Владикавказский математический журнал
, Том , Выпуск , С. 1–100

УДК 517.95
DOI 10.46698/t3110-3630-4771-f

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА — ПУАССОНА — ДАРБУ ДРОБНОГО ПОРЯДКА[#]

А. В. Дзарахохов[1], Э. Л. Шишкина[2,3]

[1] Горский государственный аграрный университет,
Россия, 362040, Владикавказ, ул. Кирова, 37;
[2] Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, Воронеж, Университетская пл., 1;
[3] Белгородский государственный национальный исследовательский
университет (НИУ «БелГУ»),
Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85

E-mail: azambat79@mail.ru, ilina_dico@mail.ru

Аннотация. Интерес к уравнениям дробного порядка, как обыкновенным, так и с частными производными, последние десятилетия неуклонно растет. Это связано с необходимостью моделирования процессов, в которых текущее состояние существенно зависит от предыдущих состояний процесса, т. е. так называемые системы с «остаточной» памятью. В работе рассматривается задача Коши для одномерного, однородного уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу с дифференциальным оператором дробного порядка по времени, который представляет собой левосторонний бесселев оператор дробного порядка. При этом, для пространственной переменной используется обычный дифференциальный оператор второго порядка. Показана связь между преобразованием Мейера и Лапласа, полученная с использованием преобразования Пуассона, которая представляет собой частный случай соотношения с преобразованием Обрешкова. Доказана теорема, которая определяет условия существования решения рассматриваемой задачи. При доказательстве теоремы существования решения использовалось преобразование Мейера. При этом решение задачи представляется в явном виде через обобщенную функцию Грина. Построенная для решения рассматриваемой задачи функция Грина определяется через обобщенную гипергеометрическую H-функцию Фокса.

Ключевые слова: дробные степени оператора Бесселя, дробное уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу, интегральное преобразование Мейера, H-функция.

AMS Subject Classification: 26A33, 33E20, 34B27, 35C10.

Образец цитирования: *Дзарахохов А. В., Шишкина Э. Л.* Решение уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу дробного порядка // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 2.—С. 85–100. DOI: 10.46698/t3110-3630-4771-f.

1. Введение

Классическое уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу (ЭПД) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\gamma}{t}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u=u(x,t),\ x\in\mathbb{R},\ t>0,\ \gamma\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Оператор, действующий переменной t в (1), — это *оператор Бесселя* $(B_\gamma)_t=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\gamma}{t}\frac{\partial}{\partial t}$ (см. [1]).

[#] Первый автор поддержан Министерством науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-02-2022-890.

Уравнение (1) рассматривается как модель случайных полетов (см. [2–8]). Первый вклад в этой области был сделан С. Гольдштейном [2] (1951). Он рассмотрел простейшее случайное блуждание по вещественной прямой, при котором частица, помещенная в начало координат в момент времени 0, движется с двумя конечными скоростями $\pm\lambda$, изменяя свою текущую скорость в соответствии с простейшим пуассоновским процессом с постоянным параметром μ. Он обнаружил, что распределение частиц положения x в течение t является решением телеграфного уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\mu\,\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Затем эта модель была подробно исследована М. Кацем в [3] и Э. Орсингером в [4, 5]. Естественные обобщения на случай пуассоновского процесса с функцией интенсивности $\lambda = \lambda(t) \in C^1(\mathbb{R})$ и на многомерный случай были исследованы в [6–9]. Модели случайных блужданий с дробными производными рассматривались в [10, 11].

В [12] было показано, что уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t}\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u = u(x,t),\ \ a > 0,\ \ t > 0,\ \ x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

определяет вероятностный закон случайного блуждания на $\mathbb{R}$. Явное распределение $u(x,t)$ положения произвольно движущихся частиц получено путем решения исходных задач для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу (2).

В работе [8] дробное диффузионно-волновое уравнение

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t}\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{\alpha} u = \lambda^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u = u(x,t),\ \ x \in \mathbb{R},\ \ t > 0,\ \ 0 < \alpha < 1, \tag{3}$$

было получено как модель случайного блуждания. При $\alpha \in (0, 1/2)$ частица движется в среднем медленнее, чем при рассмотрении модели (2), которая соответствует $\alpha = 1$. Для $\alpha \in (1/2, 1)$ частица в среднем движется быстрее.

В данной статье дробное уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу вида (3) с дополнительными условиями для $0 < \alpha \leqslant 1/2$ решено операционным методом.

2. Специальные функции

Прежде всего дадим определения некоторых специальных функций, которые будем использовать.

Модифицированные функции Бесселя (или гиперболические функции Бесселя) *первого и второго рода* $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ определяются как (см. [13])

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\alpha(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}, \tag{4}$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\alpha(x)}{\sin(\nu\pi)}, \tag{5}$$

где ν — нецелое. Для определения этих функций при целых значениях α используется предельный переход. Очевидно, что $K_\nu(x) = K_{-\nu}(x)$. При малых значениях аргумента $0 < |x| \ll \sqrt{\nu+1}$ имеем асимптотическую формулу

$$K_\nu(x) \sim \begin{cases} -\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \vartheta, & \nu = 0, \\ \frac{\Gamma(\nu)}{2^{1-\nu}}\, x^{-\nu}, & \nu > 0, \end{cases} \tag{6}$$

где
$$\vartheta = \lim_{n\to\infty}\left(-\ln n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = \int\limits_{1}^{\infty}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)dx$$
— постоянная Эйлера — Маскерони [14].

Асимптотическое поведение функции Бесселя $K_\nu(z)$ на бесконечности можно описать следующей формулой:
$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}\left(1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right), \qquad |z|\to\infty. \tag{7}$$
При $\nu = \frac{1}{2}$ получим
$$K_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}. \tag{8}$$

Ядром левосторонней дробной производной Бесселя на полуоси является *гипергеометрическая функция Гаусса*, которая внутри круга $|z|<1$ определяется как сумма гипергеометрического ряда (см. [14, с. 373, формула 15.3.1])
$${}_2F_1(a,b;c;z) = F(a,b,c;z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!}, \tag{9}$$
а при $|z|\geqslant 1$ определяется аналитическим продолжением этого ряда. В (9) параметры a, b, c и переменная z могут быть комплексными и $c\neq 0,-1,-2,\ldots$ Множитель $(a)_k$ является символом Похгаммера $(z)_n = z(z+1)\ldots(z+n-1)$, $n=1,2,\ldots$, $(z)_0\equiv 1$.

Функция Миттаг — Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$ является целой функцией порядка $1/\alpha$, определяемой при $\operatorname{Re}\alpha>0$ следующим рядом:
$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}, \quad z\in\mathbb{C},\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{C},\ \ \operatorname{Re}\alpha>0,\ \ \operatorname{Re}\beta>0. \tag{10}$$

Пусть $z,\rho,\beta\in\mathbb{C}$. Функция $\varphi(\rho,\beta;z)$ определятся формулой (см. [15, с. 353, формула E.36'] и [16, с. 209, формула (7.1.1)])
$$\varphi(\rho,\beta;z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\rho k+\beta)}\frac{z^k}{k!}. \tag{11}$$
Если $\rho>-1$, то ряд в (11) сходится абсолютно для всех $z\in\mathbb{C}$. При $\rho=-1$ этот ряд сходится абсолютно при $|z|<1$. Если $\rho=-1$ и $|z|=1$, то ряд в (11) сходится абсолютно при $\operatorname{Re}\beta>-1$. Кроме того, для $\rho>-1$, $\varphi(\rho,\beta;z)$ является целой функцией z. При действительных значениях аргумента z функция (11) рассматривалась в [17].

