*Владикавказский математический журнал*
*, Том , Выпуск , С. 1–123*

**УДК** 512.54
**DOI** 10.46698/i7746-0636-8062-u

# О НЕПРИВОДИМЫХ КОВРАХ АДДИТИВНЫХ ПОДГРУПП ТИПА $F_4$[#]

**А. О. Лихачева**[1]
[1] Научно-образовательный математический центр СОГУ,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46;
[2] Институт математики и фундаментальной информатики СФУ,
Россия, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: likhacheva.alyona@mail.ru

**Аннотация.** В статье описаны неприводимые ковры $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r : \ r \in \Phi\}$ типа $F_4$ над полем $K$, все аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$ которых являются $R$-модулями, где $K$ — алгебраическое расширения поля $R$. Интересным фактом оказалось то, что только в характеристике 2 появляются ковры, которые параметризуются парой аддитивных подгрупп. С точностью до сопряжения диагональным элементом из соответствующей группы Шевалле эта пара аддитивных подгрупп становится полями, но они могут быть различными. Кроме того, в работе установлено, что такие ковры $\mathfrak{A}$ являются замкнутыми. Ранее В. М. Левчук описал неприводимые ковры лиева типа ранга больше 1 над полем $K$, хотя бы одна аддитивная подгруппа которых является $R$-модулем, где $K$ — алгебраическое расширение поля $R$, в предположении, что характеристика поля $K$ отличная от 0 и 2 для типов $B_l$, $C_l$ и $F_4$, а для типа $G_2$ отлична от 0, 2 и 3 [1]. Для данных характеристик с точностью до сопряжения диагональным элементом все аддитивные подгруппы таких ковров совпадают с одним промежуточным подполем между $R$ и $K$.

**Ключевые слова:** группа Шевалле, ковер аддитивных подгрупп, ковровая подгруппа, система корней.

**AMS Subject Classification:** 20G15.

**Образец цитирования:** *Лихачева А. О.* О неприводимых коврах аддитивных подгрупп типа $F_4$ // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, вып. 2.—С. 117–123. DOI: 10.46698/i7746-0636-8062-u.

## 1. Введение

Пусть $\Phi$ — приведенная неразложимая система корней ранга $l$, $\Phi(K)$ — группа Шевалле типа $\Phi$ над полем $K$. Группа $\Phi(K)$ порождается своими корневыми подгруппами

$$x_r(K) = \{x_r(t) : \ t \in K\}, \quad r \in \Phi.$$

Подгруппы $x_r(K)$ абелевы и для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in K$ справедливы соотношения

$$x_r(t)\, x_r(u) = x_r(t+u).$$

Мы следуем определениям В. М. Левчука из [2]. Назовем *ковром типа* $\Phi$ *ранга* $l$ *над* $K$ всякий набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r : \ r \in \Phi\}$ кольца $K$ с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \quad r, s, ir+js \in \Phi, \ i, j > 0,$$

[#]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-21-00733.

где $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i : \ a \in \mathfrak{A}_r\}$, а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$\big[x_s(u), x_r(t)\big] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}\big(C_{ij,rs}(-t)^i u^j\big), \quad r, s, ir+js \in \Phi.$$

Всякий ковер $\mathfrak{A}$ типа $\Phi$ над $K$ определяет *ковровую* подгруппу

$$\Phi(\mathfrak{A}) = \big\langle x_r(\mathfrak{A}_r) : \ r \in \Phi \big\rangle$$

группы Шевалле $\Phi(K)$, где $\langle M \rangle$ — подгруппа, порожденная подмножеством $M$ группы $\Phi(K)$. Ковер $\mathfrak{A}$ называется *замкнутым*, если его ковровая подгруппа $\Phi(\mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, т. е.

$$\Phi(\mathfrak{A}) \cap x_r(K) = x_r(\mathfrak{A}_r), \quad r \in \Phi.$$

Назовем ковер $\mathfrak{A}$ *неприводимым*, если все $\mathfrak{A}_r$ ненулевые. Примеры незамкнутых неприводимых ковров типа $A_l$ (матричных ковров) указаны в [3], а в [4] указаны примеры таких ковров любого лиева типа над коммутативными кольцами.

