

УДК 517.97

DOI 10.46698/s3949-8806-8270-n

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМ, МОДЕЛИРУЕМЫХ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ

С. С. Постнов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,  
Россия, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65

E-mail: postnov.sergey@inbox.ru

**Аннотация.** В данной статье рассматривается задача оптимального управления для модельной системы, которая описывается одномерным неоднородным диффузионно-волновым уравнением, представляющим собой обобщение волнового уравнения на случай, когда производная по времени имеет дробный порядок и понимается в смысле Капуто. В общем случае мы рассматриваем как граничное, так и распределенное управление, которые считаются функциями, интегрируемыми по Лебегу с некоторой степенью  $p$  ( $p > 1$ , включая  $p = \infty$ ). Ставятся и анализируются два типа задач оптимального управления: задача поиска управления с минимальной нормой при заданном времени управления и задача быстрогодействия — задача поиска управления, переводящего систему в заданное состояние за минимальное время при заданном ограничении на норму управления. Исследование строится на использовании точного решения диффузионно-волнового уравнения, с помощью которого задача оптимального управления сводится к бесконечномерной  $l$ -проблеме моментов. Мы также рассматриваем конечномерную  $l$ -проблему моментов, получаемую аналогичным образом с использованием приближенного решения диффузионно-волнового уравнения. Для этой задачи анализируется корректность и разрешимость. Наконец, рассматривается пример расчета граничного управления с использованием конечномерной  $l$ -проблемы моментов.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, производная Капуто, диффузионно-волновое уравнение,  $l$ -проблема моментов.

**AMS Subject Classification:** 49N05, 49J21, 34K35, 34A08.

**Образец цитирования:** Постнов С. С. Оптимальное управление для систем, моделируемых диффузионно-волновым уравнением // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 3.—С. 108–119. DOI: 10.46698/s3949-8806-8270-n.

### Введение

Модели систем дробного порядка с распределенными параметрами в настоящее время пользуются популярностью, в том числе это касается вопросов оптимального управления такими системами. Упомянутые модели описывают процессы тепло- и массопереноса, диффузии в неоднородных средах, а также диффузионно-волновые явления в сложных многокомпонентных системах, колебания в неоднородных средах и т. п. Ранее задачи оптимального управления для таких систем изучались с использованием вариационных методов с ограничениями на квадратичный функционал, включающий сумму состояния системы и управления (см., например, [1–3]).

В настоящей работе исследуется задача оптимального управления с ограничением на норму управления для линейного неоднородного диффузионно-волнового уравнения. Рассматриваются как распределенное, так и граничное управления, которые считаются функциями, интегрируемыми по Лебегу на отрезке с некоторой степенью  $p > 1$ . Исследование задачи оптимального управления проводится с помощью метода моментов.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим систему, состояние которой описывается следующим уравнением:

$$r(x) {}^C_0D_t^\alpha Q(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ w(x) \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \right] - q(x)Q(x, t) + f(x, t) + u(x, t), \quad (1)$$

где  $Q(x, t)$  — состояние системы,  ${}^C_0D_t^\alpha$  — левосторонний оператор дробного дифференцирования по времени,  $\alpha \in (1, 2)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x \in [0, L]$ ,  $(x, t) \in \Omega = [0, L] \times [0, \infty)$ . Оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определения Капуто [4, § 2.4]:

$${}^C_0D_t^\alpha Q(x, t) = {}^{RL}_0D_t^\alpha \left[ Q(x, t) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{\partial^k Q(x, 0+)}{\partial t^k} \frac{t^k}{k!} \right], \quad (2)$$

где  ${}^{RL}_0D_t^\alpha$  — левосторонний оператор дробного дифференцирования Римана — Лиувилля,

$${}^{RL}_0D_t^\alpha Q(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \{\alpha\})} \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial t^{[\alpha]+1}} \int_0^t \frac{Q(x, \tau) d\tau}{(t - \tau)^{\{\alpha\}}},$$

где  $[\alpha]$  и  $\{\alpha\}$  — соответственно целая и дробная части числа  $\alpha$ .