При $\rho=1$ и $\beta=\nu+1$ функция $\varphi(\alpha,\beta;\pm z^2/4)$ выражается через функции Бесселя $J_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ следующим образом:
$$\varphi\left(1,\nu+1;-\frac{z^2}{4}\right) = \left(\frac{2}{z}\right)^{\nu}J_\nu(z), \qquad \varphi\left(1,\nu+1;\frac{z^2}{4}\right) = \left(\frac{2}{z}\right)^{\nu}I_\nu(z).$$

Для целых чисел m, n, p, q таких, что $0\leqslant m\leqslant q$, $0\leqslant n\leqslant p$, $a_i,b_j\in\mathbb{C}$ и для $\alpha_i,\beta_j\in\mathbb{R}_+$ $(i=1,2,\ldots,p;\ j=1,2,\ldots,q)$, H-функция $H^{m,n}_{p,q}(z)$ определяется через интеграл типа Меллина — Барнса в виде [18]
$$\mathbf{H}^{m,n}_{p,q}(z) = \mathbf{H}^{m,n}_{p,q}\left[z\,\middle|\,\begin{cases}(a_i,\alpha_i)_{1,p},\\ (b_j,\beta_j)_{1,q}\end{cases}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{L}}\mathscr{H}^{m,n}_{p,q}(s)\,z^{-s}\,ds, \tag{12}$$

где

$$\mathscr{H}_{p,q}^{m,n}(s)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+\beta_j s)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-\alpha_i s)}{\prod\limits_{i=n+1}^{p}\Gamma(a_i+\alpha_i s)\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-\beta_j s)}.$$

Пусть

$$a^*=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\sum_{i=n+1}^{p}\alpha_i+\sum_{j=1}^{m}\beta_j-\sum_{j=m+1}^{q}\beta_j,$$

$$\Delta=\sum_{j=1}^{q}\beta_j-\sum_{i=1}^{p}\alpha_i,$$

$$\mu=\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{i=1}^{p}a_i+\frac{p-q}{2}.$$

Тогда H-функция $\mathbf{H}_{p,q}^{m,n}(z)$ имеет смысл в случае $\Delta>0$, $z\neq 0$, $\mathscr{L}=\mathscr{L}_{-\infty}$ — левая петля, расположенная на горизонтальной полосе, начинающаяся в точке $-\infty+i\varphi_1$ и заканчивающаяся в точке $-\infty+i\varphi_2$ с $-\infty<\varphi_1<\varphi_2<+\infty$. Другие случаи существования $\mathbf{H}_{p,q}^{m,n}(z)$ представлены в [18, с. 4, теорема 1.1].

Есть следующая связь между $\varphi(\rho,\beta;z)$ и $\mathbf{H}_{p,q}^{m,n}(z)$ [17, с. 60, формула 2]:

$$\varphi(\rho,\beta;z)=\mathbf{H}_{0,2}^{1,0}\left[-z\,\middle|\,\begin{matrix}-\\(0,1),(1-\beta,\rho)\end{matrix}\right]. \tag{13}$$

В [18, с. 33] приведена следующая формула дифференцирования H-функции:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^k\left\{z^{\omega}\mathbf{H}_{p,q}^{m,n}\left[cz^{\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right]\right\}=z^{\omega-k}\mathbf{H}_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left[cz^{\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}(-\omega,\sigma),(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q},(k-\omega,\sigma)\end{matrix}\right]. \tag{14}$$

3. Интегральные преобразования, оператор Пуассона и дробный интеграл Римана — Лиувилля

В этом разделе приведем интегральные преобразования Лапласа и Мейера и выпишем формулу из связи посредством оператора преобразования Пуассона. Также приведем теорему, в которой вычисляется дробный интеграл Римана — Лиувилля от $\varphi(\rho,\beta;-z)$.

Для преобразования Лапласа функции $\varphi(\rho,\beta;kt^{\alpha})$ известна следующая формула (см. [19]):

$$\Big(\mathscr{L}_t\, t^{\beta-1}\varphi(\rho,\beta;-kt^{\alpha})\Big)(\tau)=\tau^{-\beta}e^{-kz^{-\rho}}. \tag{15}$$

Чтобы использовать операционный метод для решения дифференциальных уравнений с дробной степенью оператора Бесселя необходимо найти удобное интегральное преобразование. В нашем случае — это интегральное преобразование с модифицированной функцией Бесселя (5) в ядре.

Для функции $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$ интегральное преобразование, с функцией Бесселя K_ν, $\nu\geqslant 0$, в ядре есть *преобразование Мейера*, определяемое формулой (см. [20, с. 93])

$$K_\nu[f](\xi)=\int\limits_0^{\infty}\sqrt{x\xi}\,K_\nu(x\xi)\,f(x)\,dx. \tag{16}$$

Условие $\nu\geqslant 0$ не является ограничивающим, так как $K_\nu=K_{-\nu}$.

Для наших целей удобно использовать следующую модификацию преобразования Мейера:

$$\mathscr{K}_\gamma[f](\xi)=\int\limits_0^\infty x^{\frac{\gamma+1}{2}}K_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,f(x)\,dx. \tag{17}$$

Принимая во внимание (8) и тот факт, что $K_\nu=K_{-\nu}$, при $\gamma=0$ и $\gamma=2$ получим

$$\mathscr{K}_0[f](\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2\xi}}\int\limits_0^\infty e^{-x\xi}\,f(x)\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{2\xi}}\,\mathscr{L}[f(x)](\xi),$$

$$\mathscr{K}_2[f](\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2\xi}}\int\limits_0^\infty xe^{-x\xi}\,f(x)\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{2\xi}}\,\mathscr{L}[xf(x)](\xi),$$

где $\mathscr{L}[f(x)](\xi)$ — преобразование Лапласа.

Пусть $f\in L_1^{\rm loc}(\mathbb{R}_+)$ и $f(t)=o\left(t^{\beta-\frac{\gamma}{2}}\right)$ при $t\to+0$, где $\beta>\frac{\gamma}{2}-2$, если $\gamma>1$ и $\beta>-1$, если $\gamma=1$. Кроме того, пусть $f(t)=0(e^{at})$ при $t\to+\infty$. Тогда преобразование Мейера функции f существует почти всюду для $\operatorname{Re}\xi>a$ (см. [20, с. 94]). Класс таких функций обозначим $\mathbf{K}_\gamma$.

Если $0<\gamma<2$, $F(\xi)$ аналитична в полуплоскости $H_a=\{p\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}p\geqslant a\}$, $a\leqslant 0$ и $s^{\frac{\gamma}{2}-1}F(\xi)\to 0$, $|\xi|\to+\infty$ равномерно по $\arg s$, то для любого числа c такого, что $c>a$, существует обратное преобразование $\mathscr{K}_\gamma^{-1}$, которое имеет вид (см. [20, с. 94])

$$\mathscr{K}_\gamma^{-1}[\widehat{f}](x)=f(x)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\widehat{f}(\xi)i_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\xi^\gamma\,d\xi. \tag{18}$$

Формула обращения (18) не удобна для вычислений и имеет условие $0<\gamma<2$. Здесь представим другую формулу обращения, использующую оператор преобразования Пуассона.