Основным результатом статьи является

**Теорема.** *Пусть $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r : \ r \in \Phi\}$ — неприводимый ковер типа $F_4$ над полем $K$, все аддитивные подгруппы которого являются $R$-модулями, где $K$ — алгебраическое расширения поля $R$. Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом либо $\mathfrak{A}_r = P$ при всех $r \in \Phi$, для некоторого подполя $P$ поля $K$, либо* $\operatorname{char} K = 2$ *и*

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \text{если } r \text{ — короткий корень,} \\ Q, & \text{если } r \text{ — длинный корень,} \end{cases}$$

*для двух различных подполей $P$ и $Q$ поля $K$, удовлетворяющих включениям*

$$P^2 \subseteq Q \subseteq P.$$

*Кроме того, ковер $\mathfrak{A}$ является замкнутым.*

При $p > 2$ утверждение теоремы установлено в [1], и в этом случае ковер $\mathfrak{A}$ параметризуется только одним полем.

## 2. Предварительные результаты

Наряду с группой $\Phi(K)$ рассматривают *расширенную* группу Шевалле $\widehat{\Phi}(K)$, которая является расширением группы $\Phi(K)$ при помощи всех диагональных элементов $h(\chi)$, где $\chi$ — $K$-характер целочисленной решетки корней $\mathbb{Z}\Phi$, т. е. гомоморфизм аддитивной группы $\mathbb{Z}\Phi$ в мультипликативную группу $K^*$ поля $K$ [5, §7.1]. Любой $K$-характер $\chi$ однозначно задается значениями на фундаментальных корнях и для любых $r \in \Phi$, $t \in K$,

$$h(\chi) x_r(t) h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t).$$

Отметим, что в нашем случае, при $\Phi$ типа $F_4$, группа $\Phi(K)$ совпадает с расширенной группой Шевалле $\widehat{\Phi}(K)$.

Для доказательства основной теоремы нам необходимы следующие леммы.

**Лемма 1** [6]**.** *Сопрягая диагональным элементом $h(\chi)$ ковровую подгруппу $\Phi(\mathfrak{A})$, получим ковровую подгруппу*

$$h(\chi)\Phi(\mathfrak{A})h(\chi)^{-1} = \Phi(\mathfrak{A}'),$$

*определяемую ковром*

$$\mathfrak{A}' = \{\mathfrak{A}'_r :\ r \in \Phi\},$$

*где $\mathfrak{A}'_r = \chi(r)\mathfrak{A}_r$.*

**Лемма 2** [5]**.** *Любой положительный корень $r \in \Phi^+$ может быть представлен в виде суммы фундаментальных корней $r = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$ таким образом, что $r = p_2 + p_2 + \ldots + p_s$ является корнем для всех $s \leqslant k$.*

Следующая лемма является частным случаем следствия 3.2 из [1] для системы корней типа $A_2$.

**Лемма 3.** *Пусть $\{a, b\}$ — фундаментальная система системы корней $\Phi$ типа $A_2$, $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r :\ r \in \Phi\}$ — неприводимый ковер над полем $K$, причем все $\mathfrak{A}_r$ являются $R$-модулями над полем $R$, где $K$ — алгебраическое расширение поля $R$ и $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$. Тогда $\mathfrak{A}_r = P,\ r \in \Phi$, для некоторого подполя $P$ поля $K$.*

Хорошо известна (см., например, [7])

**Лемма 4.** *Пусть $K$ — алгебраическое расширение поля $R$ и подкольцо $A$ поля $K$ является $R$-модулем. Тогда $A$ — поле, причем $R \subseteq A \subseteq K$.*

Из теоремы 3.1 [8] вытекает следующий результат в случае $\Phi$ типа $F_4$.

**Лемма 5.** *Пусть $K$ — алгебраическое расширение несовершенного поля $R$ характеристики 2, и $M$ — группа, лежащая между группами Шевелле $\Phi(R)$ и $\Phi(K)$ типа $\Phi = F_4$. Тогда $M$ является ковровой подгруппой $\Phi(\mathfrak{A})$. Ковер $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r :\ r \in \Phi\}$ является замкнутым, и*

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \text{если } r \text{ — короткий корень,} \\ Q, & \text{если } r \text{ — длинный корень,} \end{cases}$$

*для некоторых подполей $P$ и $Q$ поля $K$ с условиями*

$$R, P^2 \subseteq Q \subseteq P \subseteq K.$$

## 3. Доказательство теоремы

Далее $\Pi = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ — фундаментальная система корней типа $F_4$, причем $r_1$, $r_2$ — короткие корни, $r_3$, $r_4$ — длинные корни и сумма $\{r_2 + r_3\}$ также является корнем (см. рис. 1).

