  $P_2$  вдоль граней  $F_1$  и  $F_2$ . Многогранник  $P$  будем называть *связной суммой*, или *композицией*, многогранников  $P_1$  и  $P_2$ . Как показано в [In08, Th. 4.4], если многогранники  $P_1$  и  $P_2$  реализуются как компактные прямоугольные гиперболические, то  $P$  также реализуется как компактный прямоугольный гиперболический многогранник. *Декомпозицией* будем называть операцию, обратную к композиции, то есть разрезание многогранника  $P$  вдоль некоторого призматического  $k$ -обхода,  $k \geq 5$ , на два многогранника  $P_1$  и  $P_2$ , каждый из которых реализуется как компактный прямоугольный гиперболический многогранник. Как показано в [In08, Th. 6.4], если компактный прямоугольный гиперболический многогранник  $\mathcal{P}$  является композицией компактных прямоугольных гиперболических многогранников  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ , то  $\text{vol}(\mathcal{P}) \geq \text{vol}(\mathcal{P}_1) + \text{vol}(\mathcal{P}_2)$ .

Пусть  $F_1$  и  $F_2$  – две различные грани в компактном прямоугольном гиперболическом многограннике  $\mathcal{P}$ . Мы будем говорить, что  $F_1$  и  $F_2$  *соединены ребром*, если они не являются смежными и найдется ребро  $e$  в  $\mathcal{P}$ , соединяющее вершину  $v_1$  на границе  $F_1$  с вершиной  $v_2$  на границе  $F_2$ . Поскольку все вершины в  $\mathcal{P}$  являются 3-валентными, то каждое ребро соединяет лишь одну пару граней. Ребро  $e$  будем называть *хорошим*, если  $e$  соединяет грани с числом сторон не менее 6, и *очень хорошим*, если оно дополнительно не является частью призматического 5-обхода. *Реберной хирургией* вдоль ребра  $e$  будем называть удаление  $e$  с соответствующим изменением числа вершин, ребер и граней, см. рис. 6. Как показано в [In08, Th. 7.1, Th. 8.6], если  $\mathcal{P}_0$  – компактный прямоугольный гиперболических многогранник, а  $e \in \mathcal{P}_0$  – очень хорошее ребро, то многогранник  $\mathcal{P}_1$ , полученный хирургией вдоль ребра  $e$ , также является компактным прямоугольным гиперболическим, и при этом,  $\text{vol}(\mathcal{P}_0) > \text{vol}(\mathcal{P}_1)$ . Обратную операцию будем называть *добавлением ребра  $e$*  и обозначать полученный многогранник через  $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cup \{e\}$ . На рис. 5 приведена диаграмма Шлегеля многогранника  $L(6)^+$ , полученного из  $L(6)$  добавлением ребра.

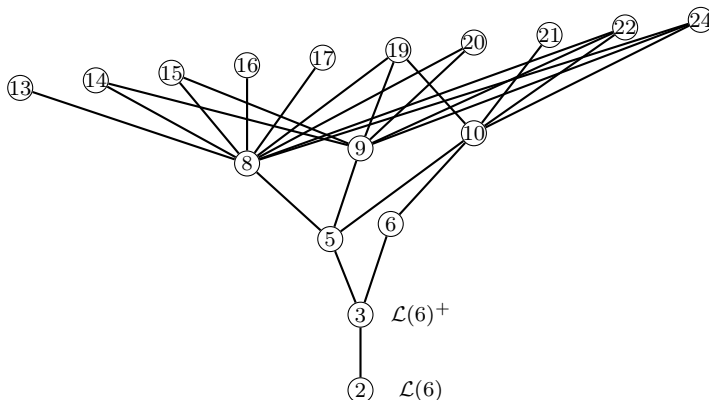
Важная роль многогранников Лебелля для описания структуры множества компактных прямоугольных гиперболических многогранников обусловлена следующей теоремой.

Рис. 6. Реберная хирургия вдоль ребра  $e$ .

**Теорема 3.1.** [In08, Th. 9.1] Пусть  $\mathcal{P}_0$  – компактный прямоугольный гиперболический многогранник. Тогда существует последовательность попарно непересекающихся объединений компактных прямоугольных гиперболических многогранников  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_k$  таких, что для  $i = 1, \dots, k$ , объединение  $\mathcal{P}_i$  получено из  $\mathcal{P}_{i-1}$  декомпозицией либо реберной хирургией, а  $\mathcal{P}_k$  состоит из многогранников Лебелля. Более того,

$$\text{vol}(\mathcal{P}_0) \geq \text{vol}(\mathcal{P}_1) \geq \text{vol}(\mathcal{P}_2) \geq \dots \geq \text{vol}(\mathcal{P}_k).$$

На рис. 7, представлен начальный подграф графа из работы [In22], который иллюстрирует четыре поколения многогранников, полученных из  $\mathcal{L}(6)$  операциями добавления ребра. Номера вершин соответствуют порядковым номерам многогранников в списке 825 первых многогранников из работы [In22]. Две вершины соединяются ребром, если многогранники, соответствующие вершинам, связаны одним преобразованием добавления ребра.

Рис. 7. Начальная часть графа роста многогранников из  $\mathcal{L}(6)$ .

**Замечание 3.1.** При операции добавления ребра нормированный объем может как увеличиваться, так и уменьшаться. Примером увеличения нормированного объема является пара  $\mathcal{L}(6)$  и  $\mathcal{L}(6)^+$ , см. рис. 5. Имеет место неравенство  $\omega(\mathcal{L}(6)^+) > \omega(\mathcal{L}(6))$ , поскольку  $\omega(\mathcal{L}(6)) = \frac{6,023046}{24} = 0,250960$ , а  $\omega(\mathcal{L}(6)^+) = \frac{6,967011}{26} = 0,267961$ . Примером уменьшения нормированного объема является пара многогранников  $\mathcal{Q}$  и  $\mathcal{Q}^+$ , см.

рис. 8, где  $\mathcal{Q}^+$  получен добавлением ребра, соединяющего ребра  $e_1$  и  $e_2$  многогранника  $\mathcal{Q}$ , имеющего 42 вершины. Имеет место неравенство  $\omega(\mathcal{Q}) > \omega(\mathcal{Q}^+)$ , поскольку  $\omega(\mathcal{Q}) = \frac{12,713430}{42} = 0,302700$ , а  $\omega(\mathcal{Q}^+) = \frac{12,996118}{44} = 0,295366$ .

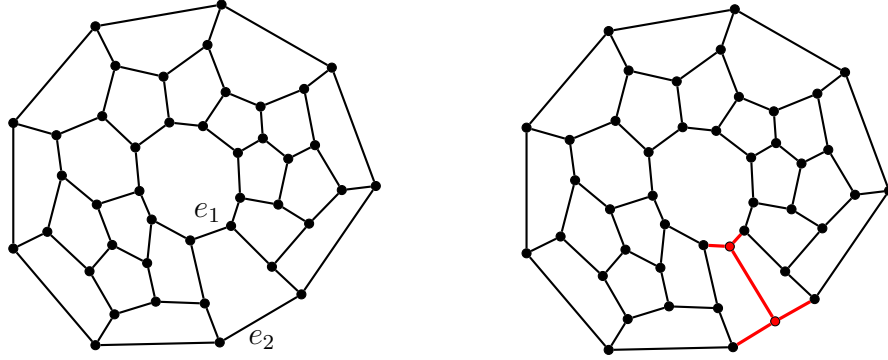


Рис. 8. Многогранники  $\mathcal{Q}$  и  $\mathcal{Q}^+$ .

