Владикавказский математический журнал
, Том , Выпуск , С. 1–135

УДК 517.9
DOI 10.46698/b9762-8415-3252-n

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ПО НЕТОЧНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ НА КОМПАКТЕ

Е. О. Сивкова[1,2]

[1] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;
[2] НИУ «Московский энергетический институт»,
Россия, 111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14

E-mail: `e.o.sivkova@mail.ru`

Аннотация. Для однопараметрического семейства линейных непрерывных операторов $T(t)\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, $0 \leqslant t < \infty$, рассматривается задача об оптимальном восстановлении значений оператора $T(\tau)$ на всем пространстве по приближенной информации о значениях операторов $T(t)$, где t пробегает некоторый компакт $K \subset \mathbb{R}_+$ и $\tau \notin K$. Найдено семейство оптимальных методов восстановления значений оператора $T(\tau)$. Каждый из этих методов использует приближенные измерения не более, чем в двух точках из K и линейно зависит от этих измерений. В качестве следствия найдены семейства оптимальных методов восстановления решения уравнения теплопроводности в данный момент времени по неточным его измерениям в другие промежутки времени и решения задачи Дирихле для полупространства на гиперплоскости по неточным его измерениям на других гиперплоскостях. Задача оптимального восстановления значений оператора $T(\tau)$ по указанной информации сводится, в основной своей части, к нахождению значения некоторой экстремальной задачи на максимум с континуумом ограничений типа неравенств, т. е. к нахождению точной верхней грани максимизируемого функционала при данных ограничениях. Эта, довольно сложно устроенная задача, редуцируется, в свою очередь, к бесконечномерной задаче линейного программирования на векторном пространстве всех конечных вещественных мер на σ-алгебре измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^d$. Данную задачу уже удается решить, используя некоторое обобщение теоремы Каруша — Куна — Таккера, и ее значение совпадает со значением исходной задачи.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, оптимальный метод, экстремальная задача, преобразование Фурье, уравнение теплопроводности, задача Дирихле.

AMS Subject Classification: 34K29, 65K10, 90C25.

Образец цитирования: *Сивкова Е. О.* Оптимальное восстановление семейства операторов по неточным измерениям на компакте // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, вып. 2.—С. 124–135. DOI: 10.46698/b9762-8415-3252-n.

1. Введение

В работе рассматривается одно специальное однопараметрическое семейство линейных непрерывных операторов из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и для него ставится задача об оптимальном восстановлении оператора при данном значении параметра по приближенной информации об операторах с другими значениями параметров, пробегающих некоторый компакт. Одной из важных мотиваций такой постановки является задача о восстановлении решения эволюционного уравнения в данный момент времени по приближенно

известным его значениям в другие моменты. Для рассматриваемого семейства найдены явные выражения для оптимальных методов восстановления. Эти методы линейны и используют не всю имеющуюся информацию, а лишь информацию о не более двух измерениях, причем предварительно ее «сглаживая». В качестве непосредственных следствий доказанного результат получены оптимальные методы восстановления решения уравнения теплопроводности и решения задачи Дирихле для полупространства.

2. Формулировка основного результата и его доказательство

Удобно сформулировать задачу оптимального восстановления сначала для абстрактного однопараметрического семейства операторов. Пусть X — вещественное или комплексное нормированное пространство с элементами $f, g, \ldots$, и пусть $T(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, — семейство линейных непрерывных операторов, отображающих X в себя. Мы ставим следующую задачу: восстановить (по возможности, наилучшим образом) значения оператора $T(\tau)$ на X по приближенным значениям операторов $T(t)$, где t принадлежит некоторому компакту K на полупрямой $\mathbb{R}_+$ и $\tau \notin K$.

Точная постановка такова. Пусть о каждом элементе $f \in X$ нам известны отображение $g\colon K \to X$, сопоставляющее $t \in K$ элемент $g_t \in X$, и положительная функция $\delta\colon K \to \mathbb{R}$ такие, что

$$\|T(t)f - g_t\|_X \leqslant \delta(t) \quad (\forall\, t \in K),$$

т. е. для каждого $t \in K$ мы имеем возможность «измерить» с точностью до $\delta(t)$ значение оператора $T(t)$ на некотором элементе (который, вообще говоря, нам неизвестен).

По этой информации мы хотим восстановить значения оператора $T(\tau)$ на X.

Обозначим через $G(K, X)$ множество всех отображений $g\colon K \to X$. Под методом восстановления понимаем любое отображение $\varphi\colon G(K, X) \to X$. Погрешность этого метода определим по формуле

$$e(T(\tau), K, \delta(\cdot), \varphi) = \sup_{f \in X} \sup_{\substack{g \in G(K, X), \\ \|T(t)f - g_t\|_X \leqslant \delta(t),\ t \in K}} \big\|T(\tau)f - \varphi(g)\big\|_X.$$

Нас интересует величина

$$E(T(\tau), K, \delta(\cdot)) = \inf_{\varphi} e\big(T(\tau), K, \delta(\cdot), \varphi\big),$$

где нижняя грань берется по всем методам $\varphi\colon G(K, X) \to X$, которую называем *погрешностью оптимального восстановления* и те методы $\widehat{\varphi}$, на которых нижняя грань достигается, т. е. такие методы, что

$$E\big(T(\tau), K, \delta(\cdot)\big) = e\big(T(\tau), K, \delta(\cdot), \widehat{\varphi}\big).$$

Эти методы будем называть *оптимальными методами восстановления.*

Такая общая постановка мотивирована, в основном, задачей о восстановлении решения эволюционного уравнения (определяемое однозначно начальным условием, которое, вообще говоря, нам неизвестно — элемент f в общей постановке) в фиксированный момент времени по приближенно известным его значениям в другие моменты.

