Владикавказский математический журнал
, Том , Выпуск , С. 1–61

УДК 517.983
DOI 10.46698/f5525-0005-3031-h

ОБ ОПЕРАТОРАХ, МАЖОРИРУЕМЫХ ОПЕРАТОРАМИ КАНТОРОВИЧА — БАНАХА И ОПЕРАТОРАМИ ЛЕВИ В ЛОКАЛЬНО СОЛИДНЫХ РЕШЕТКАХ#

С. Г. Горохова[1], Э. Ю. Емельянов[2]

[1] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;
[2] Институт математики им. С. Л. Соболева,
Россия, 630090, Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4

E-mail: `lanagor71@gmail.com`, `emelanov@math.nsc.ru`

Аннотация. Линейный оператор T, действующий в локально солидной векторной решетке (E, τ), называется: лебеговым оператором, если $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ для любой сети $x_\alpha \downarrow 0$ в E; KB-оператором, если для всякой τ-ограниченной возрастающей сети x_α в E_+ существует $x \in E$ такой, что $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} Tx$; квази KB-оператором, если он переводит τ-ограниченные возрастающие сети в E_+ в τ-фундаментальные; оператором Леви, если для всякой τ-ограниченной возрастающей сети x_α в E_+ существует $x \in E$ такой, что $Tx_\alpha \xrightarrow{o} Tx$; оператором квази Леви, если T переводит τ-ограниченные возрастающие сети в E_+ в o-фундаментальные. В данной заметке рассматривается проблема мажорирования операторов в локально солидных решетках с помощью квази KB-операторов и операторов квази Леви. Кроме того, исследуются некоторые свойства операторов Лебега, Леви и KB-операторов. В частности, установлено, что пространство операторов Лебега является подалгеброй алгебры всех регулярных операторов.

Ключевые слова: локально солидная решетка, оператор Лебега, оператор Леви, B-оператор, решеточный гомоморфизм.

AMS Subject Classification: 46A40, 46B42, 47L05.

Образец цитирования: *Горохова С. Г., Емельянов Э. Ю.* Об операторах, мажорируемых операторами Канторовича — Банаха и операторами Леви в локально солидных решетках // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 24, вып. 3.—С. 55–61. DOI: 10.46698/f5525-0005-3031-h.

Все векторные решетки, о которых пойдет речь в данной заметке, предполагаются вещественными и архимедовыми, а векторные топологии — хаусдорфовыми. Главная тема заметки: проблема мажорирования операторов в локально солидных решетках с помощью решеточных гомоморфизмов Канторовича — Банаха, квази KB-операторов и операторов квази Леви. Интерес к этой тематике возник недавно (см. [1]). Напомним, что локально солидная решетка (E, τ) называется:

i) *лебеговой* (σ-*лебеговой*), если для любой сети (последовательности) $x_\alpha \downarrow 0$ в E выполняется $x_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$;

ii) *решеткой Леви* (σ-*Леви*), если любая возрастающая τ-ограниченная сеть (последовательность) в E_+ обладает точной верхней гранью в E.

Условие $x_\alpha \downarrow 0$ в i) можно заменить на $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$.

#Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект № FWNF-2022-0004.

Нормированная решетка $(E, \|\cdot\|)$ называется *пространством Канторовича — Банаха* (или коротко *KB-пространством*), если всякое ограниченное по норме направленное вверх множество в E_+ сходится по норме. Каждое KB-пространство является решеткой Леви с порядково-непрерывной полной нормой; всякая нормированная решетка Леви (σ-Леви) является K-пространством (K_σ-пространством).

iii) Локально солидная решетка (E, τ) называется KB (σ-KB) *решеткой*, если всякая возрастающая τ-ограниченная сеть (последовательность) в E_+ τ-сходится.