Ниже мы будем использовать многогранники Лебелля  $\mathcal{L}(n)$  для построения новых компактных прямоугольных многогранников.

**Пример 3.2.** Для целого  $k \geq 1$  обозначим через  $\mathcal{L}_k(n)$  многогранник с  $2n(k+1)$  вершинами, построенный из  $k$  копий многогранника  $\mathcal{L}(n)$  путем их последовательного склеивания вдоль  $n$ -угольных граней. В частности,  $\mathcal{L}_1(n) = \mathcal{L}(n)$ . В качестве примера, на рис. 9 изображена развертка боковой поверхности многогранника  $\mathcal{L}_3(6)$ . Многогранники  $\mathcal{L}_k(n)$  мы будем называть *башнями из многогранников Лебелля*.

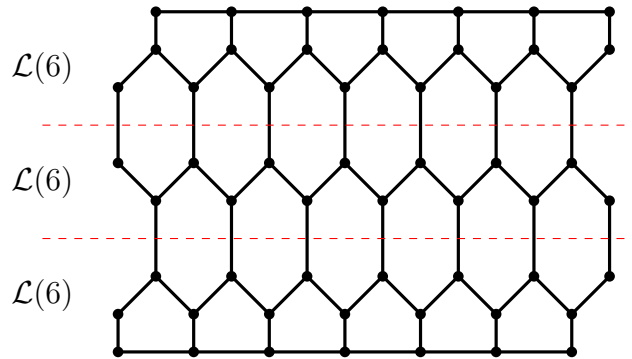


Рис. 9. Боковая поверхность многогранника  $\mathcal{L}_3(6)$ .

**Замечание 3.2.** Многогранник  $\mathcal{L}(n)$  имеет  $2n$  изометричных друг другу пятиугольных граней, прилегающих к двум  $n$ -угольным граням. В силу построения, башня  $\mathcal{L}_k(n)$  имеет  $2n$  таких же изометричных друг другу пятиугольных граней, прилегающих к верхней или нижней  $n$ -угольной грани башни.

В работе [BePe] было установлено следующее свойство.

**Теорема 3.2.** [BePe, Теорема 3] Для любого целого  $k \geq 1$  для башен компактных прямоугольных гиперболических многогранников Лебелля  $\mathcal{L}_k(n)$  имеет место следующее свойство:

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(\mathcal{L}_k(n))}{\text{ver}(\mathcal{L}_k(n))} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{5v_{\text{tet}}}{8},$$

где  $v_{\text{tet}}$  — объем правильного идеального гиперболического тетраэдра.

В частности, при  $k = 1$  получаем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(\mathcal{L}(n)) = \frac{5}{16}v_{\text{tet}}$ , а при  $k \rightarrow \infty$  имеем  $\lim_{k, n \rightarrow \infty} \omega(\mathcal{L}_k(n)) = \frac{5}{8}v_{\text{tet}}$ .

Оценки объемов компактных прямоугольных многогранников были получены Аткинсоном [At09].

**Теорема 3.3.** [At09, Theorem 2.3]. Если компактный прямоугольный гиперболический многогранник  $\mathcal{P}$  имеет  $\text{ver}(\mathcal{P})$  вершин, то

$$(8) \quad \frac{v_{\text{oct}}}{32}(\text{ver}(\mathcal{P}) - 8) \leq \text{vol}(\mathcal{P}) < \frac{5v_{\text{tet}}}{8}(\text{ver}(\mathcal{P}) - 10).$$

где  $v_{\text{tet}} = 3\Lambda(\frac{\pi}{3})$  — объем правильного идеального гиперболического тетраэдра. При этом, существует последовательность многогранников  $\{R_i\} \in \mathcal{R}_{\text{comp}}$  с  $\text{ver}(R_i)$  вершинами такая, что  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(R_i)}{\text{ver}(R_i)} = \frac{5}{8}v_{\text{tet}}$  при  $i \rightarrow \infty$ .

Как мы отметили выше, минимальным по числу вершин компактным прямоугольным гиперболическим многогранником является додекаэдр. Таким образом в формуле (8) подразумевается, что  $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 20$ . В дальнейшем верхняя оценка из (8) была улучшена в [EgVe20-2] для случая  $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 24$ , а в [АБВЕ] для случая  $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 81$ .

Рассмотрим множество  $\mathcal{R}_{\text{comp}}^n = \{\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{\text{comp}} \mid \text{ver}(\mathcal{P}) = n\}$ , то есть множество компактных прямоугольных многогранников, имеющих ровно  $n$  вершин. Поскольку одномерные скелеты многогранников из  $\mathcal{R}_{\text{comp}}^n$  являются 3-валентными графами, число вершин  $\text{ver}(\mathcal{P})$  четно. Для четных  $20 \leq n \leq 46$  число элементов  $|\mathcal{R}_{\text{comp}}^n|$  в множестве  $\mathcal{R}_{\text{comp}}^n$ , число различных нормированных объемов  $|\Omega(\mathcal{R}_{\text{comp}}^n)|$ , а также минимальные  $\min \Omega(\mathcal{R}_{\text{comp}}^n)$  и максимальные  $\max \Omega(\mathcal{R}_{\text{comp}}^n)$  значения нормированных объемов приведены в таблице 2.

#### 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

*Доказательство теоремы 1.1.* Установим, что  $\Omega(\mathcal{R}_{\text{ideal}}) \subset [\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, \frac{1}{2}v_{\text{oct}})$ , при этом нижняя граница достигается на октаэдре, а верхняя граница точна. Из неравенства (4) следует неравенство

$$\frac{v_{\text{oct}}}{4} \frac{\text{ver}(\mathcal{P}) - 2}{\text{ver}(\mathcal{P})} \leq \omega(\mathcal{P}) \leq \frac{v_{\text{oct}}}{2} \frac{\text{ver}(\mathcal{P}) - 4}{\text{ver}(\mathcal{P})},$$

где  $\omega(\mathcal{P}) = \text{vol}(\mathcal{P})/\text{ver}(\mathcal{P})$  и  $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 6$ . Рассмотрим нижнюю оценку. Поскольку при  $N \geq 6$  функция  $f(N) = \frac{N-2}{N}$  монотонно возрастает, то  $\min_{N \geq 6} f(N) = f(6) = \frac{2}{3}$ , откуда  $\omega(\mathcal{P}) \geq \frac{1}{6}v_{\text{oct}}$  и равенство достигается на октаэдре. Рассмотрим верхнюю оценку. При  $N \geq 6$  функция  $g(N) = \frac{N-4}{N}$  монотонно возрастает и стремится к 1 при  $N \rightarrow \infty$ ,

ТАБЛИЦА 2. Плотность нормированных объемов в компактном случае.