В данной работе мы рассматриваем специальное семейство операторов и для него до конца решаем поставленную задачу, т. е. находим погрешность оптимального восстановления и явные выражения для оптимальных методов. В качестве следствий получим

оптимальные методы восстановления решений уравнения теплопроводности и задачи Дирихле.

Пусть $a(\cdot)$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}^d$ такая, что $a(0) = 0$, $a(\xi) \geqslant c|\xi|^\alpha$, для некоторых $c > 0$, $\alpha > 0$ и достаточно больших по модулю ξ, $a(\xi) \to +\infty$, при $|\xi| \to +\infty$ и $a(\xi_1) \leqslant a(\xi_2)$, если $|\xi_1| \leqslant |\xi_2|$, где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^d$.

Пусть F — преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Определим семейство операторов $T_a(t)\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, $t \geqslant 0$, действующих в образах Фурье по формулам

$$F\big[T_a(t)f(\cdot)\big](\xi) = e^{-ta(\xi)}F[f(\cdot)](\xi) \ \text{ для п. в. } \xi \in \mathbb{R}^d \quad (\forall\, f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)).$$

Далее будем иметь дело именно с этим семейством операторов. Это, очевидно, линейные операторы из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Непрерывность сразу следует из теоремы Планшереля. Действительно, для любого $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ имеем

$$\begin{aligned}\|T_a f(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} |T_a f(x)|^2\,dx = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \big|F[T_a f(\cdot)](\xi)\big|^2\,d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2ta(\xi)}\big|F[f(\cdot)](\xi)\big|^2\,d\xi \leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\big|F[f(\cdot)](\xi)\big|^2\,d\xi \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\,dx = \|f(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

В общих определениях выше, заменяя X на $L_2(\mathbb{R}^d)$, получаем для данного семейства определения метода восстановления, его погрешности, погрешности оптимального восстановления и оптимального метода.

Далее будем предполагать, что функция $\delta\colon K \to \mathbb{R}$ непрерывна.

Перед формулировкой основного результат приведем некоторые определения. На двумерной плоскости рассмотрим множество (см. рис. 1), представляющее собой алгебраическую сумму выпуклой оболочки множества в фигурных скобках и положительной полупрямой.

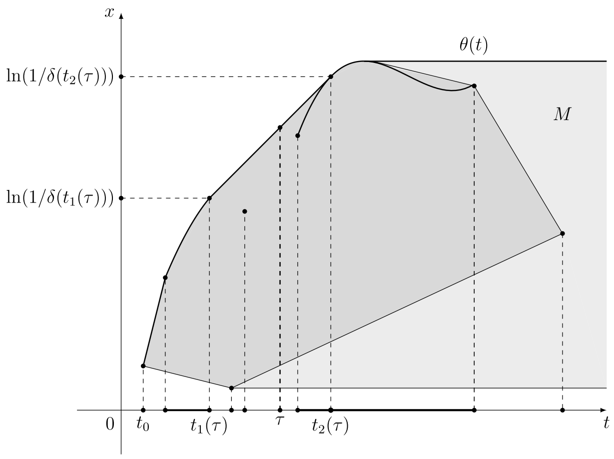

Рис. 1.

$$M = \operatorname{co}\big\{(t,\, \ln(1/\delta(t))),\ t \in K\big\} + (\mathbb{R}_+,\, 0),$$

Заметим, что M — выпуклое замкнутое множество. Действительно, множество в фигурных скобках компактно как непрерывный образ компакта, выпуклая оболочка данного компакта есть компакт, и поэтому M, как алгебраическая сумма двух выпуклых замкнутых множеств, одно из которых компактно, выпукло и замкнуто.

Определим функцию $\theta(\cdot)$ на $[t_0,+\infty)$, где $t_0=\min\{t\in\mathbb{R}:\, t\in K\}$, по правилу $\theta(t)=\max\{\,x\in\mathbb{R}:\,(t,x)\in M\,\}$. Ясно, что $\theta(\cdot)$ — вогнутая неубывающая функция.

Пусть $\tau\notin K$. Тогда существует интервал V, содержащий τ, который не принадлежит K. На этом интервале функция $\theta(\cdot)$, очевидно, совпадает с некоторой линейной функцией $p(t)=ct+d$, $t\in\mathbb{R}$, где $c\geqslant 0$. Обозначим через $t_1(\tau)=\max\{t\in K:\, t<\tau,\ \theta(t)=p(t)\}$ и $t_2(\tau)=\min\{t\in K:\, t>\tau,\ \theta(t)=p(t)\}$, считая, что $t_2(\tau)=+\infty$, если множество в фигурных скобках пусто.

Пусть $\tau\notin K$ и $t_2(\tau)<+\infty$. Положим

$$\lambda_1(\tau)=\frac{t_2(\tau)-\tau}{t_2(\tau)-t_1(\tau)}\left(\frac{\delta(t_1(\tau))}{\delta(t_2(\tau))}\right)^{-\frac{2(\tau-t_1(\tau))}{t_2(\tau)-t_1(\tau)}},$$

$$\lambda_2(\tau)=\frac{\tau-t_1(\tau)}{t_2(\tau)-t_1(\tau)}\left(\frac{\delta(t_1(\tau))}{\delta(t_2(\tau))}\right)^{\frac{2(t_2(\tau)-\tau)}{t_2(\tau)-t_1(\tau)}}.$$