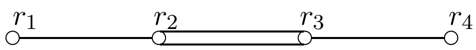


**Рис. 1.**

Согласно определению фундаментальной системы корней, $r = \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 + \delta r_4$, где все $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ либо неотрицательные, либо неположительные, и $r \in \Phi^+$. По определению, $h(r) = \alpha + \beta + \gamma + \delta$ — высота корня. Все фундаментальные корни, очевидно, имеют высоту 1.

В системе корней типа $F_4$ имеются только две подсистемы корней ранга 2 — это подсистемы $A_2$ и $B_2$ (см. рис. 2, 3).

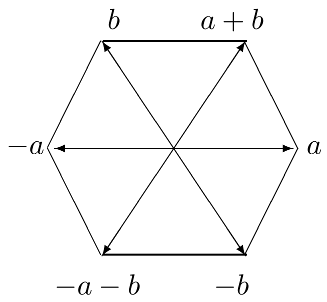


**Рис. 2**

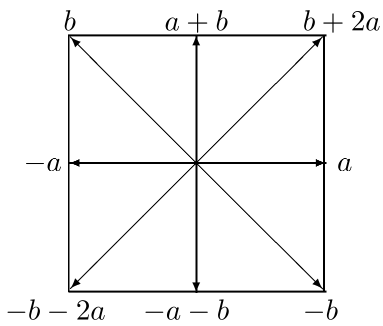


**Рис. 3**

Коммутаторная формула Шевалле для типа $A_2$ имеет вид

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{(a+b)}(\pm tu).$$

Данная формула дает условие ковровости

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}. \tag{1}$$

Для типа $B_2$ справедливы коммутаторные формулы Шевалле

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{(a+b)}(\pm tu)x_{(2a+b)}(\pm t^2u),$$

$$[x_a(t), x_{a+b}(u)] = x_{(2a+b)}(\pm 2tu),$$

из которых получаем следующие три условия ковровости:

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}, \tag{2}$$

$$\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}, \tag{3}$$

$$2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}. \tag{4}$$

По лемме 1 с точностью до сопряжения диагональным элементом, можно считать, что $1 \in \mathfrak{A}_r, r \in \Pi$. Для любых двух неколлинеарных корней $r, s$ через $\Phi(r, s)$ обозначим подсистему корней, порожденную этими корнями. В силу леммы 3 $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Phi(r_1, r_2) \cup \Phi(r_3, r_4)$ (см. рис. 1). В частности, $1 \in \mathfrak{A}_r$ при $h(r) = 1$. Индукцией по высоте корня $h(r)$ покажем, что $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Phi^+$.

Согласно лемме 2, любой положительный корень $r \in \Phi^+$ может быть представлен в виде суммы фундаментальных корней $r = p_1 + \ldots + p_k + p_{k+1}$, где сумма $p_1 + \ldots + p_k$ является корнем. Обозначим ее через $s$, а фундаментальный корень $p_{k+1}$ через $p$. Высота $r$ больше или равняется 2. По предположению индукции $1 \in \mathfrak{A}_s \cap \mathfrak{A}_p$.

Для системы корней типа $F_4$ становятся возможными только следующие три случая, когда сумма корней $s$ и $p$ является корнем:

1) $\{s, p\}$ — фундаментальная система типа $A_2$;

2) $\{s, p\}$ — фундаментальная система корней типа $B_2$;

3) $|s| = |p| = 1$, $|s + p| = \sqrt{2}$.

В случае 1), 2) из условий ковровости (1) и, соответственно, (2) получаем включение $\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_p \subseteq \mathfrak{A}_r$, следовательно, $1 \in \mathfrak{A}_r$. В случае 3) из условия ковровости (3) следует включение $\mathfrak{A}_s^2\mathfrak{A}_{p-s} \subseteq \mathfrak{A}_{2s+(p-s)} = \mathfrak{A}_r$, следовательно $1 \in \mathfrak{A}_r$. Аналогично индукцией по модулю высоты корня получаем, что $1 \in \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi^-$.

Итак, мы установили включения $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Phi$. Поскольку группа Вейля действует транзитивно на корнях одинаковой длины, а любой фундаментальный корень лежит в подсистеме корней типа $A_2$, то в силу леммы 3 каждая аддитивная подгруппа $\mathfrak{A}_r$ является полем и, более того, $\mathfrak{A}_{-r} = \mathfrak{A}_r$. Покажем, что $\mathfrak{A}_r = P$ для всех коротких корней и $\mathfrak{A}_r = Q$ для всех длинных корней, причем мы не исключаем совпадения полей $P$ и $Q$.