Известно, что каждая KB (σ-KB) решетка является решеткой Леви (σ-Леви), а всякая решетка Леви (σ-Леви) является K-пространством (K_σ-пространством) (см., например, [2, Теорема 2.21(c)]). Линейный оператор T, действующий в локально солидной решетке (E, τ), называется *$o\tau$-непрерывным* (*σ-$o\tau$-непрерывным*), если $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ для любой сети (последовательности) x_α такой, что $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ [3]. Различные локально солидные версии свойств банаховых решеток, вроде свойства быть KB-пространством, изучались недавно многими авторами (см., например, [3–6]). Основная идея операторных версий свойств топологических векторных решеток заключается в перераспределении топологических и порядковых свойств между областью определения и областью значения исследуемого оператора. Поскольку порядковая сходимость в общем случае не топологична, наиболее важные операторные версии возникают, когда o- и τ- сходимости вовлекаются одновременно. Следующее определение в общем виде можно найти в [1].

Определение 1. Линейный оператор T, действующий в локально солидной решетке E, называется:

(a) *лебеговым* (*σ-лебеговым*), если $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ для любой сети (последовательности) $x_\alpha \downarrow 0$ в E;

(b) *$o\tau$-ограниченным* (*$o\tau$-компактным*), если множество $T[0, x]$ τ-ограничено (τ-вполне ограничено) в E для каждого $x \in E_+$;

(c) оператором (σ-) Канторовича — Банаха (далее (σ-) KB-оператором), если для всякой τ-ограниченной возрастающей сети (последовательности) x_α в E_+ существует $x \in E$ такой, что $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} Tx$;

(d) *квази KB* (*квази σ-KB*) оператором, если он переводит τ-ограниченные возрастающие сети (последовательности) в E_+ в τ-фундаментальные сети;

(e) оператором *Леви* (*σ-Леви*), если для всякой τ-ограниченной возрастающей сети (последовательности) x_α в E_+ существует $x \in E$ такой, что $Tx_\alpha \xrightarrow{o} Tx$;

(f) оператором *квази Леви* (*квази σ-Леви*), если T переводит τ-ограниченные возрастающие сети (последовательности) в E_+ в o-фундаментальные сети.

Предложение 1 (ср. [1, Предложение 2.7]). *Всякий непрерывный линейный оператор T в локально солидной решетке (E, τ) является $o\tau$-ограниченным.*

Утверждение сформулированного выше предложения непосредственно вытекает из двух классических фактов:

1) в локально солидной решетке (E, τ) порядково ограниченные множества τ-ограничены;

2) всякий τ-непрерывный линейный оператор переводит τ-ограниченные множества в τ-ограниченные.

Определение 2 (см. [7, Определение 2]). Пусть P — некоторое множество линейных операторов, действующих между полуупорядоченными векторными пространствами X и Y. Оператор $T : X \to Y$ называется *регулярным* P-*оператором* (коротко *r-P-оператором*), если существуют два положительных P-оператора $T_1, T_2 : X \to Y$ такие,

что $T = T_1 - T_2$. Множество всех r-P-операторов из X в Y будет обозначаться через r-P(X, Y).

Предложение 2. *Всякий регулярно лебегов (регулярно σ-лебегов) оператор T в локально солидной решетке (E, τ) является порядково непрерывным (порядково σ-непрерывным).*

$\lhd$ Без ограничения общности предположим, что $T \geqslant 0$. Пусть $x_\alpha \downarrow 0$ — сеть (последовательность) в E. Тогда $Tx_\alpha \downarrow$ и $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$. Следовательно, $Tx_\alpha \downarrow 0$ в силу, например, [2, Теорема 2.21(c)]. $\rhd$

Следствие 1. *Множество* r-$\mathrm{L}_{Leb}(E)$ (r-$\mathrm{L}^\sigma_{Leb}(E)$) *регулярно лебеговых (регулярно σ-лебеговых) операторов в локально солидной решетке (E, τ) является подалгеброй алгебры $L_r(E)$ регулярных операторов в E. Более того, $I \in$* r-$\mathrm{L}_{Leb}(E)$ ($I \in$ r-$\mathrm{L}^\sigma_{Leb}(E)$) *тогда и только тогда, когда решетка (E, τ) лебегова (σ-лебегова), где I — тождественный оператор в E.*