Легко видеть, что это положительные числа и $\lambda_1(\tau)<1$. Определим еще множество

$$B(\tau)=\left\{\xi\in\mathbb{R}^d:\ a(\xi)\leqslant -\frac{\ln\lambda_1(\tau)}{2(\tau-t_1(\tau))}\right\}.$$

Теорема. *Справедливы следующие утверждения.*

1) *Для любого* $\tau\notin K$
$$E\big(T_a(\tau),K,\delta(\cdot)\big)=e^{-\theta(\tau)}.$$

2) *Если* $\tau\notin K$ *и* $t_2(\tau)<+\infty$, *то множество измеримых функций* $\omega(\cdot)$ *на* $\mathbb{R}^d$, *равных нулю вне* $B(\tau)$ *и таких, что*

$$\frac{|e^{-(\tau-t_1(\tau))a(\xi)}-\omega(\xi)e^{-(t_2(\tau)-t_1(\tau))a(\xi)}|^2}{\lambda_1(\tau)}+\frac{|\omega(\xi)|^2}{\lambda_2(\tau)}\leqslant 1 \tag{1}$$

для п. в. $\xi\in B(\tau)$, *непусто, и для каждой такой функции* $\omega(\cdot)$ *метод* $\widehat{\varphi}_\omega$, *определенный формулой*
$$\widehat{\varphi}_\omega(g(\cdot))(\cdot)=\big(R_1*g_{t_1(\tau)}\big)(\cdot)+\big(R_2*g_{t_2(\tau)}\big)(\cdot), \tag{2}$$
где $F[R_1(\cdot)](\xi)=e^{-(\tau-t_1(\tau))a(\xi)}-\omega(\xi)e^{-(t_2(\tau)-t_1(\tau))a(\xi)}$ *и* $F[R_2(\cdot)](\xi)=\omega(\xi)$ *для п. в.* $\xi\in B(\tau)$, *является оптимальным.*

3) *Если* $\tau\notin K$ *и* $t_2(\tau)=\infty$, *то метод* $\widehat{\varphi}$, *определенный формулой* $\widehat{\varphi}(g(\cdot))(\cdot)=(R*g_{t_1(\tau)})(\cdot)$, *где* $F[R(\cdot)](\xi)=e^{-(\tau-t_1(\tau))a(\xi)}$ *для п. в.* $\xi\in\mathbb{R}^d$, *является оптимальным.*

Сделаем два замечания по поводу сформулированной теоремы.

1. Формулы для оптимальных методов определены корректно. Действительно, функции $\omega(\cdot)$, очевидно, ограничены на ограниченном множестве $B(\tau)$ и равны нулю вне этого множества, и поэтому они принадлежат $L_2(\mathbb{R}^d)$. Следовательно, ядра R_1 и R_2 принадлежат $L_2(\mathbb{R}^d)$.

2. Оптимальные методы линейны и используют не более двух измерений, которые предварительно «сглаживают».

$\lhd$ Доказательство теоремы. Начнем с доказательства того, что для любого $\tau \notin K$ справедливо неравенство
$$E\big(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)\big) \geqslant e^{-\theta(\tau)}. \tag{3}$$

Пусть $\tau \notin K$. Рассмотрим следующую задачу:
$$\|T_a(\tau)f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \sup, \quad \|T_a(t)f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta(t), \quad t \in K, \ f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d), \tag{4}$$
и обозначим через $S(T_a(\tau), K, \delta(\cdot))$ ее значение, т. е. верхнюю грань максимизируемого функционала при данных ограничениях.

Покажем, что
$$E\big(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)\big) \geqslant S\big(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)\big). \tag{5}$$

Далее, для краткости записи, пишем f вместо $f(\cdot)$, и аналогично для других функций. Пусть функция f_0 допустима в задаче (4) (т. е. удовлетворяет ограничениям этой задачи). Тогда, очевидно, функция $-f_0$ также допустима, и мы имеем для любого метода $\varphi\colon G(K, L_2(\mathbb{R}^d)) \to L_2(\mathbb{R}^d)$
$$\begin{aligned} 2\|T_a(\tau)f_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \|T_a(\tau)f_0 - \varphi(0) - (T_a(\tau)(-f_0) - \varphi(0))\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \|T_a(\tau)f_0 - \varphi(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|T_a(\tau)(-f_0) - \varphi(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant 2 \sup_{\substack{f \in L_2(\mathbb{R}^d), \\ \|T_a(t)f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta(t),\ t \in K}} \|T_a(\tau)f - \varphi(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leqslant 2 \sup_{\substack{f \in L_2(\mathbb{R}^d),\ g \in G(K, L_2(\mathbb{R}^d)), \\ \|T_a(t)f - g_t\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta(t),\ t \in K}} &\|T_a(\tau)f - \varphi(g_t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 2e\big(T_a(\tau), K, \delta, \varphi\big). \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в задаче (4), а затем справа к нижней грани по всем методам φ, получим, что
$$\sup_{\substack{f \in L_2(\mathbb{R}^d), \\ \|T_a(t)f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta(t),\ t \in K}} \|T_a(\tau)f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant E\big(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)\big),$$
т. е. справедливо неравенство (5).

Покажем теперь, что
$$S\big(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)\big) \geqslant e^{-\theta(\tau)}. \tag{6}$$

Рассмотрим сначала ситуацию, когда $t_2(\tau) < +\infty$. Далее, для краткости, будем часто писать t_1 и t_2 вместо $t_1(\tau)$ и $t_1(\tau)$.