По лемме 2 любой положительный корень $r \in \Phi^+$ представим в виде $r = s + p$, где $p$ — простой корень и $h(p) = 1$, $h(s) = h(r) - 1$. Возможны три случая:

1) $\{s, p\}$ — фундаментальная система типа $A_2$;

2) $\{s, p\}$ — фундаментальная система типа $B_2$;

3) $s, p$ — короткие корни и они порождают подсистему корней типа $B_2$.

В каждом из этих трех случаев по отдельности индукцией по высоте корней покажем, что $\mathfrak{A}_r$ совпадает с $P$ или $Q$ в зависимости от длины корня $r$.

В случае 1) сразу получаем равенство $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_p$ в силу индуктивного предположения и леммы 3, где $\mathfrak{A}_p$ совпадает с $P$ или $Q$.

В случае 2) корень $p$ может быть как коротким, так и длинным. Пусть $p$ — короткий корень. Тогда из условий ковровости $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_s \subseteq \mathfrak{A}_r$ и $\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_{-s} \subseteq \mathfrak{A}_p$ получаем включения $P \subseteq \mathfrak{A}_r$ и соответственно $\mathfrak{A}_r \subseteq P$. Отсюда $\mathfrak{A}_r = P$. Случай, когда $p$ — длинный корень, рассматривается аналогично, нужно только поменять местами корни $p$ и $s$.

В случае 3) разность $s - p$ является корнем, $p$ — короткий корень и $\{p, s - p\}$ — фундаментальная система типа $B_2$. Поэтому в силу индуктивного предположения $\mathfrak{A}_p = P$, а $\mathfrak{A}_{s-p} = Q$. Сейчас из условий ковровости $\mathfrak{A}_p^2\mathfrak{A}_{s-p} \subseteq \mathfrak{A}_r$ и $\mathfrak{A}_{-p}^2\mathfrak{A}_r \subseteq \mathfrak{A}_{s-p}$ получаем включения $Q \subseteq \mathfrak{A}_r$ и соответственно $\mathfrak{A}_r \subseteq Q$. Отсюда $\mathfrak{A}_r = Q$.

Таким образом, мы установили, что $\mathfrak{A}$ совпадает с $P$ или $Q$ в зависимости от длины корня $r$. Если $\mathrm{char} \neq 2$, то ковер определяется одним полем и, следовательно, определяемые им ковровые подгруппы совпадают с группой Шевалле, и поэтому он является замкнутым. Действительно, из условий ковровости $\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$ и $2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$ (условия (3) и (4) соответственно) вытекают включения $PQ \subseteq P$ и соответственно $2PP \subseteq Q$. Так как $P$ и $Q$ поля $\mathrm{char} \neq 2$, то из последних двух включений, очевидно, следует равенство $P = Q$. Если $\mathrm{char} = 2$, то из условия ковровости $\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$ получаются только включения $P^2 \subseteq Q \subseteq P$. Отсюда, ковровая подгруппа $\Phi(\mathfrak{A})$ является промежуточной между группами Шевалле $\Phi(Q)$ и $\Phi(P)$ над полями $Q$ и соответственно $P$. Поэтому в силу леммы 5 ковер является замкнутым. Теорема доказана.

## Литература


1. *Левчук В. М.* О порождающих множествах корневых элементов групп Шевалле над полем // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 5.—С. 504–517.
2. *Левчук В. М.* Параболические подгруппы некоторых ABA-групп // Матем. заметки.—1982.—Т. 31, № 4.—С. 509–525.
3. *Койбаев В. А.* Элементарные сети в линейных группах // Тр. ИММ УрО РАН.—2011.—Т. 7, № 4.—С. 134–141.
4. *Куклина С. К., Лихачева А. О., Нужин Я. Н.* О замкнутости ковров лиева типа над коммутативными кольцами // Тр. ИММ УрО РАН.—2015.—Т. 21, № 3.—С. 192–196.
5. *Carter R. W.* Finite Groups of Lie type.—London: Wiley and Sons, 1985.—556 p.
6. *Койбаев В. А., Куклина С. К., Лихачева А. О., Нужин Я. Н.* Подгруппы групп Шевалле над локально конечным полем, определяемые набором аддитивных подгрупп // Матем. заметки.—2017.—Т. 102, № 6.—С. 857–865. DOI: 10.4213/mzm11038.

7. *Койбаев В. А., Нужин Я. Н.* $k$-Инвариантные сети над алгебраическим расширением поля $k$ // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 58, № 1.—С. 143–147. DOI: 10.17377/smzh.2017.58.114.
8. *Нужин Я. Н.* Группы, лежащие между группами Шевалле типа $B_l$, $C_l$, $F_4$, $G_2$ над несовершенными полями характеристики 2 и 3 // Сиб. мат. журн.—2013.—Т. 54, № 1.—С. 157–162.