Предполагается, что функция  $Q(x, t)$  дифференцируема по времени при  $t \geq 0$  и дважды дифференцируема по пространственной переменной на отрезке  $[0, L]$ . Функции  $r(x) > 0$ ,  $w(x) > 0$  и  $q(x)$  считаются непрерывными на отрезке  $[0, L]$ . Возмущение  $f(x, t)$  считается суммируемой по обоим переменным функцией на области  $\Omega$ . Также будем предполагать, что распределенное управление  $u(x, t)$  является элементом пространства  $L_{p_1, p_2}(\Omega)$ ,  $p_{1,2} > 1$ .

Уравнение (1) будем далее называть диффузионно-волновым.

Начальные условия для уравнения (1) поставим в виде

$$\frac{\partial^k Q(x, 0+)}{\partial t^k} = \varphi^k(x), \quad x \in [0, L], \quad k = 0, 1. \quad (3)$$

Граничные условия для уравнения (1) ставятся в виде

$$\left[ b_i \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + a_i Q(x, t) \right]_{x=x^i} = h_i(t) + u^i(t), \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

где  $a_i$  и  $b_i$  — коэффициенты,  $b_1 \leq 0$ ,  $b_2 \geq 0$ ;  $h_i(t)$  — некоторые известные функции,  $x^1 = 0$ ,  $x^2 = L$ . Граничные управления  $u^{1,2}(t)$  считаются элементами пространства  $L_p[0, T]$ ,  $p > 1$ , и могут быть объединены в вектор  $U(t) = (u^1(t), u^2(t))$ .

Будем считать целью оптимального управления достижение системой заданного состояния  $Q^*(x)$  в заданный момент времени  $T > 0$ :

$$Q(x, T) = Q^*(x), \quad T > 0, \quad x \in [0, L]. \quad (5)$$

Задачу оптимального управления поставим в двух разновидностях следующим образом [5]. Найти управления  $u(x, t)$  и/или  $U(t)$  такие, что система, описываемая уравнением (1) с начальными условиями (3) и граничными условиями (4), достигнет при  $t = T$  состояния (5) и при этом будет выполнено одно из условий:

- норма управлений  $u(x, t)$  и/или  $U(t)$  будет минимальной при заданном  $T$  (задача А);
- время перехода в заданное состояние (5) будет минимальным при заданном ограничении на норму управлений  $\|u(x, t)\| \leq l$ ,  $\|U(t)\| \leq l$  ( $l > 0$  — заданное число) (задача Б).

## 2. Представление задачи оптимального управления в форме обобщенной $l$ -проблемы моментов

Для уравнения (1) с начальными условиями (3) и граничными условиями (4) известно точное решение [6, формула (18)]. Запишем его для состояния (5) при  $t = T$ :

$$Q(x, T) = Q^*(x) = R(x, T) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \int_0^T u_n(t) \frac{E_{\alpha, \alpha}[-\lambda_n(T-t)^\alpha]}{(T-t)^{1-\alpha}} dt + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \times \int_0^T dt \frac{E_{\alpha, \alpha}[-\lambda_n(T-t)^\alpha]}{(T-t)^{1-\alpha}} [(v'_1 w'_n - (q(x)v_1(x))_n) u^1(t) + (v'_2 w'_n - (q(x)v_2(x))_n) u^2(t)] \quad (6)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \int_0^T \frac{E_{\alpha, \alpha}[-\lambda_n(T-t)^\alpha] [(r(x)v_1(x))_n \cdot {}^C_0 D_t^\alpha u^1(t) + (r(x)v_2(x))_n \cdot {}^C_0 D_t^\alpha u^2(t)] dt}{(T-t)^{1-\alpha}},$$