Чтобы упростить процесс восстановления функции по ее преобразованию Мейера, будем использовать оператор Пуассона вида

$$\mathscr{P}_x^\gamma f(x)=(\mathscr{P}_t^\gamma f(t))(x)=\frac{2C(\gamma)}{x^{\gamma-1}}\int\limits_0^x\left(x^2-t^2\right)^{\frac{\gamma}{2}-1}f(t)\,dt,\quad C(\gamma)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}. \tag{19}$$

Левый обратный к (19) при $\gamma>0$ для любой функции $H(x)\in C^n$ определяется как

$$(\mathscr{P}_x^\gamma)^{-1}H(x)=\frac{2\sqrt{\pi}x}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{\gamma}{2}\right)}\left(\frac{d}{2xdx}\right)^n\int\limits_0^x H(z)(x^2-z^2)^{n-\frac{\gamma}{2}-1}z^\gamma\,dz, \tag{20}$$

где $n=\left[\frac{\gamma}{2}\right]+1$.

Оператор преобразования Пуассона является разновидностью оператора дробного интегрирования Эрдейи — Кобера, а его обращение является разновидностью дробной производной Эрдейи — Кобера [21].

Используя представление функции K_ν из [13, с. 190, формула (4)] вида

$$K_\nu(x\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\xi}{2x}\right)^\nu \int\limits_x^\infty e^{-\xi z}(z^2-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dz$$

и оператор Пуассона (19), можем записать

$$x^{\frac{\gamma+1}{2}}K_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) = \frac{\sqrt{\pi}\,x\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}}{2^{\frac{\gamma-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\int\limits_x^\infty e^{-\xi z}(z^2-x^2)^{\frac{\gamma}{2}-1}\,dz$$

и получить следующее представление преобразования Мейера:

$$\mathscr{K}_\gamma[f](\xi) = \frac{\pi\,\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}}{2^{\frac{\gamma+1}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\left(\mathscr{L}z^{\gamma-1}\mathscr{P}_z^\gamma z f(z)\right)(\xi).$$

Наконец,

$$\mathscr{K}_\gamma[f](\xi) = \frac{\pi\,\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}}{2^{\frac{\gamma+1}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\left(\mathscr{L}z^{\gamma-1}\mathscr{P}_z^\gamma z f(z)\right)(\xi), \tag{21}$$

где $\mathscr{L}$ — преобразование Лапласа.

Представление (21) — это частный случай более общего представления преобразования Обрешкова с оператором Пуассона — Димовски. Операторы Пуассона — Димовски и Сонина — Димовски обобщают оператор Пуассона в смысле дробного интегродифференцирования по Киряковой (см. [15, часть 3]).

Для $\theta>0$ дробный интеграл Римана — Лиувилля определяется следующим образом (см. [21]):

$$\left(I_-^\theta f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\theta)}\int\limits_x^\infty f(t)(t-x)^{\theta-1}\,dt, \quad x>0.$$

Далее нам понадобится формула дробного интеграла Римана — Лиувилля от $z^\omega\varphi(\rho,\beta;-z^\sigma)$, которая следует из [18, с. 52, теорема 2.7].

Теорема 1. *Пусть $\theta>0$, $\omega\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$ и $\rho<1$. Если $\omega+\theta<0$, тогда дробный интеграл I_-^θ функции $z^\omega\varphi(\rho,\beta;-z^\sigma)$ существует и*

$$\begin{aligned}\left(I_-^\theta p^\omega\varphi(\rho,\beta;-p^\sigma)\right)(w) &= \left(I_-^\theta p^\omega \mathbf{H}_{0,2}^{1,0}\left[p^\sigma\,\middle|\,\begin{matrix}-\\(0,1),(1-\beta,\rho)\end{matrix}\right]\right)(w)\\ &= w^{\omega+\theta}\mathbf{H}_{1,3}^{2,0}\left[w^\sigma\,\middle|\,\begin{matrix}(-\omega,\sigma)\\(-\omega-\theta,\sigma),(0,1),(1-\beta,\rho)\end{matrix}\right].\end{aligned} \tag{22}$$

4. Дробные интегралы и производные Бесселя

Явное определение дробной степени оператора Бесселя $(B_\gamma)_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\gamma}{t}\frac{\partial}{\partial t}$ было представлено И. Г. Шпринкхёйзен-Купер в [22]. Это определение было получено в терминах гипергеометрических функций Гаусса с различными приложениями к УЧП. А. С. Макбрайд в [23] рассмотрел дробные степени гипер-бесселева оператора, которые включают в себя рассматриваемые в этой статье операторы.

Пусть $\alpha>0$, $\gamma>0$. *Левосторонний дробный интеграл Бесселя на полуоси* $B_{\gamma,0+}^{-\alpha}$ для $f\in L[0,\infty)$ определяется формулой

$$(B_{\gamma,0+}^{-\alpha}f)(x)=(IB_{\gamma,0+}^{\alpha}f)(x)$$
$$=\frac{1}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^x\left(\frac{y}{x}\right)^{\gamma}\left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2\alpha-1}{}_2F_1\left(\alpha+\frac{\gamma-1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{y^2}{x^2}\right)f(y)\,dy. \tag{23}$$

Свойства (23) приведены в [24].

Пусть $n=[\alpha]+1$, $f\in L[0,\infty)$, $IB_{\gamma,b-}^{n-\alpha}f, IB_{\gamma,b-}^{n-\alpha}f\in C^{2n}(0,\infty)$. Определим *левую дробную производную Бесселя на полуоси* равенством

$$(\mathscr{B}_{\gamma,0+}^{\alpha}f)(x)=(IB_{\gamma,0+}^{n-\alpha}B_{\gamma}^{n}f)(x), \tag{24}$$

где $B_\gamma^n=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\gamma}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^n$ — интегрированный оператор Бесселя.

В [23] были введены пространства, адаптированные для работы с операторами вида $B_{\gamma,0+}^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$F_p=\left\{\varphi\in C^\infty(0,\infty):\,x^k\frac{d^k\varphi}{dx^k}\in L^p(0,\infty),\ k=0,1,2,\dots\right\},\quad 1\leqslant p<\infty,$$

$$F_\infty=\left\{\varphi\in C^\infty(0,\infty):\,x^k\frac{d^k\varphi}{dx^k}\to 0,\ x\to +,\ x\to\infty,\ k=0,1,2,\dots\right\}$$

и

$$F_{p,\mu}=\left\{\varphi:\,x^{-\mu}\varphi(x)\in F_p\right\},\quad 1\leqslant p\leqslant\infty,\ \mu\in\mathbb{C}.$$

Приведем теорему, которая является частным случаем теоремы из [23].

Теорема 2. *Пусть* $\alpha\in\mathbb{R}$. *Для всех* p, μ *и* $\gamma>0$ *таких, что* $\mu\neq\frac{1}{p}-2m$, $\gamma\neq\frac{1}{p}-\mu-2m+1$, $m=1,2,\dots$, *оператор* $B_{\gamma,0+}^{\alpha}$ *является непрерывным линейным отображением из* F_p,μ *в* $F_{p,\mu-2\alpha}$. *Если, кроме того,* $2\alpha\neq\mu-\frac{1}{p}+2m$ *и* $\gamma-2\alpha\neq\frac{1}{p}-\mu-2m+1$, $m=1,2\dots$, *то* $B_{\gamma,0+}^{\alpha}$ *— гомеоморфизм из* F_p,μ *на* $F_{p,\mu-2\alpha}$ *с обратным оператором* $B_{\gamma,0+}^{-\alpha}$.