$n$	$ \mathcal{R}_{comp}^n $	$ \Omega(\mathcal{R}_{comp}^n) $	$\min \Omega(\mathcal{R}_{comp}^n)$	$\max \Omega(\mathcal{R}_{comp}^n)$
20	1	1	0,215310	0,215310
22	0	0	-	-
24	1	1	0,250960	0,250960
26	1	1	0,267961	0,267961
28	3	3	0,270116	0,285722
30	4	4	0,287080	0,298220
32	12	12	0,281845	0,311786
34	23	23	0,286201	0,323119
36	71	71	0,289334	0,335671
38	187	187	0,291020	0,345760
40	627	627	0,292711	0,355566
42	1970	1952	0,294115	0,364289
44	6833	6771	0,295366	0,372678
46	23384	23082	0,296473	0,380143

следовательно, если  $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 6$ , то имеет место неравенство  $\omega(\mathcal{P}) < \frac{1}{2}v_{\text{oct}}$ . При этом, поскольку по теореме 2.3 верхняя оценка в неравенстве (4) является асимптотически точной, то существует последовательность многогранников для которой нормированный объем стремится к  $\frac{1}{2}v_{\text{oct}}$ . Значит, верхняя граница спектра равна  $\frac{1}{2}v_{\text{oct}}$ , но она не достигается.

Покажем, что на интервале  $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, \frac{1}{4}v_{\text{oct}})$  спектр является дискретным. В самом деле, для произвольного  $\frac{1}{6}v_{\text{oct}} < C < \frac{1}{4}v_{\text{oct}}$  рассмотрим интервал  $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, C]$ . Предположим, что  $\omega(\mathcal{P}) \in [\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, C]$ . Тогда из нижней оценки в неравенстве (4) имеем:

$$\frac{v_{\text{oct}}}{4} \left( 1 - \frac{2}{\text{ver}(\mathcal{P})} \right) \leq \omega(\mathcal{P}) \leq C.$$

Отсюда следует, что

$$1 - \frac{2}{\text{ver}(\mathcal{P})} \leq \frac{4C}{v_{\text{oct}}} \quad \text{и далее,} \quad \text{ver}(\mathcal{P}) \leq \frac{2v_{\text{oct}}}{v_{\text{oct}} - 4C}.$$

В силу выбора  $C$ , выражение в правой части неравенства положительно. Таким образом, число вершин  $\text{ver}(\mathcal{P})$  ограничено сверху величиной, зависящей только от  $C$  и константы  $v_{\text{oct}}$ .

Согласно теореме 2.1, идеальный прямоугольного гиперболический многогранник однозначно с точностью до изометрии задается своим 1-скелетом, который является 3-связным планарным 4-валентным графом. Поскольку число таких графов с заданным числом вершин конечно, то множество возможных значений объемов (а значит, и нормированных объемов) также конечно. Таким образом, в любом интервале  $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, C]$ , где  $C < \frac{1}{4}v_{\text{oct}}$ , содержится лишь конечное число значений спектра. Следовательно, спектр дискретен на интервале  $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, \frac{1}{4}v_{\text{oct}})$ .

Теперь установим, что спектр нормированных объемов всюду плотен на отрезке  $[\frac{1}{4}v_{\text{oct}}, \frac{1}{2}v_{\text{oct}}]$ . Для удобства изложения введем вспомогательные величины. Для многогранника  $\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{\text{ideal}}$  определим *модифицированное число вершин*  $\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P})$  по формуле  $\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}) = \text{ver}(\mathcal{P}) - 3$ , а также, определим *модифицированный нормированный объем*  $\widetilde{\omega}(\mathcal{P})$  полагая:

$$\widetilde{\omega}(\mathcal{P}) = \frac{\text{vol}(\mathcal{P})}{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P})}.$$

В силу неравенства (1), каждый многогранник из  $\mathcal{R}_{\text{ideal}}$  имеет не менее восьми треугольных граней. Хорошо известно (см., например, [FG11, Prop. 2.5]), что в геометрии Лобачевского любые два идеальных треугольника изометричны друг другу. Это свойство позволяет корректно определить операцию *связной суммы*, т.е. склейки двух идеальных прямоугольных многогранников вдоль их треугольных граней. Пусть  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{R}_{\text{ideal}}$ . Выберем треугольные грани  $T_1 \subset \mathcal{P}_1$  и  $T_2 \subset \mathcal{P}_2$ . Поскольку  $T_1$  и  $T_2$  изометричны, мы можем склеить  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  вдоль этих граней. Обозначим полученный многогранник через  $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$ .

**Лемма 4.1.** *При операции связной суммы идеальных прямоугольных многогранников вдоль треугольных граней объем ведет себя аддитивно:*

$$\text{vol}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \text{vol}(\mathcal{P}_1) + \text{vol}(\mathcal{P}_2),$$

*а число вершин изменяется следующим образом:*

$$\text{ver}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \text{ver}(\mathcal{P}_1) + \text{ver}(\mathcal{P}_2) - 3.$$

*При этом, многогранник  $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$  является идеальным прямоугольным.*

*Доказательство.* При склейке прямоугольных многогранников грани, смежные с  $T_1$  и  $T_2$ , попарно образуют плоские двугранные углы величины  $\pi$  и сливаются в полные геодезические гиперграни. Прямые углы с остальными гранями при этом сохраняются, следовательно,  $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$  снова является прямоугольным многогранником. Поскольку двумерная грань склейки имеет нулевой трехмерный объем, выполняется равенство  $\text{vol}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \text{vol}(\mathcal{P}_1) + \text{vol}(\mathcal{P}_2)$ . При отождествлении граней склейки три идеальные вершины треугольника  $T_1$  попарно отождествляются с тремя идеальными вершинами треугольника  $T_2$ . Поскольку эти вершины лежат на абсолюте, после склейки остаются идеальными вершинами. Таким образом, 6 исходных вершин, соответствующих  $T_1$  и  $T_2$ , сливаются в 3 вершины, что приводит к формуле  $\text{ver}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \text{ver}(\mathcal{P}_1) + \text{ver}(\mathcal{P}_2) - 3$ . Лемма доказана.  $\square$

Заметим, что при операции связной суммы модифицированное число вершин ведет себя аддитивно:

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) &= (\text{ver}(\mathcal{P}_1) + \text{ver}(\mathcal{P}_2) - 3) - 3 \\ &= (\text{ver}(\mathcal{P}_1) - 3) + (\text{ver}(\mathcal{P}_2) - 3) = \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2). \end{aligned}$$

Вычислим модифицированный нормированный объем связной суммы:

$$(9) \quad \widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \frac{\text{vol}(\mathcal{P}_1) + \text{vol}(\mathcal{P}_2)}{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)} = \frac{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) \cdot \widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2) \cdot \widetilde{\omega}(\mathcal{P}_2)}{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}.$$

Таким образом, величина  $\tilde{\omega}$  для связной суммы многогранников ведет себя как взвешенное среднее значений  $\tilde{\omega}$  слагаемых, где весами выступают модифицированные числа вершин.