$\lhd$ Достаточно установить, что множество r-$\mathrm{L}_{Leb}(E)$ замкнуто относительно композиции операторов. Пусть $T, S \in$ r-$\mathrm{L}_{Leb}(E)$. Без ограничения общности предположим, что $T, S \geqslant 0$. Возьмем сеть $x_\alpha \downarrow 0$. Тогда, по Предложению 2, $Sx_\alpha \downarrow 0$ и, значит, $TSx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$. В случае регулярно σ-лебеговых операторов доказательство аналогичное, а оставшаяся часть следствия тривиальна. $\rhd$

Лемма 1 (ср. [1, Лемма 2.1])**.** *Линейный оператор T в локально солидной решетке (E, τ) является регулярно лебеговым (регулярно σ-лебеговым) тогда и только тогда, когда T регулярно $o\tau$-непрерывен (регулярно σ-$o\tau$-непрерывен).*

$\lhd$ Не ограничивая общности, предположим, что $T \geqslant 0$ и, поскольку случай σ-лебегового оператора сходный, рассмотрим только лебегов оператор. Достаточность доказывается непосредственной проверкой. Чтобы установить необходимость, допустим, что оператор T лебегов, и $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ в E. Возьмем в E сеть $y_\beta \downarrow 0$ такую, что для каждого β существует α_β удовлетворяющее $|x_\alpha| \leqslant y_\beta$ при $\alpha \geqslant \alpha_\beta$. Поскольку $T \geqslant 0$, имеем $|Tx_\alpha| \leqslant T|x_\alpha| \leqslant Ty_\beta$ при $\alpha \geqslant \alpha_\beta$. И, так как оператор T лебегов, $Ty_\beta \xrightarrow{\tau} 0$. Следовательно, $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$, поскольку топология τ локально солидная. $\rhd$

Предложение 3 (см. [1, Предложение 2.1])**.** *Всякий регулярный оператор T в локально солидной решетке (E, τ) $o\tau$-ограничен.*

Приведем список полезных свойств рассматриваемых операторов.

a) Тождественный оператор в E лебегов/KB/Леви тогда и только тогда, когда решетка E — лебегова/KB/Леви соответственно. Всякий $o\tau$-непрерывный (σ-$o\tau$-непрерывный) оператор является лебеговым (σ-лебеговым) и, согласно лемме 1, всякий регулярно лебегов (регулярно σ-лебегов) оператор в E является регулярно $o\tau$-непрерывным (регулярно σ-$o\tau$-непрерывным). Авторам неизвестно, является ли всякий регулярный лебегов (σ-лебегов) оператор $o\tau$-непрерывным (σ-$o\tau$-непрерывным).

b) Разрывный оператор $Tx := (\sum_{k=1}^{\infty} x_k)e_1$ в нормированной решетке $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ является $o\tau$-компактным и $o\tau$-непрерывным, однако T не компактен. Всякий непрерывный линейный оператор T в локально солидном локально выпуклом лебеговом дискретном K-пространстве $o\tau$-компактен, ввиду [2, Следствие 6.57].

c) Всякий KB-оператор является квази KB-оператором, и всякий непрерывный линейный оператор в KB-пространстве — KB-оператор. Хорошо известно, что тождественный оператор I в банаховой решетке является KB-оператором тогда и только тогда, когда I — σ-KB-оператор, тогда и только тогда, когда I — квази KB-оператор. Предложение 4 ниже показывает, что понятия квази KB и квази σ-KB операторов совпада-

ют. Всякий порядково ограниченный оператор в KB-пространстве является квази KB-оператором.

d) Всякий компактный оператор T в банаховой решетке $o\tau$-компактен. При этом, компактный оператор не обязан быть лебеговым (см. Пример 1 ниже). В частности, $o\tau$-компактный оператор не обязательно $o\tau$-непрерывен.