Несмотря на то, что операторы (23)–(24) изучались, не существовало удобного инструмента для решения дифференциальных уравнений с дробными степенями оператора Бесселя. Впервые такой инструмент, представляющий собой преобразование (17), был предложен в статье [25]. Вот некоторые результаты из [25], которые будут использованы в дальнейшем. Далее, применяя преобразование Мейера, предполагаем, что функции, к которым оно применяется, из класса $\mathbf{K}_\gamma$.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha>0$. *Преобразование Мейера* (17) *оператора* $B_{\gamma,0+}^{-\alpha}$ *имеет вид*

$$\mathscr{K}_\gamma\left[\left(IB_{\gamma,0+}^{\alpha}f\right)(x)\right](\xi)=\xi^{-2\alpha}\mathscr{K}_\gamma f(\xi). \tag{25}$$

Теорема 4. *Пусть* $n\in\mathbb{N}$, $\frac{d}{dx}\left[B_\gamma^{n-k}f(x)\right]$ *ограничено, преобразование Мейера оператора* $B_\gamma^n f$ *существует и при* $\gamma\neq 1$ *определяется формулой*

$$\mathscr{K}_\gamma[B_\gamma^n f](\xi)=\xi^{2n}\mathscr{K}_\gamma[f](\xi)-\left(\frac{2}{\xi}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\xi^{2k-2}B_\gamma^{n-k}f(0+). \tag{26}$$

Если $\frac{d}{dx}\left[B_\gamma^{n-k}f(x)\right]\sim x^\beta$, $\beta>0$ *при* $x\to 0+$, *то* (26) *верно и при* $\gamma=1$.

Класс $C^m_{ev}=C^m_{ev}(\mathbb{R})$ состоит из всех функций из $C^m(\mathbb{R})$ таких, что $\frac{\partial^{2k+1}f}{\partial x_i^{2k+1}}\Big|_{x=0}=0$ для всех неотрицательных целых $k\leqslant\frac{m-1}{2}$ (см. [1, с. 21]).

Для $\gamma=0$, $f\in C^{2n}_{ev}$ получим

$$\mathscr{K}_0[f(x)](\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2\xi}}\int\limits_0^\infty e^{-x\xi}\,f(x)\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{2\xi}}\,\mathscr{L}[f(x)](\xi)$$

и

$$\begin{gathered}\mathscr{L}\left[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}f(x)\right](\xi)=\xi^{2n}\mathscr{L}[f](\xi)-\sum_{k=0}^{2n-1}\xi^k f^{(2n-k-1)}(0+)\\ =\xi^{2n}\mathscr{L}[f](\xi)-f^{(2n-1)}(0+)-sf^{(2n-2)}(0+)-s^2f^{(2n-3)}(0+)\\ -s^3f^{(2n-4)}(0+)-s^4f^{(2n-5)}(0+)-s^5f^{(2n-6)}(0+)-\dots-\xi^{2n-2}f'(0+)-\xi^{2n-1}f(0+).\end{gathered}$$

Поскольку $f\in C^{2n}_{ev}$, получим $f'(0+)=f'''(0+)=\dots=f^{(2n-5)}(0+)=f^{(2n-3)}(0+)=f^{(2n-1)}(0+)=0$, тогда

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}f(x)\right](\xi)&=\xi^{2n}\mathscr{L}[f](\xi)-sf^{(2n-2)}(0+)\\ &-s^3f^{(2n-4)}(0+)-s^5f^{(2n-6)}(0+)-\dots-\xi^{2n-1}f(0+)\\ &=\xi^{2n}\mathscr{L}[f](\xi)-\sum_{k=1}^{n}s^{2k-1}f^{(2n-2k)}(0+)=\{m=n-k\}\\ &=\xi^{2n}\mathscr{L}[f](\xi)-\sum_{m=0}^{n-1}s^{2(n-m)-1}f^{(2m)}(0+).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}f(x)\right](\xi)=\xi^{2n}\mathscr{L}[f](\xi)-\sum_{m=0}^{n-1}s^{2(n-m)-1}f^{(2m)}(0+).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2\xi}{\pi}}\mathscr{K}_0[B_0^nf](\xi)&=\sqrt{\frac{2\xi}{\pi}}\left(\xi^{2n}\mathscr{K}_0[f](\xi)-\sqrt{\frac{\pi\xi}{2}}\sum_{m=0}^{n-1}\xi^{2(n-m)-2}B_0^mf(0+)\right)\\ &=\sqrt{\frac{2\xi}{\pi}}\left(\xi^{2n}\sqrt{\frac{\pi}{2\xi}}\,\mathscr{L}[f(x)](\xi)-\sqrt{\frac{\pi\xi}{2}}\sum_{m=0}^{n-1}\xi^{2(n-m)-2}B_0^mf(0+)\right)\\ &=\xi^{2n}\,\mathscr{L}[f(x)](\xi)-\sum_{m=0}^{n-1}\xi^{2(n-m)-1}f^{(2m)}(0+).\end{aligned}$$

Это подтверждает, что преобразование Мейера обобщает преобразование Лапласа.

Теорема 5. *Пусть $n=[\alpha]+1$ для дробных α и $n=\alpha$ для $\alpha\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$, $\frac{d}{dx}[B^k_\gamma f(x)]$ ограничено. Тогда преобразование Мейера $\mathscr{B}^\alpha_{\gamma,0+}f$ существует при $\gamma\neq1$ и имеет вид*

$$\mathscr{K}_\gamma[\mathscr{B}^\alpha_{\gamma,0+}f](\xi)=\xi^{2\alpha}\mathscr{K}_\gamma[f](\xi)-\left(\frac{2}{\xi}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\sum_{m=0}^{n-1}\xi^{2(\alpha-m)-2}B^m_\gamma f(0+).\qquad(27)$$

Если $\frac{d}{dx}[B^k_\gamma f(x)]\sim x^\beta$, $\beta>0$ при $x\to0+$, то (27) справедливо и для $\gamma=1$.

Теперь, когда у нас есть инструмент для решения дифференциальных уравнений с дробным оператором Бесселя, переходим к решению дробного уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу.