Рассмотрим последовательность многогранников  $\#_k \mathcal{P}$ , полученную последовательным склеиванием  $k \geq 1$  копий одного и того же многогранника  $\mathcal{P}$ . Очевидно, что  $\tilde{\omega}(\#_k \mathcal{P}) = \tilde{\omega}(\mathcal{P})$ . Заметим, что

$$\omega(\#_k \mathcal{P}) = \frac{\text{vol}(\#_k \mathcal{P})}{\text{ver}(\#_k \mathcal{P})} = \frac{\text{vol}(\#_k \mathcal{P})}{\widetilde{\text{ver}}(\#_k \mathcal{P}) + 3} = \tilde{\omega}(\#_k \mathcal{P}) \cdot \frac{\widetilde{\text{ver}}(\#_k \mathcal{P})}{\widetilde{\text{ver}}(\#_k \mathcal{P}) + 3}.$$

Поскольку  $\widetilde{\text{ver}}(\#_k \mathcal{P}) = k \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}) \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ , дробь справа стремится к 1. Таким образом,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega(\#_k \mathcal{P}) = \tilde{\omega}(\#_k \mathcal{P}) = \tilde{\omega}(\mathcal{P}).$$

Значит, чтобы аппроксимировать произвольное значение в интервале  $[\frac{1}{4}v_{\text{oct}}, \frac{1}{2}v_{\text{oct}}]$  нормированными объемами, достаточно аппроксимировать его модифицированными нормированными объемами.

Пусть для многогранников  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{R}_{\text{ideal}}$  модифицированные объемы равны  $\tilde{\omega}(\mathcal{P}_1) = A$  и  $\tilde{\omega}(\mathcal{P}_2) = B$ . Без ограничения общности можем считать, что  $A < B$ . Покажем как построить последовательность многогранников таких, чтобы их нормированные объемы сходились к произвольному значению на интервале  $(A, B)$ . Обозначим через  $\#_k \mathcal{P}_1 \#_m \mathcal{P}_2$  многогранник, полученный связной суммой  $k$  копий  $\mathcal{P}_1$  и  $m$  копий  $\mathcal{P}_2$  вдоль треугольных граней. Последовательно применяя формулу (9) получим

$$\tilde{\omega}(\#_k \mathcal{P}_1 \#_m \mathcal{P}_2) = \frac{k \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) \cdot A + m \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2) \cdot B}{k \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + m \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}.$$

Для произвольного  $\alpha \in (0, 1)$  выберем последовательности таких целых чисел  $\{k_i\}$  и  $\{m_i\}$ , что  $(k_i, m_i) = 1$  и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{k_i}{m_i} = \frac{\alpha \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}{(1 - \alpha) \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1)}.$$

Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\omega}(\#_{k_i} \mathcal{P}_1 \#_{m_i} \mathcal{P}_2) = \alpha \cdot A + (1 - \alpha) \cdot B.$$

Следовательно, множество значений  $\tilde{\omega}$  плотно в интервале между любыми двумя значениями  $\tilde{\omega}(\mathcal{P}_1)$  и  $\tilde{\omega}(\mathcal{P}_2)$ .

Чтобы доказать плотность нормированных объемов на интервале  $[\frac{1}{4}v_{\text{oct}}, \frac{1}{2}v_{\text{oct}}]$  воспользуемся идеальными прямоугольными  $n$ -антипризмами  $\mathcal{A}(n)$ . Используя формулу (2), получаем, что при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\text{vol}(\mathcal{A}(n)) \sim \frac{v_{\text{oct}}}{2} n.$$

При этом  $\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{A}(n)) = (2n + 2) - 3 = 2n - 1 \sim 2n$ . Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\omega}(\mathcal{A}(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{v_{\text{oct}}}{2} n}{2n} = \frac{v_{\text{oct}}}{4}.$$

Таким образом, во-первых, найдется антипризма  $\mathcal{A}(n)$  со значением  $\tilde{\omega}(\mathcal{A}(n))$ , сколь угодно близким к  $\frac{1}{4}v_{\text{oct}}$ . Во-вторых, согласно теореме 2.3 существует последовательность многогранников  $\{Q_i\}$ , для которой  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(Q_i)}{\text{ver}(Q_i)} = \frac{1}{2}v_{\text{oct}}$  и следовательно,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\omega}(Q_i) = \frac{1}{2}v_{\text{oct}}$ .

Для сколь угодно малого  $\varepsilon$  выберем в качестве  $\mathcal{P}_{1,\varepsilon}$  многогранник  $\mathcal{A}(n_\varepsilon)$  для которого  $|\tilde{\omega}(\mathcal{A}(n_\varepsilon)) - \frac{1}{4}v_{\text{oct}}| < \varepsilon$ , а в качестве  $\mathcal{P}_{2,\varepsilon}$  выберем многогранник  $Q_{i_\varepsilon}$  из теоремы 2.3 для которого  $|\frac{1}{2}v_{\text{oct}} - \tilde{\omega}(Q_{i_\varepsilon})| < \varepsilon$ . Применяя к многогранникам  $\mathcal{P}_{1,\varepsilon}$  и  $\mathcal{P}_{2,\varepsilon}$  те же рассуждения, что выше мы применяли к многогранникам  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ , получаем, что нормированный объем всюду плотен на интервале  $(\frac{1}{4}v_{\text{oct}} + \varepsilon, \frac{1}{2}v_{\text{oct}} - \varepsilon)$ . Таким образом нормированный объем всюду плотен на отрезке  $[\frac{1}{4}v_{\text{oct}}, \frac{1}{2}v_{\text{oct}}]$ . Доказательство теоремы 1.1 завершено.  $\square$

## 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

*Доказательство теоремы 1.2.* Установим, что  $\Omega(\mathcal{R}_{\text{comp}}) \subset [\frac{5}{192}v_{\text{oct}}, \frac{5}{8}v_{\text{tet}}]$ . Разделив все части неравенства (8) на  $\text{ver}(\mathcal{P})$ , получим следующее неравенство для нормированного объема:

$$\frac{v_{\text{oct}} \text{ver}(\mathcal{P}) - 8}{32 \text{ver}(\mathcal{P})} \leq \omega(\mathcal{P}) \leq \frac{5v_{\text{tet}} \text{ver}(\mathcal{P}) - 10}{8 \text{ver}(\mathcal{P})}.$$

Как следует из формулы (5), минимальное число вершин для многогранника из  $\mathcal{R}_{\text{comp}}$  равно 20. При  $N \geq 20$  функция  $h(N) = \frac{N-8}{N} = 1 - \frac{8}{N}$  монотонно возрастает. Минимальные значения нормированных объемов многогранников из  $\mathcal{R}_{\text{comp}}$  с числом вершин от 20 до 46 представлены в таблице 2. Подставляя  $\text{ver}(\mathcal{P}) = 48$ , получаем:

$$\omega(\mathcal{P}) \geq \frac{v_{\text{oct}}}{32} \cdot \frac{48 - 8}{48} = \frac{5}{192}v_{\text{oct}}.$$

Как видно из таблицы 2, величина  $\frac{5}{192}v_{\text{oct}}$  не превосходит минимальные значения нормированных объемов многогранников с числом вершин от 20 до 46, потому  $\frac{5}{192}v_{\text{oct}}$  можно взять в качестве оценки на нижнюю границу спектра. Для верхней границы рассмотрим функцию  $u(N) = \frac{5v_{\text{tet}}}{8}(1 - \frac{10}{N})$ . Она стремится к  $\frac{5v_{\text{tet}}}{8}$  при  $N \rightarrow \infty$ . Поскольку по теореме 3.3 верхняя оценка в (8) асимптотически точна, верхняя граница спектра равна  $\frac{5}{8}v_{\text{tet}}$ .