Пример 1 (ср. [1, Пример 3.1]). Пусть $E = (c_\omega(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ — банахова решетка всех ограниченных вещественных функций на $\mathbb{R}$ таких, что каждая $f \in E$ отличается от константы a_f на не более, чем счетном подмножестве $\mathbb{R}$.

Определим положительный оператор T в E следующим образом: Tf — постоянная функция $a_f \cdot \mathbb{I}_\mathbb{R} \in E$, для которой множество $\{d \in \mathbb{R} : f(d) \neq a_f\}$ не более, чем счетно.

(1) T — непрерывный оператор ранга 1 (и, следовательно, KB компактный и $o\tau$-компактный) в E. Пусть $f_n \xrightarrow{o} 0$. Поскольку для всякого $\varepsilon > 0$ существует n_ε такое, что множество $\cup_{n \geqslant n_\varepsilon}\{d \in \mathbb{R} : |f_n(d)| \geqslant \varepsilon\}$ не более, чем счетно, то $\|Tf_n\|_\infty < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$. Таким образом, оператор T является σ-$o\tau$-непрерывным и, значит, σ-лебеговым по отношению к топологии нормы на E.

(2) Оператор T не является лебеговым. В самом деле, для сети $f_\alpha := \mathbb{I}_{\mathbb{R}\setminus\alpha} \in E$, индексированной семейством Δ всех конечных подмножеств $\mathbb{R}$, упорядоченных по включению, имеем $f_\alpha \downarrow 0$, при том, что $\|Tf_\alpha\|_\infty = \|\mathbb{I}_\mathbb{R}\|_\infty = 1$ для всех $\alpha \in \Delta$.

Предложение 4 (ср., например, [1, Предложение 1.2]). *Оператор T в локально солидной решетке будет квази KB-оператором тогда и только тогда, когда T квази σ-KB.*

Отсюда следует, что всякая топологически полная σ-KB решетка (E, τ) является KB решеткой (см. [1, Следствие 1.1]). Заметим, что множества $L_{o\tau}(E)$, $L_{o\tau b}(E)$ и $L_{o\tau c}(E)$ $o\tau$-непрерывных, $o\tau$-ограниченных и $o\tau$-компактных операторов в локально солидной решетке E суть векторные пространства, удовлетворяющие $L_{o\tau c}(E) \subseteq L_{o\tau b}(E)$.

Решетка E называется *латерально* (σ-)*полной*, если любое (счетное) подмножество попарно дизъюнктных векторов из E_+ имеет супремум. Латерально полная векторная решетка дискретна тогда и только тогда, когда она решеточно изоморфна $\mathbb{R}^S$ для некоторого множества S.

Определение 3 (ср., например, [1, Определение 2.1]). Локально солидная решетка (E, τ) является *τ-латерально* (σ-) *полной*, если всякое τ-ограниченное (счетное) подмножество попарно дизъюнктных векторов из E_+ обладает точной верхней гранью.

Всякая латерально (σ-) полная локально солидная решетка (E, τ) τ-латерально (σ-) полна, и всякое порядково полное AM-пространство X с порядковой единицей τ-латерально полно по отношению к норме.

Пример 2 (ср. [1, Пример 2.1]). Рассмотрим векторную решетку E вещественных функций на $\mathbb{R}$ таких, что каждая $f \in E$ отличается от константы a_f на не более, чем счетном подмножестве $\mathbb{R}$, и $f - a_f\mathbb{I}_\mathbb{R} \in \ell_1(\mathbb{R})$ для каждой $f \in E$. Векторная решетка E полна по отношению к норме $\|f\| := |a_f| + \|f - a_f\mathbb{I}_\mathbb{R}\|_1$. Ясно, что E не является K_σ-пространством, поскольку $f_n := \mathbb{I}_{\mathbb{R}\setminus\{1,2,\dots,n\}} \downarrow\geqslant 0$, при том, что точной нижней грани $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ в E не существует. Отметим, что E не является τ-латерально σ-полной по отношению к топологии, порожденной нормой на E. В самом деле, ограниченное по норме счетное множество попарно дизъюнктных ортов $e_n = \mathbb{I}_{\{n\}} \in E_+$ не имеет супремума в E.