5. Дробное уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу

А. Н. Герасимов [26] вывел для задачи вязкоупругости и решил уравнение в частных производных дробного порядка вида

$$\frac{\partial^{2\beta}u}{\partial t^{2\beta}} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u = u(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ 0 < \beta. \tag{28}$$

Рассмотрим сначала простейший одномерный случай, когда $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$,

$$(\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_t u(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2},\ \lambda > 0, \tag{29}$$

с условиями Коши

$$u(x,0) = f(x). \tag{30}$$

Теорема 6. *Пусть* $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, $\lambda > 0$, *тогда решение задачи* (29)–(30) *имеет вид*

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G^{\alpha}_{\gamma}(x-\xi,t) f(\xi)\, d\xi, \tag{31}$$

где

$$G^{\alpha}_{\gamma}(x,t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\lambda\sqrt{\pi}2^{1-\gamma}} t^{-\alpha} \mathbf{H}^{2,0}_{1,3}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\alpha} \,\middle|\, \begin{matrix} \left(1-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right) \\ \left(1-\frac{\alpha-\gamma}{2},\frac{\alpha}{2}\right),(0,1),(\alpha-\gamma,-\alpha) \end{matrix}\right].$$

при условии, что интеграл в правой части (31) *сходится.*

$\lhd$ Применяя преобразование Мейера (16) по t и учитывая условия Коши (30), получим

$$\tau^{2\alpha}((\mathscr{K}_\gamma)_t u(x,t))(\tau) - \tau^{2\alpha-1-\gamma} f(x) = \lambda^2((\mathscr{K}_\gamma)_t u_{xx}(x,t))(\tau).$$

Теперь, применяя преобразование Фурье по x к обеим частям последнего равенства, будем иметь

$$\tau^{2\alpha}((\mathscr{K}_\gamma)_t F_x u(x,t))(\tau,\xi) - \tau^{2\alpha-1-\gamma}\widehat{f}(\xi) = -\xi^2\lambda^2((\mathscr{K}_\gamma)_t F_x u(x,t))(\tau,\xi)$$

и

$$((\mathscr{K}_\gamma)_t F_x u(x,t))(\tau,\xi) = \frac{\tau^{2\alpha-1-\gamma}}{\tau^{2\alpha}+\lambda^2\xi^2}\widehat{f}(\xi).$$

По формуле 6.2.13 из [18, с. 363] получим

$$\frac{\tau^{2\alpha-1-\gamma}}{\tau^{2\alpha}+\lambda^2\xi^2} = \frac{\tau^{\alpha-\gamma-1}}{2\lambda}\left(F_x e^{-\frac{|x|}{\lambda}\tau^{\alpha}}\right)(\xi),$$

и в соответствии со свойством свертки

$$\big((\mathscr{K}_\gamma)_t F_x u(x,t)\big)(\tau,\xi) = \frac{\tau^{2\alpha-1-\gamma}}{\tau^{2\alpha}+\lambda^2\xi^2}\widehat{f}(\xi) = \frac{\tau^{\alpha-\gamma-1}}{2\lambda}\left(F_x e^{-\frac{|x|}{\lambda}\tau^{\alpha}}\right)(\xi)\widehat{f}(\xi)$$
$$= \frac{\tau^{\alpha-\gamma-1}}{2\lambda}\left(F_x\left(e^{-\frac{|x|}{\lambda}\tau^{\alpha}} *_x f(x)\right)\right)(\xi).$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получаем следующее соотношение:

$$\big((\mathscr{K}_\gamma)_t u(x,t)\big)(\tau)=\frac{\tau^{\alpha-\gamma-1}}{2\lambda}\left(e^{-\frac{|x|}{\lambda}\tau^\alpha} *_x f(x)\right).$$

Используя представление (21), получим

$$\frac{\pi}{2^\gamma\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\left(\mathscr{L}t^{\gamma-1}\mathscr{P}_t^\gamma tu(x,t)\right)(\tau)=\frac{\tau^{\alpha-\gamma-1}}{2\lambda}\left(e^{-\frac{|x|}{\lambda}\tau^\alpha} *_x f(x)\right)$$

и

$$t^{\gamma-1}\mathscr{P}_t^\gamma tu(x,t)=\frac{\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\pi 2^{1-\gamma}\lambda}\left(\left(\mathscr{L}_\tau^{-1}\tau^{\alpha-\gamma-1}e^{-\frac{|x|}{\lambda}\tau^\alpha}\right)(t) *_x f(x)\right).$$

Применяя обратное преобразование Лапласа и учитывая (15), можно записать

$$t^{\gamma-1}\mathscr{P}_t^\gamma tu(x,t)=\frac{\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\pi 2^{1-\gamma}\lambda}t^{\gamma-\alpha}\varphi\left(-\alpha,1+\gamma-\alpha;-\frac{|x|}{\lambda}t^{-\alpha}\right) *_x f(x)$$

и

$$u(x,t)=\frac{\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\lambda\pi 2^{1-\gamma}t}\left(\left(\mathscr{P}_t^\gamma\right)^{-1}t^{1-\alpha}\varphi\left(-\alpha,1+\gamma-\alpha;-\frac{|x|}{\lambda}t^{-\alpha}\right) *_x f(x)\right).$$

Найдем

$$\left(\mathscr{P}_t^\gamma\right)^{-1}t^{1-\alpha}\varphi\left(-\alpha,1+\gamma-\alpha;-\frac{|x|}{\lambda}t^{-\alpha}\right)=\frac{2\sqrt{\pi}t}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{\gamma}{2}\right)}\left(\frac{d}{2tdt}\right)^n\mathscr{I}_{\alpha,\gamma}(x,t;\lambda),$$

где $n=\left[\frac{\gamma}{2}\right]+1$,

$$\mathscr{I}_{\alpha,\gamma}(x,t;\lambda)=\int\limits_0^t z^{1+\gamma-\alpha}\varphi\left(-\alpha,1+\gamma-\alpha;-\frac{|x|}{\lambda}z^{-\alpha}\right)\left(t^2-z^2\right)^{n-\frac{\gamma}{2}-1}dz.$$

Для интеграла $\mathscr{I}_{\alpha,\gamma}(x,t;\lambda)$ получим

$$\mathscr{I}_{\alpha,\gamma}(x,t;\lambda)=\int\limits_0^t z^{1+\gamma-\alpha}\varphi\left(-\alpha,1+\gamma-\alpha;-\frac{|x|}{\lambda}z^{-\alpha}\right)(t^2-z^2)^{n-\frac{\gamma}{2}-1}dz$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{t^2} y^{\frac{\gamma-\alpha}{2}}\varphi\left(-\alpha,1+\gamma-\alpha;-\frac{|x|}{\lambda}y^{-\frac{\alpha}{2}}\right)(t^2-y)^{n-\frac{\gamma}{2}-1}dy.$$

Здесь мы произвели замену переменной $z^2=y$. Теперь положим $\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\frac{1}{y}=p$, тогда

$$\mathscr{I}_{\alpha,\gamma}(x,t;\lambda)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)^{\frac{\gamma+2}{\alpha}-1}\int\limits_{\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\frac{1}{t^2}}^{\infty} p^{\frac{\alpha-\gamma}{2}-2}\varphi\left(-\alpha,1+\gamma-\alpha;-p^{\frac{\alpha}{2}}\right)\left(t^2-\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\frac{1}{p}\right)^{n-\frac{\gamma}{2}-1}dp$$

$$=\frac{t^{2n-\gamma-2}}{2}\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)^{\frac{\gamma+2}{\alpha}-1}\int\limits_{\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\frac{1}{t^2}}^{\infty} p^{\frac{\alpha}{2}-n-1}\varphi\left(-\alpha,1+\gamma-\alpha;-p^{\frac{\alpha}{2}}\right)\left(p-\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\frac{1}{t^2}\right)^{n-\frac{\gamma}{2}-1}dp.$$