Как сказано выше, на отрезке $[t_1, t_2]$ функция $\theta(\cdot)$ совпадает с линейной функцией, которая в данном случае, очевидно, имеет вид
$$p(t) = \frac{\ln(1/\delta(t_2)) - \ln(1/\delta(t_1))}{t_2 - t_1}(t - t_1) + \ln\frac{1}{\delta(t_1)} = \ln(\delta(t_1))^{\frac{t-t_2}{t_2-t_1}}(\delta(t_2))^{\frac{t_1-t}{t_2-t_1}}. \tag{7}$$
Ясно, что если $(t, x) \in M$, то $p(t) \geqslant x$ и, в частности, $p(t) \geqslant \ln\delta^{-1}(t)$, если $t \in K$.

По построению, функция $\theta(\cdot)$ не убывает и поэтому коэффициент при $(t - t_1)$ в выражении для $p(\cdot)$ неотрицателен. Следовательно, по свойствам функции $a(\cdot)$, найдется вектор $\xi_0 = (\xi_{01}, \ldots, \xi_{0d}) \in \mathbb{R}^d$ такой, что
$$a(\xi_0) = \frac{\ln(1/\delta(t_2)) - \ln(1/\delta(t_1))}{t_2 - t_1}. \tag{8}$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\square_k$ куб в $\mathbb{R}^d$, образованный векторами $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, для которых $\xi_{0i} \leqslant \xi_i \leqslant \xi_{0i} + 1/k$, если $\xi_{0i} \geqslant 0$ и $\xi_{0i} - 1/k \leqslant \xi_i \leqslant \xi_{0i}$, если $\xi_{0i} < 0$.

Определим функции $\psi_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{N}$, по формулам

$$\psi_k(\xi) = \begin{cases} (2\pi k)^{d/2} \, (\delta(t_1))^{\frac{t_2}{t_2-t_1}} (\delta(t_2))^{\frac{-t_1}{t_2-t_1}}, & \xi \in \square_k; \\ 0, & \xi \notin \square_k. \end{cases}$$

Ясно, что эти функции принадлежат $L_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $\varphi_k = F^{-1}[\psi_k]$, где F^{-1} — обратное преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^d)$, и покажем, что функции φ_k, $k \in \mathbb{N}$, допустимы в задаче (4).

Действительно, если $\xi \in \square_k$, то легко видеть, что $|\xi_0| \leqslant |\xi| \leqslant |\xi_0| + \sqrt{d}/k$ и тогда, учитывая, что $e^{-2ta(\xi)} \leqslant e^{-2ta(\xi_0)}$, формулу (8) и то, что $p(t) \geqslant \ln \delta^{-1}(t)$, если $t \in K$, будем иметь по теореме Планшереля для любого $t \in K$

$$\begin{aligned} \|T_a(t)\varphi_k\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2ta(\xi)} |F[\varphi_k](\xi)|^2 \, d\xi \\ &= k^d \, (\delta(t_1))^{\frac{2t_2}{t_2-t_1}} (\delta(t_2))^{\frac{-2t_1}{t_2-t_1}} \int\limits_{\square_k} e^{-2ta(\xi)} \, d\xi \leqslant (\delta(t_1))^{\frac{2t_2}{t_2-t_1}} (\delta(t_2))^{\frac{-2t_1}{t_2-t_1}} e^{-2ta(\xi_0)} \\ &= (\delta(t_1))^{2\frac{t_2-t}{t_2-t_1}} (\delta(t_2))^{2\frac{t-t_1}{t_2-t_1}} = e^{-2p(t)} \leqslant e^{-2\ln \delta^{-1}(t)} = \delta^2(t), \end{aligned}$$

т. е. функции φ_k, $k \in \mathbb{N}$, допустимы в задаче (4).

Значение максимизируемого функционала в (4) на этих функциях не больше значения самой задачи и поэтому снова, используя теорему Планшереля и формулу (8), получим, что

$$\begin{aligned} S^2(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)) \geqslant \|T_a(\tau)\varphi_k\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\tau a(\xi)} |F[\varphi_k](\xi)|^2 \, d\xi \\ &= k^d \, (\delta(t_1))^{\frac{2t_2}{t_2-t_1}} (\delta(t_2))^{\frac{-2t_1}{t_2-t_1}} \int\limits_{\square_k} e^{-2\tau a(\xi)} \, d\xi \\ &\geqslant (\delta(t_1))^{\frac{2t_2}{t_2-t_1}} (\delta(t_2))^{\frac{-2t_1}{t_2-t_1}} e^{-2\tau a(\xi_0)} e^{-2\tau\sqrt{d}/k} = e^{-2p(\tau)} e^{-2\tau\sqrt{d}/k}. \end{aligned} \tag{9}$$

Выражение справа стремится к величине $e^{-2p(\tau)} = e^{-2\theta(\tau)}$ при $k \to \infty$ и тем самым доказана оценка (6), что вместе с (5) доказывает неравенство (3) для случая $t_2(\tau) < +\infty$.

Пусть $t_2(\tau) = +\infty$. Ясно, что в этой ситуации на луче $[t_1(\tau), +\infty)$ функция $\theta(\cdot)$ совпадает с горизонтальной прямой $p(t) = \ln \delta^{-1}(t_1)$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда, полагая $\xi_0 = 0$, $\psi_k(\xi) = (2\pi k)^{d/2} \, \delta(t_1)$, если $\xi \in \square_k$ и $\psi_k(\xi) = 0$, если $\xi \notin \square_k$, будем иметь для любого $t \in K$ (учитывая, что $a(0) = 0$ и $p(t) \geqslant \ln \delta^{-1}(t)$, если $t \in K$)

$$\begin{aligned} \|T_a(t)\varphi_k\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2ta(\xi)} |F[\varphi_k](\xi)|^2 \, d\xi \\ &= k^d \, \delta^2(t_1) \int\limits_{\square_k} e^{-2ta(\xi)} \, d\xi \leqslant \delta^2(t_1) e^{-2ta(0)} = \delta^2(t_1) = e^{-2\ln \delta^{-1}(t_1)} \\ &= e^{-2p(t)} \leqslant e^{-2\ln \delta^{-1}(t)} = \delta^2(t), \end{aligned}$$

т. е. функции φ_k, $k \in \mathbb{N}$, допустимы в задаче (4).