Покажем, что на интервале  $[\frac{5}{192}v_{\text{oct}}, \frac{1}{32}v_{\text{oct}})$  спектр является дискретным. В самом деле, для произвольного  $\frac{5}{192}v_{\text{oct}} < C < \frac{v_{\text{oct}}}{32}$  рассмотрим отрезок  $[\frac{5}{192}v_{\text{oct}}, C]$ . Предположим, что  $\omega(\mathcal{P}) \in [\frac{5}{192}v_{\text{oct}}, C]$ . Тогда из нижней оценки в неравенстве (8) имеем:

$$\frac{v_{\text{oct}}}{32} \left( 1 - \frac{8}{\text{ver}(\mathcal{P})} \right) \leq C \quad \text{и далее,} \quad \text{ver}(\mathcal{P}) \leq \frac{8v_{\text{oct}}}{v_{\text{oct}} - 32C}.$$

В силу выбора  $C$ , выражение в правой части неравенства положительное. Таким образом, число вершин  $\text{ver}(\mathcal{P})$  ограничено сверху величиной, зависящей только от  $C$  и константы  $v_{\text{oct}}$ .

Согласно теореме 2.1, компактный гиперболический многогранник однозначно с точностью до изометрии задается своим 1-скелетом, который является 3-связным планарным 3-валентным графом. Поскольку число таких графов с заданным числом вершин конечно, то множество возможных значений объемов (а значит, и нормированных объемов) также конечно. Таким образом, в любом интервале  $[\frac{5}{192}v_{\text{oct}}, C]$  содержится лишь конечное число значений спектра. Следовательно, спектр дискретен на интервале  $[\frac{5}{192}v_{\text{oct}}, \frac{1}{32}v_{\text{oct}})$ .

Покажем, что в интервале  $[\frac{5}{16}v_{\text{tet}}, \frac{5}{8}v_{\text{tet}}]$  спектр всюду плотен. Определим операцию *связной суммы* (склейки) двух многогранников из  $\mathcal{R}_{\text{comp}}$  вдоль двух изометричных пятиугольных граней.

Для многогранника  $\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{\text{comp}}$  определим модифицированное число вершин  $\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}) = \text{ver}(\mathcal{P}) - 10$ , а также определим модифицированный нормализованный объем  $\widetilde{\omega}(\mathcal{P})$  полагая

$$\widetilde{\omega}(\mathcal{P}) = \frac{\text{vol}(\mathcal{P})}{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P})}.$$

Связь между обычным нормированным объемом  $\omega(\mathcal{P})$  и модифицированным  $\widetilde{\omega}(\mathcal{P})$  задается соотношением:

$$\widetilde{\omega}(\mathcal{P}) = \frac{\text{vol}(\mathcal{P})}{\text{ver}(\mathcal{P}) - 10} = \omega(\mathcal{P}) \cdot \frac{\text{ver}(\mathcal{P})}{\text{ver}(\mathcal{P}) - 10}.$$

Пусть  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{R}_{\text{comp}}$ . Предположим, что имеются изометричные друг другу пятиугольные грани  $F_1 \subset \mathcal{P}_1$  и  $F_2 \subset \mathcal{P}_2$ . Склеим многогранники  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  вдоль этих граней и обозначим полученный многогранник через  $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$ . Данную операцию будем называть *связной суммой вдоль пятиугольных граней*.

**Лемма 5.1.** *При операции связной суммы компактных прямоугольных многогранников вдоль пятиугольных граней объем ведет себя аддитивно:*

$$\text{vol}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \text{vol}(\mathcal{P}_1) + \text{vol}(\mathcal{P}_2),$$

*а число вершин изменяется следующим образом:*

$$\text{ver}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \text{ver}(\mathcal{P}_1) + \text{ver}(\mathcal{P}_2) - 10.$$

*При этом, многогранник  $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$  является компактным прямоугольным.*

*Доказательство.* При склейке прямоугольных многогранников грани, смежные с  $F_1$  и  $F_2$ , попарно образуют плоские двугранные углы величины  $\pi$  и сливаются в полные геодезические гиперграни. Прямые углы с остальными гранями при этом сохраняются, следовательно,  $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$  снова является прямоугольным многогранником. В компактном прямоугольном многограннике все вершины 3-валентные. Каждая вершина склеиваемой грани образована пересечением самой этой грани и двух перпендикулярных ей смежных. При склейке грань уходит во внутренность, а две смежные грани гладко сливаются. Следовательно, точка их пересечения становится внутренней точкой ребра и перестает быть вершиной. Поскольку две склеиваемые пятиугольные грани содержат суммарно 10 вершин, все они при отождествлении исчезают из 1-скелета, что дает искомую формулу. Лемма доказана.  $\square$

При этом, модифицированное число вершин ведет себя аддитивно:

$$\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = (\text{ver}(\mathcal{P}_1) + \text{ver}(\mathcal{P}_2) - 10) - 10 = \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2).$$

Следовательно, модифицированный нормированный объем связной суммы вдоль пятиугольных граней является взвешенным средним:

$$(10) \quad \widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \frac{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) \cdot \widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2) \cdot \widetilde{\omega}(\mathcal{P}_2)}{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}.$$

Рассмотрим последовательное склеивание  $m$  копий одного и того же многогранника  $\mathcal{P}$ . Обозначим полученный многогранник через  $\#_m \mathcal{P}$ . Тогда  $\widetilde{\omega}(\#_m \mathcal{P}) = \widetilde{\omega}(\mathcal{P})$ , так как это среднее одинаковых величин. Связь между обычным и модифицированным нормированным объемом описывается формулой:

$$\omega(\#_m \mathcal{P}) = \frac{\text{vol}(\#_m \mathcal{P})}{\text{ver}(\#_m \mathcal{P})} = \frac{\text{vol}(\#_m \mathcal{P})}{\widetilde{\text{ver}}(\#_m \mathcal{P}) + 10} = \widetilde{\omega}(\#_m \mathcal{P}) \frac{\widetilde{\text{ver}}(\#_m \mathcal{P})}{\widetilde{\text{ver}}(\#_m \mathcal{P}) + 10}.$$

Поскольку  $\widetilde{\text{ver}}(\#_m \mathcal{P}) = m \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}) \rightarrow \infty$  при  $m \rightarrow \infty$ , дробь справа стремится к 1. Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \omega(\#_m \mathcal{P}) = \widetilde{\omega}(\#_m \mathcal{P}) = \widetilde{\omega}(\mathcal{P}).$$

Это означает, что любое значение модифицированного нормированного объема  $\widetilde{\omega}(\mathcal{P})$  является предельной точкой для спектра обычных нормированных объемов  $\omega$ . Таким образом, чтобы аппроксимировать произвольное значение в интервале  $[\frac{5v_{\text{tet}}}{16}, \frac{5v_{\text{tet}}}{8}]$  нормированными объемами, достаточно аппроксимировать его модифицированными нормированными объемами.

Пусть  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  — два многогранника из  $\mathcal{R}_{\text{comp}}$ . Пусть  $\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1) = A$  и  $\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_2) = B$ , где  $A < B$ . Рассмотрим многогранник  $\#_k \mathcal{P}_1 \#_\ell \mathcal{P}_2$ , являющийся связной суммой  $k$  копий  $\mathcal{P}_1$  и  $\ell$  копий  $\mathcal{P}_2$  вдоль изометричных друг другу пятиугольных граней. Тогда:

$$\widetilde{\omega}(\#_k \mathcal{P}_1 \#_\ell \mathcal{P}_2) = \frac{k \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) \cdot A + \ell \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2) \cdot B}{k \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \ell \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}.$$

Для произвольного  $\alpha \in (0, 1)$  выберем последовательности таких целых чисел  $\{k_i\}$  и  $\{\ell_i\}$ , что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{k_i}{\ell_i} = \frac{\alpha \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}{(1 - \alpha) \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1)}.$$

Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \widetilde{\omega}(\#_{k_i} \mathcal{P}_1 \#_{\ell_i} \mathcal{P}_2) = \alpha \cdot A + (1 - \alpha) \cdot B.$$

Следовательно, множество значений  $\widetilde{\omega}$  плотно в интервале между любыми двумя значениями  $\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1)$  и  $\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_2)$ .