Обозначая $w = \left(\frac{|x|}{\lambda}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\frac{1}{t^2}$, получаем дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $\left(n-\frac{\gamma}{2}\right)$:

$$\mathscr{I}_{\alpha,\gamma}(x,t;\lambda) = \frac{t^{2n-\gamma-2}}{2}\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)^{\frac{\gamma+2}{\alpha}-1}\int\limits_w^\infty p^{\frac{\alpha}{2}-n-1}\varphi\left(-\alpha,1+\gamma-\alpha;-p^{\frac{\alpha}{2}}\right)(p-w)^{n-\frac{\gamma}{2}-1}\,dp$$
$$= \Gamma\left(n-\frac{\gamma}{2}\right)\frac{t^{2n-\gamma-2}}{2}\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)^{\frac{\gamma+2}{\alpha}-1}\left(I_-^{n-\frac{\gamma}{2}}p^{\frac{\alpha}{2}-n-1}\varphi\left(-\alpha,1+\gamma-\alpha;-p^{\frac{\alpha}{2}}\right)\right)(w).$$

Используя (22), будем иметь

$$\theta = n-\frac{\gamma}{2} > 0,\quad \sigma = \frac{\alpha}{2} > 0,\quad \omega = \frac{\alpha}{2}-n-1,\quad \omega+\theta = \frac{\alpha-\gamma}{2}-1<0,\quad \rho = -\alpha < 1$$

и

$$\left(I_-^{n-\frac{\gamma}{2}}p^{\frac{\alpha}{2}-n-1}\varphi\left(-\alpha,1+\gamma-\alpha;-p^{\frac{\alpha}{2}}\right)\right)(w)$$
$$= w^{\frac{\alpha-\gamma}{2}-1}\mathbf{H}_{1,3}^{2,0}\left[w^{\frac{\alpha}{2}}\,\middle|\,\begin{matrix}\left(n+1-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right)\\ \left(1-\frac{\alpha-\gamma}{2},\frac{\alpha}{2}\right),(0,1),(\alpha-\gamma,-\alpha)\end{matrix}\right].$$

Следовательно,

$$\mathscr{I}_{\alpha,\gamma}(x,t;\lambda) = \Gamma\left(n-\frac{\gamma}{2}\right)\frac{t^{2n-\alpha}}{2}\mathbf{H}_{1,3}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\alpha}\,\middle|\,\begin{matrix}\left(n+1-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right)\\ \left(1-\frac{\alpha-\gamma}{2},\frac{\alpha}{2}\right),(0,1),(\alpha-\gamma,-\alpha)\end{matrix}\right].$$

Наконец,

$$(\mathscr{P}_t^\gamma)^{-1}t^{1-\alpha}\varphi\left(-\alpha,1+\gamma-\alpha;-\frac{|x|}{\lambda}t^{-\alpha}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}t}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{\gamma}{2}\right)}\left(\frac{d}{2tdt}\right)^n\mathscr{I}_{\alpha,\gamma}(x,t;\lambda)$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}t}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\left(\frac{d}{2tdt}\right)^n t^{2n-\alpha}\mathbf{H}_{1,3}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\alpha}\,\middle|\,\begin{matrix}\left(n+1-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right)\\ \left(1-\frac{\alpha-\gamma}{2},\frac{\alpha}{2}\right),(0,1),(\alpha-\gamma,-\alpha)\end{matrix}\right].$$

Теперь, используя формулу

$$\left(\frac{d}{2tdt}\right)^n t^{2n+\beta} = \frac{\Gamma\left(n+1+\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}\right)}t^\beta$$

и интеграл типа Меллина — Барнса (12), вычисляем производную в последнем представлении $(\mathscr{P}_t^\gamma)^{-1}t^{1-\alpha}\varphi\left(-\alpha,1+\gamma-\alpha;-\frac{|x|}{\lambda}t^{-\alpha}\right)$. Получаем

$$\left(\frac{d}{2tdt}\right)^n t^{2n-\alpha}\mathbf{H}_{1,3}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\alpha}\,\middle|\,\begin{matrix}\left(n+1-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right)\\ \left(1-\frac{\alpha-\gamma}{2},\frac{\alpha}{2}\right),(0,1),(\alpha-\gamma,-\alpha)\end{matrix}\right]$$
$$= \left(\frac{d}{2tdt}\right)^n t^{2n-\alpha}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{L}}\mathscr{H}_{1,3}^{2,0}(s)\left(\frac{|x|}{\lambda}t^{-\alpha}\right)^{-s}ds$$
$$= t^{-\alpha}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{L}}\mathscr{H}_{1,3}^{2,0}(s)\frac{\Gamma\left(n+1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}s\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}s\right)}\left(\frac{|x|}{\lambda}t^{-\alpha}\right)^{-s}ds.$$

Поскольку

$$\mathscr{H}_{1,3}^{2,0}(s)\frac{\Gamma\left(n+1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}s\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}s\right)}=\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha-\gamma}{2}+\frac{\alpha}{2}s\right)\Gamma(s)}{\Gamma\left(n+1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}s\right)\Gamma(1-\alpha+\gamma+\alpha s)}$$
$$\times\frac{\Gamma\left(n+1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}s\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}s\right)}=\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha-\gamma}{2}+\frac{\alpha}{2}s\right)\Gamma(s)}{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}s\right)\Gamma(1-\alpha+\gamma+\alpha s)},$$

будем иметь

$$\left(\frac{d}{2tdt}\right)^n t^{2n-\alpha}\mathbf{H}_{1,3}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\alpha}\,\middle|\,\begin{matrix}\left(n+1-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right)\\ \left(1-\frac{\alpha-\gamma}{2},\frac{\alpha}{2}\right),(0,1),(\alpha-\gamma,-\alpha)\end{matrix}\right]$$
$$=t^{-\alpha}\mathbf{H}_{1,3}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\alpha}\,\middle|\,\begin{matrix}\left(1-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right)\\ \left(1-\frac{\alpha-\gamma}{2},\frac{\alpha}{2}\right),(0,1),(\alpha-\gamma,-\alpha)\end{matrix}\right]$$

и

$$u(x,t)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\lambda\sqrt{\pi}2^{1-\gamma}}\left(t^{-\alpha}\mathbf{H}_{1,3}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\alpha}\,\middle|\,\begin{matrix}\left(1-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right)\\ \left(1-\frac{\alpha-\gamma}{2},\frac{\alpha}{2}\right),(0,1),(\alpha-\gamma,-\alpha)\end{matrix}\right]*_x f(x)\right). \triangleright$$

В [27, с. 375, следствие 6.5] решение задачи Коши

$$\left({}^C D_{0+}^{2\alpha}u\right)(x,t)=\lambda^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad x\in\mathbb{R},\ \ t>0,\ \ \lambda>0, \tag{32}$$

$$u(x,0)=f(x),\quad 0<\alpha\leqslant\frac{1}{2} \tag{33}$$

дано в виде

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G^\alpha(x-\xi,t)f(\xi)\,d\xi,$$

где

$$G^\alpha(x,t)=\frac{1}{2\lambda}t^{-\alpha}\varphi\left(-\alpha,1-\alpha;-\frac{|x|}{\lambda}t^{-\alpha}\right). \tag{34}$$

При $\gamma=0$ вместо (29)–(30) получим (32)–(33) и решение (31) при $\gamma=0$ будет иметь вид

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_0^\alpha(x-\xi,t)f(\xi)\,d\xi,$$

где

$$G_0^\alpha(x,t)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\lambda\sqrt{\pi}2}t^{-\alpha}\mathbf{H}_{1,3}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\alpha}\,\middle|\,\begin{matrix}\left(1-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right)\\ \left(1-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right),(0,1),(\alpha,-\alpha)\end{matrix}\right]$$
$$=\frac{1}{2\lambda}t^{-\alpha}\mathbf{H}_{0,2}^{1,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\alpha}\,\middle|\,\begin{matrix}-\\ (0,1),(\alpha,-\alpha)\end{matrix}\right],$$

которое совпадает с (34). Здесь мы применили формулу 2.1.2 из [18, с. 31], формулу (13) и соотношение $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

6. Заключение

Роль высших трансцендентных функций как в чистой математике, так и в многочисленных приложениях постоянно возрастает. Одним из ярких примеров такого рода является теория интегралов и производных нецелого порядка (дробное исчисление) и ее приложения. В рамках этой теории, и особенно для аналитических решений дробных ОДУ и УЧП, некоторые частные случаи высших трансцендентных функций стали чрезвычайно важными, включая функцию Миттаг-Леффлёра и ее обобщения, функцию Фокса — Райта и H-функцию. В этой статье мы получили представление решения дробных дифференциальных уравнений с дробным оператором Бесселя через H-функцию.