Далее, проводя те же оценки, что и в (9), получаем для данного случая, что $S(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)) \geqslant e^{-\theta(\tau)}$. Вместе с (5) это доказывает неравенство (3) при $t_2(\tau) = +\infty$. Таким образом, неравенство (3) справедливо для всех $\tau \notin K$,

Противоположное неравенство для всех $\tau \in K$ докажем одновременно с оптимальностью методов из второго и третьего утверждений теоремы.

Пусть $t_2(\tau) < +\infty$. Покажем, что множество функций, удовлетворяющих условию (1), не пусто. Для этого предварительно докажем, что

$$\lambda_1(\tau)e^{-2(t_1-\tau)a(\xi)} + \lambda_2(\tau)e^{-2(t_2-\tau)a(\xi)} - 1 \geqslant 0 \tag{10}$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Рассмотрим функцию

$$f(\alpha) = \lambda_1(\tau)e^{-2(t_1-\tau)\alpha} + \lambda_2(\tau)e^{-2(t_2-\tau)\alpha} - 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Эта функция выпукла, как сумма выпуклых функций, и дифференцируема. Несложная проверка показывает, что если $\alpha_0 = a(\xi_0)$ (см. (8)), то $f(\alpha_0) = f'(\alpha_0) = 0$, откуда следует, что $f(\alpha) \geqslant 0$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$. Действительно, по неравенству Иенссена для выпуклых функций (см. [1]) имеем для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и $0 < \gamma < 1$

$$f(\alpha_0 + \gamma(\alpha - \alpha_0)) = f((1-\gamma)\alpha_0 + \gamma\alpha) \leqslant (1-\gamma)f(\alpha_0) + \gamma f(\alpha) = \gamma f(\alpha).$$

Деля обе части этого неравенства на γ и переходя к пределу при $\gamma \to 0$, получаем, что $f(\alpha) \geqslant f'(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0) = 0$. Следовательно, неравенство (10) справедливо для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Выделяя полный квадрат, нетрудно убедиться, что соотношение (1) равносильно следующему неравенству:

$$\left|\omega(\xi) - \frac{\lambda_2(\tau)e^{-(\tau-t_1)a(\xi)}}{\lambda_1(\tau)e^{(t_2-t_1)a(\xi)} + \lambda_2(\tau)e^{-(t_2-t_1)a(\xi)}}\right|$$
$$\leqslant \frac{\sqrt{\lambda_1(\tau)\lambda_2(\tau)}\, e^{t_2 a(\xi)}}{\lambda_1(\tau)e^{(t_2-t_1)a(\xi)} + \lambda_2(\tau)e^{-(t_2-t_1)a(\xi)}} \sqrt{\lambda_1(\tau)e^{-2t_1 a(\xi)} + \lambda_2(\tau)e^{-2t_2 a(\xi)} - e^{-2\tau a(\xi)}}$$

для п. в. $\xi \in B(\tau)$, причем выражение под знаком корня неотрицательно, поскольку оно отличается от выражения слева в (10) на положительный множитель $e^{-2\tau a(\xi)}$. Отсюда, очевидно, следует, что множество измеримых функций $\omega(\cdot)$, удовлетворяющих неравенству (1), не пусто.

Перейдем теперь к доказательству оптимальности методов, определенных во втором утверждении теоремы. Пусть измеримая функция $\omega(\cdot)$ удовлетворяет неравенству (1) для п. в. $\xi \in B(\tau)$ и равна нулю вне $B(\tau)$. Оценим погрешность метода $\widehat{\varphi}_\omega$.

Для любых $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $g \in G(K, L_2(\mathbb{R}^d))$ таких, что $\|T_a(t)f - g_t\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta(t)$, $t \in K$, имеем по теореме Планшереля

$$\begin{gathered}\|T_a(\tau)f - \widehat{\varphi}_\omega(g)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \left\|T_a(\tau)f - (R_1 * g_{t_1}) - (R_2 * g_{t_2})\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Big|e^{-\tau a(\xi)}F[f](\xi) - \Big(e^{-(\tau-t_1)a(\xi)} - \omega(\xi)e^{-(t_2-t_1)a(\xi)}\Big) \\ \times F[g_{t_1}](\xi) - \omega(\xi)F[g_{t_2}](\xi)\Big|^2 d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Big|\Big(e^{-(\tau-t_1)a(\xi)} - \omega(\xi)e^{-(t_2-t_1)a(\xi)}\Big) \\ \times\Big(e^{-t_1 a(\xi)}F[f](\xi) - F[g_{t_1}](\xi)\Big) + \omega(\xi)\Big(e^{-t_2 a(\xi)}F[f](\xi) - F[g_{t_2}](\xi)\Big)\Big|^2 d\xi.\end{gathered} \tag{11}$$