В силу [1, Предложение 2.4], всякая решетка Леви (σ-Леви) является τ-латерально (σ-) полным $K(K_\sigma)$ пространством.

Рассмотрим теперь проблему мажорирования для положительных операторов. А именно, пусть T и S — положительные операторы в E такие, что $0 \leqslant S \leqslant T$. При каких условиях из предположения, что оператор T лебегов, $o\tau$-ограниченный, $o\tau$-компактный,

KB или Леви, вытекает, что оператор S обладает тем же свойством? Ясно, что проблема имеет положительное решение для лебеговых, σ-лебеговых и $o\tau$-ограниченных операторов.

Напомним, что всякий порядково ограниченный сохраняющий дизъюнктность оператор T в векторной решетке E имеет модуль $|T|$, удовлетворяющий $|T||x| = |T|x|| = |Tx|$ для всех $x \in E$ (см., например, [8, Теорема 2.40]); более того, существуют два решеточных гомоморфизма $R_1, R_2 : E \to E$ такие, что $T = R_1 - R_2$ (см. [8, Exer. 1, p. 130]).

Предложение 5 (ср. [1, Теорема 2.5])**.** *Пусть T — порядково ограниченный сохраняющий дизъюнктность KB (σ-KB) оператор в локально солидной решетке (E, τ). Если $|S| \leqslant |T|$, тогда S также является KB (σ-KB) оператором.*

$\lhd$ Возьмем τ-ограниченную возрастающую сеть (последовательность) x_α в E_+. Тогда $T(x_\alpha - x) \xrightarrow{\tau} 0$ для некоторого $x \in E$. И, значит,

$$|S(x_\alpha - x)| \leqslant |S||x_\alpha - x| \leqslant |T||x_\alpha - x| = |Tx_\alpha - Tx| \xrightarrow{\tau} 0.$$

Следовательно, $Sx_\alpha \xrightarrow{\tau} Sx$. $\rhd$

Поскольку для решеточного гомоморфизма T всякий оператор S, удовлетворяющий $0 \leqslant S \leqslant T$, является решеточным гомоморфизмом (см., например, [8, Теорема 2.14]), следующая теорема вытекает непосредственно из предложения 5.

Теорема 1 (ср. [1, Следствие 2.3])**.** *Пусть T — решеточный KB (σ-KB) гомоморфизм в локально солидной решетке. Тогда всякий оператор S, удовлетворяющий условию $0 \leqslant S \leqslant T$, является решеточным KB (σ-KB) гомоморфизмом.*

Следующий результат обобщает [4, Предложение 2.9] на локально солидные решетки.

Теорема 2 (ср. [1, Теорема 2.6])**.** *Пусть T — положительный квази KB-оператор в локально солидной решетке (E, τ). Тогда всякий оператор S, удовлетворяющий условию $0 \leqslant S \leqslant T$, также является квази KB-оператором.*

$\lhd$ Пусть x_α — возрастающая τ-ограниченная сеть в E_+. Тогда $Tx_\alpha \uparrow$ и, поскольку T — квази KB-оператор, сеть Tx_α будет τ-фундаментальной. Возьмем $U \in \tau(0)$ и солидную окрестность $V \in \tau(0)$ такую, что $V - V \subseteq U$. Существует α_0, удовлетворяющая $T(x_\alpha - x_\beta) \in V$ для всех $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$. В частности, $T(x_\alpha - x_{\alpha_0}) \in V$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$. Поскольку $0 \leqslant S \leqslant T$, и V солидна, то $S(x_\alpha - x_{\alpha_0}) \in V$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$. Таким образом, получаем

$$Sx_\alpha - Sx_\beta = S(x_\alpha - x_{\alpha_0}) - S(x_\beta - x_{\alpha_0}) \in V - V \subseteq U$$