Теперь перейдем к конкретным семействам многогранников. Для реализации связной суммы нам нужны многогранники с изометричными пятиугольными гранями. Рассмотрим многогранники Лебелля  $\mathcal{L}(n)$  и их башни  $\mathcal{L}_k(n)$ . При фиксированном  $n$  все боковые пятиугольные грани этих многогранников изометричны друг другу. Обозначим множество таких пятиугольных граней через  $\mathcal{F}_n$ . У многогранников  $\mathcal{L}(n)$  и  $\mathcal{L}_k(n)$  имеется по  $2n$  попарно изометричных пятиугольных граней.

Более того, заметим, что если пара произвольных многогранников  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  имеет по  $p_1$  и  $p_2$  попарно изометричных пятиугольных граней из множества  $\mathcal{F}_n$ , то многогранник  $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$ , полученный связной суммой вдоль пары таких граней имеет не менее  $p_1 + p_2 - 12$  изометричных пятиугольных граней класса  $\mathcal{F}_n$ . Действительно, при склейке две грани  $F_1 \subset \mathcal{P}_1$  и  $F_2 \subset \mathcal{P}_2$  уходят во внутренность многогранника. Кроме того, могут изменить свой комбинаторный тип (и тем самым перестать принадлежать классу  $\mathcal{F}_n$ ) грани, инцидентные граням склейки – их ровно по 5 в каждом из многогранников. В худшем случае все эти 12 граней принадлежали  $\mathcal{F}_n$  и были утрачены.

Далее будем полагать, что  $n > 6$ . Тогда после нескольких операций связной суммы, примененных к копиям многогранников  $\mathcal{L}(n)$  и  $\mathcal{L}_k(n)$  вдоль пятиугольных граней из множества  $\mathcal{F}_n$ , итоговый многогранник будет иметь не меньше пятиугольных граней класса  $\mathcal{F}_n$ , чем имеют  $\mathcal{L}(n)$  и  $\mathcal{L}_k(n)$ . Это позволяет повторять операцию связной суммы копий многогранников  $\mathcal{L}(n)$  и  $\mathcal{L}_k(n)$  любое требуемое количество раз.

В первую очередь отметим, что в силу формулы (7), концы интересующего нас интервала  $[\frac{5}{16}v_{\text{tet}}, \frac{5}{8}v_{\text{tet}}]$  можно получить как пределы последовательностей модифицированных объемов многогранников  $\mathcal{L}(n)$  (устремляя  $n$  к бесконечности) и  $\mathcal{L}_k(n)$  (устремляя  $n$  и  $k$  к бесконечности).

Для завершения доказательства заметим, что в силу формулы (7), для сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  найдутся натуральные числа  $k_\varepsilon$  и  $n_\varepsilon$  такие, что

$$\tilde{\omega}(\mathcal{L}(n_\varepsilon)) \in [\frac{5v_{\text{tet}}}{16}, \frac{5v_{\text{tet}}}{16} + \varepsilon], \quad \tilde{\omega}(\mathcal{L}_{k_\varepsilon}(n_\varepsilon)) \in [\frac{5v_{\text{tet}}}{8} - \varepsilon, \frac{5v_{\text{tet}}}{8}].$$

Таким образом, мы можем построить связные суммы многогранников  $\mathcal{L}(n_\varepsilon)$  и  $\mathcal{L}_{k_\varepsilon}(n_\varepsilon)$  следующего вида:

$$\#_m \mathcal{L}(n_\varepsilon) \#_s \mathcal{L}_{k_\varepsilon}(n_\varepsilon)$$

и применить вышеописанную процедуру для аппроксимации любого числа в интервале  $[\frac{5v_{\text{tet}}}{16} + \varepsilon, \frac{5v_{\text{tet}}}{8} - \varepsilon]$ . Доказательство теоремы 1.2 завершено.  $\square$

## 6. СРАВНЕНИЕ СПЕКТРОВ И ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

Как мы уже упоминали во введении, существует тесная связь между объемами полностью аугментированных зацеплений и объемами идеальных прямоугольных многогранников. Известно, см. [La, Pur, BeEr24], что дополнение к любому полностью аугментированному гиперболическому зацеплению  $L \subset S^3$  можно разрезать на два изометричных друг другу идеальных прямоугольных многогранника  $\mathcal{P}$ . При этом выполняются соотношения:

$$(11) \quad \text{vol}(L) = 2\text{vol}(\mathcal{P}), \quad \text{ver}(\mathcal{P}) = 3a(L),$$

где  $a(L)$  — число аугментаций (вертикальных компонент) зацепления.

Квон и Тхам [KwTh] исследовали спектр плотности объема  $\text{vd}(L)$  полностью аугментированного зацепления  $L$ , который определяется следующим образом:  $\text{vd}(L) = \text{vol}(L)/a(L)$ . Выразим эту величину через нормированный объем многогранника  $\mathcal{P}$ , соответствующего зацеплению  $L$  воспользовавшись соотношениями (11):

$$\text{vd}(L) = \frac{2\text{vol}(\mathcal{P})}{\text{ver}(\mathcal{P})/3} = 6 \frac{\text{vol}(\mathcal{P})}{\text{ver}(\mathcal{P})} = 6\omega(\mathcal{P}).$$

В [KwTh] показано, что спектр  $\text{vd}(L)$  содержится в интервале  $[v_{\text{oct}}, 10v_{\text{tet}}]$ , дискретен в  $[v_{\text{oct}}, 2v_{\text{oct}}]$  и всюду плотен в  $[2v_{\text{oct}}, 10v_{\text{tet}}]$ . Пересчитывая эти интервалы для  $\omega(\mathcal{P})$  (делением на 6), получаем, что для подкласса многогранников, соответствующих полностью аугментированным зацеплениям, спектр лежит в интервале  $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, \frac{5}{3}v_{\text{tet}}]$ , дискретен в  $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, \frac{1}{3}v_{\text{oct}}]$  и всюду плотен в  $[\frac{1}{3}v_{\text{oct}}, \frac{5}{3}v_{\text{tet}}]$ .

Сравнивая спектр  $\Omega(\text{FAL})$  плотности объемов аугментированных зацеплений со спектром  $\Omega(\mathcal{R}_{\text{ideal}})$  нормированных объемов идеальных прямоугольных многогранников отметим следующие факты, см. рис. 10.