Обозначим

$$\omega_1(\xi) = e^{-(\tau - t_1)a(\xi)} - \omega(\xi) e^{-(t_2 - t_1)a(\xi)}$$

и

$$z_i(\xi) = e^{-t_i a(\xi)} F[f](\xi) - F[g_{t_i}](\xi), \quad i = 1, 2.$$

Тогда оценивая по неравенству Коши — Буняковского выражение под интегралом справа в (11), будем иметь для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \bigl|\omega_1(\xi) z_1(\xi) + \omega(\xi) z_2(\xi)\bigr|^2 &= \left| \frac{\omega_1(\xi)}{\sqrt{\lambda_1(\tau)}} \sqrt{\lambda_1(\tau)}\, z_1(\xi) + \frac{\omega(\xi)}{\sqrt{\lambda_2(\tau)}} \sqrt{\lambda_2(\tau)}\, z_2(\xi) \right|^2 \\ &\leqslant \left(\frac{|\omega_1(\xi)|^2}{\lambda_1(\tau)} + \frac{|\omega(\xi)|^2}{\lambda_2(\tau)} \right) \bigl(\lambda_1(\tau) |z_1(\xi)|^2 + \lambda_2(\tau) |z_2(\xi)|^2\bigr). \end{aligned} \tag{12}$$

Согласно (1) первый множитель в правой части этого неравенства не превосходит единицы для п. в. $\xi \in B(\tau)$. Если же $\xi \notin B(\tau)$, то $\omega(\cdot) = 0$, и тогда этот множитель равен $e^{-2(\tau - t_1)a(\xi)}/\lambda_1(\tau)$. Но так как $\xi \notin B(\tau)$, то $a(\xi) > -\ln \lambda_1(\tau)/2(\tau - t_1(\tau))$, а это равносильно тому, что $e^{-2(\tau - t_1)a(\xi)}/\lambda_1(\tau) < 1$. Таким образом, первый множитель в правой части (12) не превосходит единицы для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Учитывая это обстоятельство и то, что в силу теоремы Планшереля

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |z_i(\xi)|^2 \, d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |e^{-t_i a(\xi)} F[f](\xi) - F[g_{t_i}](\xi)|^2 \, d\xi \\ &= \|T_a(t_i) f - g_{t_i}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta^2(t_i), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

выражение справа в (11) не превосходит величины $\lambda_1(\tau)\delta^2(t_1) + \lambda_2(\tau)\delta^2(t_2)$.

Простой подсчет показывает, что

$$\lambda_1(\tau)\delta^2(t_1) + \lambda_2(\tau)\delta^2(t_2) = (\delta(t_1))^{\frac{2(t_2 - \tau)}{t_2 - t_1}} (\delta(t_2))^{\frac{2(\tau - t_1)}{t_2 - t_1}}.$$

Но в силу (7) правая часть этого равенства равна $e^{-2p(\tau)} = e^{-2\theta(\tau)}$. Тогда отсюда и из (11) следует, что для любых $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $g \in G(K, L_2(\mathbb{R}^d))$ таких, что $\|T_a(t) f - \varphi(g_t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta(t)$, $t \in K$, справедлива оценка

$$\bigl\|T_a(\tau) f - \widehat{\varphi}_\omega(g)\bigr\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant e^{-2\theta(\tau)}$$

и значит,

$$e\bigl(T_a(\tau), K, \delta(\cdot), \widehat{\varphi}_\omega\bigr) \leqslant e^{-\theta(\tau)}. \tag{13}$$

Эта оценка получена для случая, напомним, когда $t_2(\tau) < +\infty$. Из нее и доказанного неравенства (3) заключаем, что

$$e^{-\theta(\tau)} \leqslant E\bigl(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)\bigr) \leqslant e\bigl(T_a(\tau), K, \delta(\cdot), \widehat{\varphi}_\omega\bigr) \leqslant e^{-\theta(\tau)} \tag{14}$$

и тем самым $E(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)) = e^{-\theta(\tau)}$ и $E(T_a(\tau), K, \delta(\cdot)) = e(T_a(\tau), K, \delta(\cdot), \widehat{\varphi}_\omega)$.

Таким образом, если $t_2(\tau) < +\infty$, то первое и второе утверждения теоремы доказаны.

Пусть $t_2(\tau) = +\infty$. Покажем, что для погрешности метода $\widehat{\varphi}$ из третьего утверждения теоремы справедлива оценка (13). Рассуждая также как и в (11), получим, что

$$\begin{aligned}
\big\|T_a(\tau)f - \widehat{\varphi}(g)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \big\|T_a(\tau)f - (R * g_{t_1})\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-\tau a(\xi)} F[f](\xi) - e^{-(\tau - t_1(\tau))a(\xi)} F[g_{t_1}](\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left|(e^{-(\tau - t_1)a(\xi)} \Big(e^{-t_1 a(\xi)} F[f](\xi) - F[g_{t_1}](\xi)\Big)\right|^2 d\xi \\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left|\Big(e^{-t_1 a(\xi)} F[f](\xi) - F[g_{t_1}](\xi)\Big)\right|^2 d\xi \\
&= \big\|T_a(t_1)f - g_{t_1}\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta^2(t_1) = e^{-2\ln\delta^{-1}(t_1)} = e^{-2\theta(\tau)}.
\end{aligned}$$

Отсюда, как и выше, следует, что справедлива оценка (13) для данного метода. Поскольку неравенство (3) доказано для всех $\tau \notin K$, то соотношение (14) имеет место и для случая $t_2(\tau) = +\infty$. Таким образом, доказано первое утверждение теоремы для всех $\tau \notin K$ и оптимальность метода из третьего утверждения теоремы, т. е. теорема полностью доказана. $\triangleright$

3. Примеры

Рассмотрим теперь в качестве примера задачу об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^d$. Распространение тепла на $\mathbb{R}^d$ описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

(Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^d$ и $(t,x) \mapsto u(t,x)$ — функция на $[0,+\infty) \times \mathbb{R}^d$) с начальным распределением температуры $u(0,\cdot) = f(\cdot)$.