для всех $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$. Поскольку окрестность $U \in \tau(0)$ выбрана произвольно, сеть Sx_α τ-фундаментальна. $\rhd$

Теорема 3 (ср., например, [1, Теорема 2.7])**.** *Пусть T — положительный квази Леви оператор в локально солидной решетке (E, τ). Тогда всякий оператор S, удовлетворяющий условию $0 \leqslant S \leqslant T$, тоже является квази Леви оператором.*

$\lhd$ Возьмем возрастающую τ-ограниченную сеть x_α в E_+. Тогда сеть Tx_α o-фундаментальна. Значит, существует сеть $y_\beta \downarrow 0$ в E такая, что для каждого β найдется α_β такое, что $|Tx_{\alpha_1} - Tx_{\alpha_2}| \leqslant y_\beta$ при всех $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant \alpha_\beta$. Тогда при $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant \alpha_\beta$ имеем

$$Sx_{\alpha_1} - Sx_{\alpha_2} \leqslant S(x_{\alpha_1} - x_{\alpha_\beta}) \leqslant T(x_{\alpha_1} - x_{\alpha_\beta}) \leqslant y_\beta,$$

$$Sx_{\alpha_2} - Sx_{\alpha_1} \leqslant S(x_{\alpha_2} - x_{\alpha_\beta}) \leqslant T(x_{\alpha_2} - x_{\alpha_\beta}) \leqslant y_\beta.$$

Таким образом, $|Sx_{\alpha_1} - Sx_{\alpha_2}| \leqslant y_\beta$ для всех $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant \alpha_\beta$, и значит S тоже будет оператором квази Леви. $\rhd$

Литература

1. *Alpay S., Emelyanov E., Gorokhova S.* $o\tau$-Continuous, Lebesgue, KB, and Levi operators between vector lattices and topological vector spaces // Results Math.—2022.—Vol. 77, № 3, Article number 117.—P. 1–25. DOI: 10.1007/s00025-022-01650-3.
2. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics / 2nd edition.—Providence, RI: American Mathematical Society, 2003.—(Mathematical Surveys and Monographs; Vol. 105).
3. *Jalili S. A., Azar K. H., Moghimi M. B. F.* Order-to-topology continuous operators // Positivity.—2021.—Vol. 25.—P. 1313–1322. DOI: 10.1007/s11117-021-00817-6.
4. *Bahramnezhad A., Azar K. H.* KB-operators on Banach lattices and their relationships with Dunford–Pettis and order weakly compact operators // University Politehnica of Bucharest Scientific Bulletin, Ser. A: Applied Mathematics and Physics.—2018.—Vol. 80, № 2.—P. 91–98.
5. *Altın B., Machrafi, N.* Some characterizations of KB-operators on Banach lattices and ordered Banach spaces // Turkish. J. Math.—2020.—Vol. 44.—P. 1736–1743. DOI: 10.3906/mat-2004-106.
6. *Turan B., Altın B.* The relation between b-weakly compact operator and KB-operator // Turkish. J. Math.—2019.—Vol. 43.—P. 2818–2820. DOI: 10.3906/mat-1908-11.
7. *Emelyanov E.* Algebras of Lebesgue and KB regular operators on Banach lattices.—URL: https://arxiv.org/abs/2203.08326v2
8. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—Dordrecht: Springer, 2006.

Статья поступила 10 октября 2021 г.