*Статья поступила 3 марта 2022 г.*

Лихачева Алена Олеговна
Научно-образовательный математический центр СОГУ,
*математик-исследователь*
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46;

Институт математики и фундаментальной информатики СФУ,
*ассистент кафедры алгебры и математической логики*
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: likhacheva.alyona@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-7782-8322

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*, Volume , Issue , P. 117–123*

# ON IRREDUCIBLE CARPETS OF ADDITIVE SUBGROUPS OF TYPE $F_4$

Likhacheva, A. O.[1,2]

[1] North Caukasus Center for Mathematical Research NOSU,
46 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia;
[2] School of Mathematics and Computer Science SibFU,
79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk 660041, Russia
E-mail: likhacheva.alyona@mail.ru

**Abstract.** The article describes irreducible carpets $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r : r \in \Phi\}$ of type $F_4$ over the field $K$, all of whose additive subgroups $\mathfrak{A}_r$ are $R$-modules, where $K$ is an algebraic extension of the field $R$. An interesting fact is that carpets which are parametrized by a pair of additive subgroups appear only in characteristic 2. Up to conjugation by a diagonal element from the corresponding Chevalley group, this pair of additive subgroups becomes fields, but they may be different. In addition, we establish that such carpets $\mathfrak{A}$ are closed. Previously, V. M. Levchuk described irreducible Lie type carpets of rank greater than 1 over the field $K$, at least one of whose additive subgroups is an $R$-module, where $K$ is an algebraic extension of the field $R$, under the assumption that the characteristic of the field $K$ is different from 0 and 2 for types $B_l$, $C_l$, $F_4$, while for type $G_2$ it is different from 0, 2, and 3 [1]. For these characteristics, up to conjugation by a diagonal element, all additive subgroups of such carpets coincide with one intermediate subfield between $R$ and $K$.

**Keywords:** Chevalley group, carpet of additive subgroups, carpet subgroup, commutative ring.

**AMS Subject Classification:** 20G15.

**For citation:** *Likhacheva, A. O.* On Irreducible Carpets of Additive Subgroups of Type $F_4$, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 2, pp. 117–123. (in Russian). DOI: 10.46698/i7746-0636-8062-u.

## References

1. *Levchuk, V. M.* Generating Sets of Root Elements of Chevalley Groups Over a Field, *Algebra Logika*, 1983, vol. 22, no. 5, pp. 504–517 (in Russian).
2. *Levchuk V. M.* Parabolic Subgroups of Certain ABA-groups, *Mathematical Notes*, 1982, vol. 31, no. 4, pp. 259–267. DOI: 10.1007/BF01138934.
3. *Koibaev, V. A.* Elementary Nets in Linear Groups, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 134–141 (in Russian).

4. *Kuklina, S. K., Likhacheva, A. O. and Nuzhin, Ya. N.* On Closedness of Carpets of Lie Type Over Commutative Rings, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 3, pp. 192–196 (in Russian).
5. *Carter, R. W. Finite Groups of Lie Type*, London, Wiley and Sons, 1985, 556 p.
6. *Koibaev, V. A., Kuklina, S. K., Likhacheva, A. O. and Nuzhin, Ya. N.* Subgroups, of Chevalley Groups over a Locally Finite Field, Defined by a Family of Additive Subgroups, *Mathematical Notes*, 2017, vol. 102, no. 6, pp. 792–798. DOI: 10.1134/S0001434617110190.
7. *Koibaev, V. A. and Nuzhin, Ya. N.* $k$-Invariant Nets Over an Algebraic Extension of the Field $k$, *Siberian Mathematical Journal*, 2017, vol. 58, no. 1, pp. 109–112. DOI: 10.1134/S0037446617010141.
8. *Nuzhin, Ya. N.* Intermediate Subgroups in the Chevalley Groups of Type $B_l$, $C_l$, $F_4$, and $G_2$ over the nonperfect fields of characteristic 2 and 3, *Siberian Mathematical Journal*, 2013, vol. 54, no. 1, pp. 119–123. DOI: 10.1134/S0037446613010151.

*Received March 3, 2022*

Alena O. Likhacheva
North Caukasus Center for Mathematical Research NOSU,
*Research Mathematician*
46 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia;

School of Mathematics and Computer Science SibFU,
*Assistant of the Department of Algebra and Mathematical Logic*
79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk 660041, Russia
E-mail: `likhacheva.alyona@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0001-7782-8322