Литература

1. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи.— М.: Наука–Физматлит, 1997.—204 с.
2. *Goldstein S.* On diffusion by discontinuous movements and thetelegraph equation // Quart. J. Mech. Appl. Math.—1951.—Vol. 4.—P. 129–156. DOI: 10.1093/qjmam/4.2.129.
3. *Katz M.* A stochastic model related to the telegrapher's equation // Rocky Mountain J. Math.— 1974.—Vol. 4.—P. 497–509. DOI: 10.1216/RMJ-1974-4-3-497.
4. *Orsingher E.* Hyperbolic equations arising in random models // Stochastic Process Appl.—1985.—№ 21.—P. 93–106. DOI: 10.1016/0304-4149(85)90379-5.
5. *Orsingher E.* A planar random motion governed by the two-dimensional telegraph equation // J. Appl. Probab.—1986.—№ 23.—P. 385–397. DOI: 10.2307/3214181.
6. *Orsingher E.* Probability law, flow function, maximum distribution of wave-governed random motions, and their connections with Kirchhoff's laws // Stochastic Process Appl.—1990.—№ 34.—P. 49–66. DOI: 10.1016/0304-4149(90)90056-X.
7. *De Gregorio A., Orsingher E.* Random flights connecting porous medium and Euler–Poisson–Darboux equations // J. Math. Phys.—2020.—Vol. 61, № 4, 041505.—18 pp. DOI: 10.1063/1.5121502.
8. *Garra R., Orsingher E.* Random flights related to the Euler–Poisson–Darboux equation // Markov processes and related fields.—2016.—№ 22.—P. 87–110.
9. *Iacus S.* Statistical analysis of the inhomogeneous telegrapher's process // Statistics & Probability Letters.—2001.—№ 55.—P. 83–88. DOI: 10.1016/S0167-7152(01)00133-X.
10. *Metzler R., Klafter J.* The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach // Physics Reports.—2000.—№ 339.—P. 1–77. DOI: 10.1016/S0370-1573(00)00070-3.
11. *Gorenflo R. R., Vivoli A., Mainardi F.* Discrete and continuous random walk models for space-time fractional diffusion // Nonlinear Dynamics.—2004.—Vol. 38.—P. 101–116. DOI: 10.1007/s10958-006-0006-0.
12. *De Gregorio A., Orsingher E.* Flying randomly in R^d with Dirichlet displacements // Stoch. Process. Appl.—2012.—Vol. 122.—№ 2.—P. 676–713. DOI: 10.1016/j.spa.2011.10.009.
13. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций.—М.: ИЛ, 1949.—728 с.
14. *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables.—N. Y.: Dover Publ. Inc., 1972.—1060 p.
15. *Kiryakova V.* Generalized Fractional Calculus and Applications.—N. Y.: Longman Sci. Tech. & J. Wiley, 1994.—388 p.—(Pitman Research Notes in Mathematics. Vol. 301).
16. *Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V.* Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications.—Berlin/Heidelberg: Springer, 2016.—443 p.
17. *Luchko Yu.* Algorithms for evaluation of the Wright function for the real arguments' values // Fract. Calc. Appl. Anal.—2008.—Vol. 11.—P. 57–75.
18. *Kilbas A. A., Saigo M.* H-Transforms. Theory and Applications.—Boca Raton: Chapman and Hall, 2004.—408 p. DOI: 10.1201/9780203487372.
19. *Stankovic B.* On the function of E. M. Wright // Publ. de l'Institut Mathématique, Nouvelle Ser.—1970.—Vol. 10, № 24.—P. 113–124.
20. *Glaeske H. J., Prudnikov A. P. and Skornik K. A.* Operational Calculus and Related Topics.—N. Y.: Chapman and Hall/CRC, 2006.—424 p. DOI: 10.1201/9781420011494.
21. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.

22. *Sprinkhuizen-Kuyper I. G.* A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator // J. Math. Anal. Appl.—1979.—Vol. 72.—P. 674–702. DOI: 10.1016/0022-247x(79)90257-9.
23. *McBride A. C.* Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions.—London: Pitman, 1979.—179 p.
24. *Shishkina E. L. and Sitnik S. M.* On fractional powers of Bessel operators // Journal of Inequalities and Special Functions, Special issue to honor Prof. Ivan Dimovski's contributions.—2017.—Vol. 8, № 1.—P. 49–67.
25. *Shishkina E. L. and Sitnik S. M.* A fractional equation with left-sided fractional Bessel derivatives of Gerasimov-Caputo type // Mathematics.—2019.—Vol. 7, № 12.—P. 1–21. DOI: 10.3390/math7121216.
26. *Герасимов А. Н.* Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // АН СССР. Прикладная математика и механика.—1948.—Т. 12.—С. 529-539.
27. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations.—Amsterdam: Elsevier, 2006.—523 p.

Статья поступила 10 декабря 2021 г.

Дзарахохов Азамат Валерианович
Горский государственный аграрный университет,
старший преподаватель кафедры математики и физики
РОССИЯ, 362040, Владикавказ, ул. Кирова, 37
E-mail: azambat79@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-2231-4345

Шишкина Элина Леонидовна
Воронежский государственный университет,
профессор кафедры математического и прикладного анализа
РОССИЯ, 394018, Воронеж, Университетская пл., 1;

Белгородский государственный национальный
исследовательский университет (НИУ «БелГУ»),
профессор кафедры прикладной математики
и компьютерного моделирования
РОССИЯ, 308015, Белгород, ул. Победы, 85
E-mail: ilina_dico@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-4083-1207

Vladikavkaz Mathematical Journal
, Volume , Issue , P. 85–100

SOLUTION TO THE FRACTIONAL ORDER EULER–POISSON–DARBOUX EQUATION

Dzarakhohov, A. V.[1] and Shishkina, E. L.[2,3]

[1] Gorsky State Agrarian University,
37 Kirov St., Vladikavkaz 362040, Russia;
[2] Voronezh State University,
1 Universitetskaya Pl., Voronezh 394018, Russia;
[3] Belgorod State National Research University (BelGU),
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia

E-mail: azambat79@mail.ru, ilina_dico@mail.ru

Abstract. Interest in fractional order equations, both ordinary and partial, has been steadily growing in recent decades. This is due to the need to model processes in which the current state significantly depends on the previous states of the process, i.e. the so-called systems with “residual” memory. The paper considers the Cauchy problem for a one-dimensional, homogeneous Euler–Poisson–Darboux equation with a differential

operator of fractional order in time, which is a left-sided Bessel operator of fractional order. At the same time, the usual second-order differential operator is used for the spatial variable. The connection between the Meyer and Laplace transformation obtained using the Poisson transformation, which is a special case of the relation with the Obreshkov transformation, is shown. A theorem is proved that determines the conditions for the existence of a solution to the problem under consideration. When proving the theorem of the existence of a solution, the Meyer transform was used. In this case, the solution of the problem is presented explicitly through the generalized Green's function. The Green function constructed to solve the problem under consideration is defined by means of the generalized hypergeometric Fox H-function.