Мы предполагаем, что $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Единственное решение данной задачи дается для всех $t > 0$, как хорошо известно, интегралом Пуассона

$$u(t,x) = u(t,x;f(\cdot)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\,dy$$

и при этом $u(t,\cdot;f(\cdot)) \to f(\cdot)$ при $t \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Таким образом, мы имеем семейство операторов $T(t)\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, $T(t)f(\cdot) = u(t,\cdot)$ и, как хорошо известно, преобразование Фурье решения уравнения теплопроводности имеет вид

$$F\big[T(t)f(\cdot)\big](\xi) = F\big[u(t,x;f(\cdot))\big](\xi) = e^{-t|\xi|^2} F[f(\cdot)](\xi) \text{ для п.в. } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Следовательно, решение задачи об оптимальном восстановлении температуры в $\mathbb{R}^d$ в момент времени τ по ее приближенным измерениям в точках некоторого компакта дается доказанной теоремой при $\alpha(\xi) = |\xi|^2$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.

В качестве второго примера рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(\cdot, 0) = f(\cdot), \end{cases}$$

где Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^{d+1}$ и $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, заключающуюся в нахождении гармонической функции $u(\cdot,\cdot)$ в верхнем полупространстве $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : y > 0\,\}$ такую, что $u(\cdot, y) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ для любого $y > 0$, $\sup_{y>0} \|u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} < \infty$ и $u(\cdot, y) \to f(\cdot)$ при $y \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

В этом случае решение задачи Дирихле единственно и выражается интегралом Пуассона (см. [2])

$$u(x,y) = u(x,y;f) = \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\pi^{(d+1)/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{y f(t)}{(|x-t|^2 + y^2)^{(d+1)/2}}\, dt.$$

Как и в предыдущем примере, мы имеем семейство операторов $T(y)\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, $T(y)f(\cdot) = u(\cdot, y)$, которые в образах Фурье имеют вид

$$F\big[T(y)f\big](\xi) = F\big[u(x,y;f)\big](\xi) = e^{-y|\xi|} F[f](\xi).$$

Если поставить задачу об оптимальном восстановлении значений гармонической функции на гиперплоскости $y = Y$ по ее приближенным измерениям на гиперплоскостях $y = y_j$, где y_j пробегают некоторый компакт $K \subset \mathbb{R}_+$ и $Y \notin K$, то ее решение дается доказанной здесь теоремой, когда $\alpha(\xi) = |\xi|$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.

4. Заключение

Рассмотренная в данной работе задача относится к тому разделу теории приближений, который занимается задачами оптимального восстановления значений линейных функционалов и операторов на классах множеств, элементы которых известны приближенно. Это направление возникло в шестидесятые годы прошлого века, начиная с работы С. А. Смоляка [3], и с тех пор достаточно активно развивается в самых разных направлениях. Отметим здесь обзоры [4–6], монографию [7] и статьи [8–10]. Что касается тематики данной работы, то задача об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^d$, когда компакт K состоит из конечного числа точек, была решена в [9], и там построен только один оптимальный метод. Для рассмотренного здесь семейства операторов и когда K состоит из двух точек задача решена в работе [11]. Задача Дирихле для полупространства, приведенная здесь в качестве примера, решена в работе [12] для случая, когда K состоит из конечного числа точек.

Благодарность. Автор благодарен Г. Г. Магарил-Ильяеву за полезные обсуждения.

Литература

1. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. Изд. 5-ое. доп.—М.: УРСС, 2020.—176 с.
2. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.—М.: Мир, 1974.—331 с.
3. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дисс. . . . к.ф.-м.н.—М.: МГУ, 1965.

4. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory / Eds. C. A. Micchelli and T. J. Rivlin.—N. Y.: Plenum Press, 1977.—P. 1–54.
5. *Melkman A. A., Micchelli C. A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM Journal on Numerical Analysis.—1979.—Vol. 16, № 1.—P. 87–105. DOI: 10.1137/0716007.
6. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery // Numerical Analysis Lancaster / Eds. Turner P. R.—Berlin: Springer-Verlag, 1985.—P. 21–93.—(Lecture Notes in Mathematics; Vol. 1129). DOI: 10.1007/BFb0075157.
7. *Traub J. F., Woźniakowski H.* A General Theory of Optimal Algorithms.—N. Y.: Academic Press, 1980.
8. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прил.—2003.—Т. 37, № 3.—С. 51–64. DOI: 10.4213/faa157.
9. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Мат. сб.—2009.—Т. 200, № 5.—С. 37–54. DOI: 10.4213/sm7301.
10. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функц. анализ и его прил.—2010.—Т. 44.—С. 76–79. DOI: 10.4213/faa2999.
11. *Magaril-Il'yaev G. G., Sivkova E. O.* Optimal recovery of the semi-group operators from inaccurate data // Eurasian Math. J.—2019.—Vol. 10, № 4.—P. 75–84. DOI: 10.32523/2077-9879-2019-10-4-75-84.
12. *Абрамова Е. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О.* Наилучшее восстановление решения задачи Дирихле для полупространства по неточным измерениям // Журнал вычисл. матем. и матем. физ.— 2020.—Т. 60, № 10.—С. 1711–1720. DOI: 10.31857/S0044466920100038.

Статья поступила 15 июля 2022 г.