Горохова Светлана Георгиевна
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
научный сотрудник
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: lanagor71@gmail.com

Емельянов Эдуард Юрьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4
E-mail: emelanov@math.nsc.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
, Volume , Issue , P. 55–61

ON OPERATORS DOMINATED BY KANTOROVICH–BANACH OPERATORS AND LÉVY OPERATORS IN LOCALLY SOLID LATTICES

Gorokhova, S. G.[1] and Emelyanov, E. Yu.[2]

[1] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362027, Russia;
[2] Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyga Ave., Novosibirsk 630090, Russia
E-mail: lanagor71@gmail.com, emelanov@math.nsc.ru

Abstract. A linear operator T acting in a locally solid vector lattice (E, τ) is said to be: a Lebesgue operator, if $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ for every net in E satisfying $x_\alpha \downarrow 0$; a KB-operator, if, for every τ-bounded increasing net x_α in E_+, there exists an $x \in E$ with $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} Tx$; a quasi KB-operator, if T takes τ-bounded increasing nets in E_+ to τ-Cauchy ones; a Lévi operator, if, for every τ-bounded increasing net x_α in E_+, there exists an $x \in E$ such that $Tx_\alpha \xrightarrow{o} Tx$; a quasi Levi operator, if T takes τ-bounded increasing nets in E_+ to o-Cauchy ones. The present article is devoted to the domination problem for the quasi KB-operators and the quasi Lévi operators in locally solid vector lattices. Moreover, some properties of Lebesgue operators, Lévi operators,

and KB-operators are investigated. In particularly, it is proved that the vector space Lebesgue operators is a subalgebra of the algebra of all regular operators.

Key words: locally solid lattice, Lebesgue operator, Lévi operator, KB-operator, lattice homomorphism.

AMS Subject Classification: 46A40, 46B42, 47L05.

For citation: *Gorokhova, S. G. and Emelyanov, E. Y.* On Operators Dominated by Kantorovich–Banach Operators and Lévy Operators in Locally Solid Lattices, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 3, pp. 55–61(in Russian). DOI: 10.46698/f5525-0005-3031-h.

References

1. *Alpay, S., Emelyanov, E. and Gorokhova, S.* $o\tau$-Continuous, Lebesgue, KB, and Levi Operators between Vector Lattices and Topological Vector Spaces, *Results in Mathematics*, 2022, vol. 77, no. 3, Article number 117, pp. 1–25. DOI: 10.1007/s00025-022-01650-3.
2. *Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics*, 2nd edition, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 105, Providence, RI, American Mathematical Society, 2003.
3. *Jalili, S. A., Azar, K. H. and Moghimi, M. B. F.* Order-to-topology Continuous Operators, *Positivity*, 2021, vol. 25, pp. 1313–1322. DOI: 10.1007/s11117-021-00817-6.
4. *Bahramnezhad, A. and Azar, K. H.* KB-Operators on Banach Lattices and their Relationships with Dunford–Pettis and Order Weakly Compact Operators, *University Politehnica of Bucharest Scientific Bulletin, Ser. A: Applied Mathematics and Physics*, 2018, vol. 80, no. 2, pp. 91–98.
5. *Altın, B. and Machrafi, N.* Some Characterizations of KB-Operators on Banach Lattices and Ordered Banach Spaces, *Turkish Journal of Mathematics*, 2020, vol. 44, pp. 1736–1743. DOI: 10.3906/mat-2004-106.
6. *Turan, B. and Altın, B.* The Relation between b-Weakly Compact Operator and KB-Operator, *Turkish Journal of Mathematics*, 2019, vol. 43, pp. 2818–2820. DOI: 10.3906/mat-1908-11.
7. *Emelyanov E.* Algebras of Lebesgue and KB regular operators on Banach lattices, ArXiv: https://arxiv.org/abs/2203.08326v2.
8. *Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. Positive Operators*, Dordrecht, Springer, 2006.

Received October 10, 2021

Svetlana G. Gorokhova
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Researcher
E-mail: `lanagor71@gmail.com`

Eduard Yu. Emelyanov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyga Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
Leading Researcher
E-mail: `emelanov@math.nsc.ru`