Key words: fractional powers of Bessel operator, fractional Euler–Poisson–Darboux equation, Meijer integral transform, H-function.

AMS Subject Classification: 26A33, 33E20, 34B27, 35C10.

For citation: *Dzarakhohov, A. V. and Shishkina, E. L.* Solution to the Fractional Order Euler–Poisson–Darboux Equation, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 2, pp. 85–100 (in Russian). DOI: 10.46698/t3110-3630-4771-f.

References

1. *Kipriyanov, I. A. Singulyarnyye ellipticheskiye krayevyye zadachi* [Singular Elliptic Boundary Value Problems], Moscow, Nauka, 1997, 204 p. (in Russian).
2. *Goldstein, S.* On Diffusion by Discontinuous Movements and Thetelegraph Equation, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1951, vol. 4, pp. 129–156. DOI: 10.1093/qjmam/4.2.129.
3. *Katz, M.* A Stochastic Model Related to the Telegrapher's Equation, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 1974, vol. 4, pp. 497–509. DOI: 10.1216/RMJ-1974-4-3-497.
4. *Orsingher, E.* Hyperbolic Equations Arising in Random Models, *Stochastic Processes and their Applications*, 1985, no. 21, pp. 93–106. DOI: 10.1016/0304-4149(85)90379-5.
5. *Orsingher, E. E.* A Planar Random Motion Governed by the Two-Dimensional Telegraph Equation, *Stochastic Processes and their Applications*, 1986, no. 23, pp. 385–397. DOI: 10.2307/3214181.
6. *Orsingher, E.* Probability Law, Flow Function, Maximum Distribution of Wave-Governed Random Motions, and their Connections with Kirchhoff's Laws, *Stochastic Processes and their Applications*, 1990, no. 34, pp. 49–66. DOI: 10.1016/0304-4149(90)90056-X.
7. *De Gregorio, A. and Orsingher, E.* Random Flights Connecting Porous Medium and Euler–Poisson–Darboux Equations, *Journal of Mathematical Physics*, 2020, vol. 61, no. 4, 041505, 18 pp. DOI: 10.1063/1.5121502.
8. *Garra, R. and Orsingher, E.* Random Flights Related to the Euler–Poisson–Darboux Equation, *Markov Processes and Related Fields*, 2016, no. 22, pp. 87–110.
9. *Iacus, S.* Statistical Analysis of the Inhomogeneous Telegrapher's Process, *Statistics & Probability Letters*, 2001, no. 55, pp. 83–88. DOI: 10.1016/S0167-7152(01)00133-X.
10. *Metzler, R. and Klafter, J.* The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach, *Physics Reports*, 2000, no. 339, pp. 1–77. DOI: 10.1016/S0370-1573(00)00070-3.
11. *Gorenflo, R. R., Vivoli, A. and Mainardi, F.* Discrete and Continuous Random Walk Models for Space-Time Fractional Diffusion, *Nonlinear Dynamics*, 2004, vol. 38, pp. 101–116. DOI: 10.1007/s10958-006-0006-0.
12. *De Gregorio, A. and Orsingher, E.* Flying Randomly in R^d with Dirichlet Displacements, *Stochastic Processes and their Applications*, 2012, vol. 122, no. 2, pp. 676–713. DOI: 10.1016/j.spa.2011.10.009.
13. *Watson, G. N. Teoriya besselevykh funktsiy* [A Treatise on the Theory of Bessel Functions], Moscow, IL, 1949, 728 p. (in Russian).
14. *Abramowitz, M. and Stegun, I. A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, New York, Dover Publ. Inc., 1972, 1060 p.
15. *Kiryakova, V. Generalized Fractional Calculus and Applications*, New York, Pitman Res. Notes Math., Longman Scientific & Technical, Harlow, Co-publ. John Wiley, 301, 1994, 388 p.
16. *Gorenflo, R., Kilbas, A. A., Mainardi, F. and Rogosin, S. V. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications* Berlin/Heidelberg, Germany, Springer, 2016, 443 p.
17. *Luchko, Yu.* Algorithms for Evaluation of the Wright Function for the Real Arguments' Values, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2008, vol. 11, pp. 57–75.
18. *Kilbas, A. A. and Saigo, M. H-Transforms. Theory and Applications*, Boca Raton, Florida, Chapman and Hall, 2004, 408 p. DOI: 10.1201/9780203487372.
19. *Stankovic, B.* On the Function of E. M. Wright, *Publications de l'Institut Mathématique, Nouvelle Ser.*, 1970, vol. 10, no. 24, pp. 113–124.

20. *Glaeske, H. J., Prudnikov, A. P. and Skornik, K. A. Operational Calculus and Related Topics*, New York, Chapman and Hall/CRC, 2006, 424 p. DOI: 10.1201/9781420011494.
21. *Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of their Applications], Minsk, Nauka i tekhnika, 1987, 688 c.
22. *Sprinkhuizen-Kuyper, I. G.* A Fractional Integral Operator Corresponding to Negative Powers of a Certain Second-Order Differential Operator, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1979, vol. 72, pp. 674–702. DOI: 10.1016/0022-247x(79)90257-9.
23. *McBride, A. C.* Fractional calculus and Integral Transforms of Generalized Functions, London, Pitman, 1979, 179 p.
24. *Shishkina, E. L. and Sitnik, S. M.* On Fractional Powers of Bessel Operators, *Journal of Inequalities and Special Functions, Special Issue to Honor Prof. Ivan Dimovski's Contributions*, 2017, vol. 8, no. 1, pp. 49–67.
25. *Shishkina, E. L. and Sitnik, S. M.* A Fractional Equation with Left-Sided Fractional Bessel Derivatives of Gerasimov–Caputo Type, Mathematics, 2019, vol. 7, no. 12, pp. 1–21. DOI: 10.3390/math7121216.
26. *Gerasimov, A. N.* A Generalization of Linear Laws of Deformation and its Applicationto Problems of Internal Friction, *Akad. Nauk SSSR, Prikl. Mat. Mekh. T. 12.* [Academy of Sciences of the USSR. Applied Mathematics and Mechanics Vol. 12], 1948, pp. 529–539 (in Russian).
27. *Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Amsterdam, Elsevier, 2006, 523 p.

Received December 10, 2021

Azamat V. Dzarakhohov
Gorsky State Agrarian University,
37 Kirov St., Vladikavkaz 362040, Russia,
Senior Lecturer
E-mail: `azambat79@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2231-4345

Elina L. Shishkina
Voronezh State University,
1 Universitetskaya Pl., Voronezh 394018, Russia,
Professor;
Belgorod State National Research University (BelGU),
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia,
Professor
E-mail: `ilina_dico@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0003-4083-1207