Сивкова Елена Олеговна
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
научный сотрудник отдела функционального анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;

НИУ «Московский энергетический институт»,
доцент кафедры высшей математики
РОССИЯ, 111250, Москва, Красноказарменная ул., 14
E-mail: e.o.sivkova@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-0365-4320

Vladikavkaz Mathematical Journal
, Volume , Issue , P. 124–135

OPTIMAL RECOVERY OF A FAMILY OF OPERATORS FROM INACCURATE MEASUREMENTS ON A COMPACT

Sivkova, E. O. [1,2]

[1] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia;
[2] NRU "Moscow Power Engineering Institute",
14 Krasnokazarmennaya St., Moscow 111250, Russia

E-mail: e.o.sivkova@mail.ru

Abstract. For a one-parameter family of linear continuous operators $T(t)\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, $0 \leqslant t < \infty$, we consider the problem of optimal recovery of the values of the operator $T(\tau)$ on the whole space by approximate information about the values of the operators $T(t)$, where t runs through some compact set $K \subset \mathbb{R}_+$ and $\tau \notin K$. A family of optimal methods for recovering the values of the operator $T(\tau)$ is found. Each of these methods uses approximate measurements at no more than two points from K and depends linearly on these measurements. As a consequence, families of optimal methods are found for restoring the solution of the heat equation at a given moment of time from its inaccurate measurements on other time intervals and for solving the Dirichlet problem for a half-space on a hyperplane from its inaccurate measurements on

other hyperplanes. The problem of optimal recovery of the values of the operator $T(\tau)$ from the indicated information is reduced to finding the value of some extremal problem for the maximum with a continuum of inequality-type constraints, i. e., to finding the least upper bound of the a functional under these constraints. This rather complicated task is reduced, in its turn, to the infinite-dimensional problem of linear programming on the vector space of all finite real measures on the σ-algebra of Lebesgue measurable sets in $\mathbb{R}^d$. This problem can be solved using some generalization of the Karush–Kuhn–Tucker theorem, and its the value coincides with the value of the original problem.

Keywords: optimal recovery, optimal method, extremal problem, Fourier transform, heat equation, Dirichlet problem.

AMS Subject Classification: 34K29, 65K10, 90C25.

For citation: *Sivkova, E. O.* Optimal Recovery of a Family of Operators from Inaccurate Measurements on a Compact // *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 2, pp. 124–135 (in Russian). DOI: 10.46698/b9762-8415-3252-n.

References

1. *Magaril-Il'yaev, G. G. and Tikhomirov, V. M. Vypuklyy Analiz i ego Prilozheniy* [Convex Analysis and its Applications], Moscow, URSS, 2020, 176 p. (in Russian).
2. *Stein, E. M. and Weiss, G. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Mathematical Series, vol. 1, New Jersey, Princeton University Press, 1971.
3. *Smolyak, S. A. Ob optimal'nom vosstanovlenii funksii i funksionalov ot nikh. Diss.* [On Optimal Recovery of Functions and Functionals from them. PhD], Moscow, MSU, 1965 (in Russian).
4. *Micchelli, C. A. and Rivlin, T. J.* A Survey of Optimal Recovery, *Optimal Estimation in Approximation Theory*, C. A. Micchelli and T. J. Rivlin (eds.), New York, Plenum Press, 1977, pp. 1–54.
5. *Melkman, A. A. and Micchelli, C. A.* Optimal Estimation of Linear Operators in Hilbert Spaces from Inaccurate Data, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1979, vol. 16, no. 1, pp. 87–105. DOI: 10.1137/0716007.
6. *Micchelli, C. A. and Rivlin, T. J.* Lectures on Optimal Recovery, *Numerical Analysis Lancaster*, Turner P. R. (ed.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1129, Berlin, Springer-Verlag, 1985, pp. 21–93. DOI: 10.1007/BFb0075157.
7. *Traub, J. F. and Woźniakowski, H. A General Theory of Optimal Algorithms*, New York, Academic Press, 1980.
8. *Magaril-Il'yaev, G. G. and Osipenko, K. Yu.* Optimal Recovery of Functions and Their Derivatives from Inaccurate Information about the Spectrum and Inequalities for Derivatives, *Functional Analysis and Its Applications*, 2003, vol. 37, no. 3, pp. 203–214. DOI: 10.1023/A:1026084617039.
9. *Magaril-Il'yaev, G. G. and Osipenko, K. Yu.* Optimal Recovery of the Solution of the Heat Equation from Inaccurate Data, *Sbornik: Mathematics*, 2009, vol. 200, no. 5, pp. 665–682. DOI: 10.1070/SM2009v200n05ABEH004014.
10. *Magaril-Il'yaev, G. G. and Osipenko, K. Yu.* On Optimal Harmonic Synthesis from Inaccurate Spectral Data, *Functional Analysis and Its Applications*, 2010, vol. 44, no. 3, pp. 223—225. DOI: 10.1007/s10688-010-0029-7.
11. *Magaril-Il'yaev, G. G. and Sivkova, E. O.* Optimal Recovery of the Semi-Group Operators from Inaccurate Data, *Eurasian Mathematical Journal*, 2019, vol. 10, no. 4, pp. 75–84. DOI: 10.32523/2077-9879-2019-10-4-75-84.
12. *Abramova, E. V., Magaril-Il'yaev, G. G. and Sivkova, E. O.* Best Recovery of the Solution of the Dirichlet Problem in a Half-Space from Inaccurate Data, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, vol. 60, no. 10, pp. 1656–1665. DOI: 10.1134/S0965542520100036.

Received Jule 15, 2022

Elena O. Sivkova
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Researcher;

NRU “Moscow Power Engineering Institute”,
14 Krasnokazarmennaya St., Moscow 111250, Russia,
Assistant Professor
E-mail: e.o.sivkova@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-0365-4320