- (1) Нижние границы спектров совпадают и равны  $d = \frac{1}{6}v_{\text{oct}}$ .
- (2) Верхняя граница спектра  $\Omega(\mathcal{R}_{\text{ideal}})$  равна  $k = \frac{1}{2}v_{\text{oct}}$ , что превосходит верхнюю границу  $h = \frac{5}{3}v_{\text{tet}}$  спектра  $\Omega(\text{FAL})$ . Это различие объясняется тем, что класс всех идеальных прямоугольных многогранников существенно шире класса многогранников, возникающих из диаграмм зацеплений. Например, у многогранников, возникающих из зацеплений, каждая вершина инцидентна двум треугольникам, которые пересекаются ровно по этой вершине).
- (3) Структуры спектров (сначала идет дискретная часть, а затем всюду плотная часть) качественно совпадают. Переход от дискретной части к всюду плотной в случае  $\Omega(\mathcal{R}_{\text{ideal}})$  происходит при значении  $f = \frac{1}{4}v_{\text{oct}}$ , в то время как для случая  $\Omega(\text{FAL})$  при значении  $g = \frac{1}{3}v_{\text{oct}}$ .
- (4) Как видно из доказательства теоремы 1.1 и таблицы 1, единственным нормированным объемом из  $\Omega(\mathcal{R}_{\text{ideal}})$ , который попадает в плотную часть спектра  $\Omega(\mathcal{R}_{\text{comp}})$ , является  $d = \frac{1}{6}v_{\text{oct}} = 0,610643 \in [d, e)$ , соответствующий октаэдру.

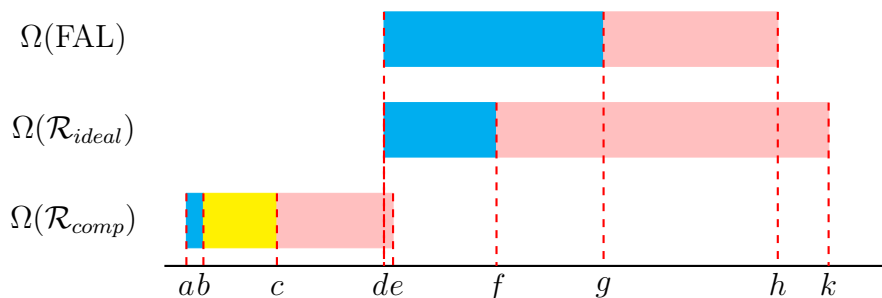


Рис. 10. Сравнение спектров нормированных объемов.

Соответствующие интервалы приведены на рис. 10, где указанные величины имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{5}{192}v_{\text{oct}} = 0,068697, & b &= \frac{1}{32}v_{\text{oct}} = 0,114495, & c &= \frac{5}{16}v_{\text{tet}} = 0,317169, \\
 d &= \frac{1}{6}v_{\text{oct}} = 0,610643, & e &= \frac{5}{8}v_{\text{tet}} = 0,634338, & f &= \frac{1}{4}v_{\text{oct}} = 0,915965, \\
 g &= \frac{1}{3}v_{\text{oct}} = 1,221287, & h &= \frac{5}{3}v_{\text{tet}} = 1,691558, & k &= \frac{1}{2}v_{\text{oct}} = 1,831931.
 \end{aligned}$$

В цветной версии рис. 10 синим цветом отмечены области дискретной части спектра, розовым – области всюду плотной части спектра, а желтым – область, которая пока остается неисследованной.

В заключение сформулируем несколько открытых вопросов и одну гипотезу.

**Вопрос 6.1.** Какова точная нижняя граница спектра  $\Omega(\mathcal{R}_{comp})$  нормированных объемов компактных прямоугольных гиперболических многогранников? Указанная в данной работе граница  $a = \frac{5}{192}v_{oct}$  вытекает из формулы (8) и таблицы 2, однако она не является точной.

**Вопрос 6.2.** Какова структура спектра  $\Omega(\mathcal{R}_{comp})$  нормированных объемов компактных прямоугольных многогранников в интервале  $[b, c] = [\frac{1}{32}v_{oct}, \frac{5}{16}v_{tet}]$ ?

Наша гипотеза состоит в следующем.

**Гипотеза 6.1.** Спектр  $\Omega(\mathcal{R}_{comp})$  нормированных объемов компактных прямоугольных многогранников лежит в интервале  $[\frac{volR(5)}{20}, \frac{5}{8}v_{tet}]$ , причем обе границы точны.

Более того, спектр  $\Omega(\mathcal{R}_{comp})$  дискретен в интервале  $[\frac{volR(5)}{20}, \frac{5}{16}v_{tet}]$  и всюду плотен в  $[\frac{5}{16}v_{tet}, \frac{5}{8}v_{tet}]$ .

**Вопрос 6.3.** Как устроен спектр нормированных объемов прямоугольных гиперболических многогранников, допускающих как конечные, так и идеальные вершины? В [BeEr25] было показано, что наименьший объем в этом классе многогранников равен  $\frac{1}{4}v_{oct}$  и достигается на треугольной бипирамиде, имеющей две конечные и три идеальные вершины.

Сравнивая объем антипризмы  $\mathcal{A}(4)$  и объем многогранника Лебелля  $\mathcal{L}(6)$ , можно заметить, что с точностью до шести знаков после запятой, оба объема равны 6, 023046. Более того, объемы  $\mathcal{A}(4)$  и  $\mathcal{L}(6)$ , вычисленные с точностью до 50 знаков после запятой, снова совпадают и равны

$$6, 02304602004718882363418931461679711549802902472249 \dots$$

Верно ли, что имеет место равенство  $vol(\mathcal{A}(4)) = vol(\mathcal{L}(6))$ ? Поскольку оба объема выражаются через функцию Лобачевского, этот вопрос сводится к вопросу о том, имеет ли место следующее равенство:

$$(12) \quad 3 \left[ 2\Lambda(\theta_6) + \Lambda\left(\theta_6 + \frac{\pi}{6}\right) + \Lambda\left(\theta_6 - \frac{\pi}{6}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta_6\right) \right] = 8\Lambda\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 8\Lambda\left(\frac{\pi}{8}\right),$$

где  $\theta_6 = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ? Заметим, что многогранник, составленный из двух идеальных прямоугольных антипризм  $\mathcal{A}(4)$  известен как кубоктаэдр  $Q$ , см., например, рис. 3 в работе [BeEr25]. Формула для  $vol(Q)$  была получена в [Ad26, Lem. 5.5] разбиением  $Q$  на идеальные тетраэдры. Из нее следует, что

$$(13) \quad 4\Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) + 8\Lambda(\phi) - 3\Lambda(2\phi) + \frac{1}{2}\Lambda(4\phi) = 8\Lambda\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 8\Lambda\left(\frac{\pi}{8}\right),$$

где  $\phi = \arctan(\sqrt{2})$ .

**Вопрос 6.4.** Имеет ли место равенство (12)? В частности, следует ли оно из (13)?

В заключение авторы выражают признательность рецензенту за ценные замечания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [АВВЕ] С. А. Александров, Н. В. Богачев, А. Ю. Веснин, А. А. Егоров, *Об объемах гиперболических прямоугольных многогранников*, Матем. сб. **214:2** (2023), 3–22. [8](#), [13](#)
- [Ан1] Е. М. Андреев, *О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского*. Матем. сб. **83:2** (1970), 256–260. [4](#)
- [Ан2] Е. М. Андреев, *О выпуклых многогранниках в пространстве Лобачевского*. Матем. сб. **81:3** (1970), 456–478. [4](#)
- [БВИ] А. А. Борисенко, А. Ю. Веснин, Н. М. Ивочкина, *К столетию со дня рождения Алексея Васильевича Погорелова*, Успехи матем. наук **74:6** (2019), 171–193. [9](#)
- [Ве87] А. Ю. Веснин, *Трехмерные гиперболические многообразия типа Лебелля*, Сибирский матем. журнал **28:5** (1987), 50–53. [9](#)
- [Ве98] А. Ю. Веснин, *Объемы трехмерных гиперболических многообразий Лебелля*, Матем. заметки **64:1** (1998), 17–23. [10](#)
- [Ве17] А. Ю. Веснин, *Прямоугольные многогранники и трехмерные гиперболические многообразия*, Успехи матем. наук, **72:2** (2017), 147–190. [2](#)
- [ВеЕг24] А. Ю. Веснин, А. А. Егоров, *Верхние оценки объемов обобщенных гиперболических многогранников и зацеплений*, Сиб. матем. журн. **65:3** (2024), 534–551. [3](#), [4](#), [20](#)
- [ВеЕг25] А. Ю. Веснин, А. А. Егоров, *Прямоугольная группа Коксетера минимального кообъема в трехмерном гиперболическом пространстве*, Сиб. матем. журн. **66:6** (2025), 1037–1056. [22](#)
- [ВеРе] А. Ю. Веснин, Д. Реповш, *Двусторонние оценки объемов прямоугольных гиперболических многогранников*, Матем. заметки **89:1** (2011), 12–18. [12](#), [13](#)
- [Пог] А. В. Погорелов, *О правильном разбиении пространства Лобачевского*, Матем. заметки, **1:1** (1967), 3–8. [9](#)
- [Пра] В. В. Прасолов. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*. Москва. Издательство МЦНМО. 2004. [3](#)
- [АСМ] С. Adams, A. Calderon, N. Mayer, *Generalized bipyramids and hyperbolic volumes of alternating  $k$ -uniform tiling links*, Topology and its Applications **271** (2020), 107045. [3](#)
- [Ad26] С. Adams, F. Gomez-Raz, J. Kang, L. Krause, G. Li, C. Marple, Z. Tan, *Hyperbolic handlebody complements in 3-manifolds*, Topology and its Applications **377** (2026), 109642. [22](#)
- [АВС] D. V. Alekseevskij, E. B. Vinberg, A. S. Solodovnikov, *Geometry of spaces of constant curvature*, in: Geometry II, Encyclopedia Math. Sci. **29**, Springer, Berlin (1993), 1–138. [4](#)
- [At09] C. Atkinson, *Volume estimates for equiangular hyperbolic Coxeter polyhedra*, Algebraic & Geometric Topology **9** (2009), 1225–1254. [2](#), [4](#), [7](#), [13](#)
- [Bel21] G. Belletti, *The maximum volume of hyperbolic polyhedra*, Trans. Amer. Math. Soc. **374(2)** (2021), 1125–1153. [1](#)
- [Bri] G. Brinkmann, S. Greenberg, C. Greenhill, B. D. McKay, R. Thomas, P. Wollan, *Generation of simple quadrangulations of the sphere*, Discrete Mathematics, **305** (2005), 33–54. [5](#), [6](#)
- [BoDo] N. Bogachev, S. Douba, *Geometric and arithmetic properties of Loebell polyhedra*, Algebr. Geom. Topol., **25:4** (2025), 2281 [10](#)
- [Bu] S. D. Burton, *The spectra of volume and determinant densities of links*, Topology and its Applications **211** (2016), 38–55. [3](#)
- [BuMeVe] P. Buser, A. Mednykh, A. Vesnin, *Lambert cubes and Löbell polyhedron revised*, Advances in Geometry, **12** (2012), 525–548. [10](#)
- [СКР] A. Champanerkar, I. Kofman, J. S. Purcell, *Geometrically and diagrammatically maximal knots*, Journal of the London Mathematical Society **94:3** (2016), 883–908. [2](#)

- [CGV] F. Costantino, F. Gueritaud, R. van der Veen, *On the volume conjecture for polyhedra*, *Geom Dedicata*, **179** (2015), 385–409. [1](#)
- [EgVe20-1] A. Egorov, A. Vesnin, *On correlation of hyperbolic volumes of fullerenes with their properties*, *Comput. Math. Biophys.* **8** (2020), 150–167. [9](#)
- [EgVe20-2] A. Egorov, A. Vesnin, *Volume estimates for right-angled hyperbolic polyhedra*, *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste* **52** (2020), 565–576. [8](#), [13](#)
- [FG11] D. Futer, F. Gueritaud, *From angled triangulations to hyperbolic structures*, *Interactions between hyperbolic geometry, quantum topology and number theory*, *Contemp. Math.*, **541**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, 159–182. [15](#)
- [HaMu81] U. Haagerup, H. Munkholm, *Simplices of maximal volume in hyperbolic  $n$ -space*, *Acta Math.* **147** (1981), 1–11. [1](#)
- [In08] T. Inoue, *Organizing volumes of right-angled hyperbolic polyhedra*, *Algebraic & Geometric Topology*, **8** (2008), 1523–1565. [9](#), [10](#), [11](#)
- [In22] T. Inoue, *Exploring the list of smallest right-angled hyperbolic polyhedra*, *Experimental Math.*, **31:1** (2022), 165–183. [2](#), [11](#)
- [Kw] A. Kwon, *Fully augmented links in the thickened torus*, *Algebraic & Geometric Topology* **25:3** (2025), 1411–1432. [3](#)
- [KwTh] A. Kwon, Y.H. Tham, *On the volume density spectrum of fully augmented links*, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* **34:05** (2025), 2550011. [3](#), [20](#), [21](#)
- [La] M. Lackenby, *The volume of hyperbolic alternating link complements. With an appendix by I. Agol and D. Thurston*, *Proc. London Math. Soc.* **88** (2004), 204–224. [3](#), [4](#), [20](#)
- [Mil82] J. Milnor, *Hyperbolic geometry: the first 150 years*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **6** (1982), 9–24. [1](#), [6](#)
- [Pur] J.S. Purcell, *An introduction to fully augmented links*, *Interactions between hyperbolic geometry, quantum topology and number theory*, *Contemp. Math.* **541**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, 205–220. [3](#), [4](#), [20](#)
- [RHD] R. K. W. Roeder, J. H. Hubbard, W. D. Dunbar, *Andreev’s theorem on hyperbolic polyhedra*, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **57** (2007) 825–882. [4](#)
- [Thu] W. P. Thurston, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*, *Collected Works of William P. Thurston with Commentary*, Vol. IV, With a preface by S.P. Kerckhoff, Edited by B. Farb, D. Gabai and S. P. Kerckhoff, American Mathematical Society, Providence, RI, 2022. [6](#)
- [Ve] A. Vesnin, *Volumes and Normalized Volumes of Right-Angled Hyperbolic Polyhedra*, *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia* **57** (2010), 159–169. [2](#)
- [VeEg] A. Vesnin, A. Egorov, *Ideal right-angled polyhedra in Lobachevsky space*, *Chebyshevskii Sbornik* **21:2** (2020), 65–83. [2](#), [7](#), [8](#)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С.Л. СОБОЛЕВА СО РАН, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
*Email address:* [vesnin@math.nsc.ru](mailto:vesnin@math.nsc.ru)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С.Л. СОБОЛЕВА СО РАН, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
*Email address:* [a.egorov2@g.nsu.ru](mailto:a.egorov2@g.nsu.ru)