где

$$v_1(x) = \frac{a_2(x-L) - b_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_1 a_2 L}; \quad v_2(x) = \frac{b_1 - a_1 x}{a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_1 a_2 L};$$

$$v'_1 = \frac{dv_1(x)}{dx} = \frac{a_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_1 a_2 L}; \quad v'_2 = \frac{dv_2(x)}{dx} = -\frac{a_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_1 a_2 L};$$

$$R(x, T) = v_1(x)u^1(T) + v_2(x)u^2(T) + V(x, T)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha) [\varphi_n^0 - V_n(0+) - v_{1n}u^1(0+) - v_{2n}u^2(0+)] X_n(x)$$

$$+ T \sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha, 2}(-\lambda_n T^\alpha) X_n(x) \left[ \varphi_n^1 - \left( \frac{\partial V(x, 0+)}{\partial t} \right)_n - v_{1n} \left( \frac{\partial u^1(0+)}{\partial t} \right)_n - v_{2n} \left( \frac{\partial u^2(0+)}{\partial t} \right)_n \right] + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \int_0^T dt \frac{E_{\alpha, \alpha}[-\lambda_n(T-t)^\alpha]}{(T-t)^{1-\alpha}}$$

$$\times \left[ f_n(t) + w'_n \left( \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right)_n - (q(x)V(x, t))_n - (r(x) {}^C_0 D_t^\alpha V(x, t))_n \right];$$

$\varphi_n^{0,1}$ ,  $u_n(t)$ ,  $f_n(t)$ ,  $V_n(t)$  и  $v_{(1,2)n}$  — коэффициенты разложения функций  $\varphi^{0,1}(x)$ ,  $u(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $V(x, t)$  и  $v_{1,2}(x)$  по системе собственных функций  $\{X_n(x)\}$ , аналогично  $(\dots)_n$  есть коэффициент разложения выражения в скобках по системе собственных функций  $\{X_n(x)\}$ ;  $V(x, t) = v_1(x)h_1(t) + v_2(x)h_2(t)$ ;  $E_{\alpha, \beta}(t)$  — двухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера;  $E_\alpha(t) = E_{\alpha, 1}(t)$ . Собственные значения  $\lambda_n$  и собственные функции  $X_n(x)$  являются решением следующей задачи Штурма — Лиувилля [6]:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( w(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) - q(x) \right] X(x) + \lambda r(x) X(x) = 0,$$

$$\left[ b_i \frac{\partial X(x)}{\partial x} + a_i X(x) \right]_{x=x^i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Сформулируем теперь  $l$ -проблему моментов [5]. Пусть задана система функций  $g_n(t) \in L_{p'}[0, T]$  и набор чисел  $c_n$ , хотя бы одно из которых отлично от нуля. Пусть

также задано число  $l > 0$ . Необходимо найти функцию  $W(t) \in L_p(0, T]$  ( $1/p + 1/p' = 1$ ) такую, что выполняются следующие соотношения:

$$\int_0^T g_n(\tau) W(\tau) d\tau = c_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

$$\|W(t)\| \leq l. \quad (8)$$

Выберем функции  $W(t)$  и  $g_n(t)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} W(t) = & u_n(t) + (v_1' w_n' - (q(x)v_1(x))_n + \lambda_n(r(x)v_1(x))_n) u^1(t) \\ & + (v_2' w_n' - (q(x)v_2(x))_n + \lambda_n(r(x)v_2(x))_n) u^2(t), \end{aligned} \quad (9)$$

$$g_n(t, T) = \frac{E_{\alpha, \alpha}[-\lambda_n(T-t)^\alpha]}{(T-t)^{1-\alpha}}. \quad (10)$$

Числа  $c_n$  выберем в виде

$$\begin{aligned} c_n(T) = & Q_n^* - V_n(T) - [\varphi_n^0 - V_n(0+)] E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha) - \left[ \varphi_n^1 - \left( \frac{\partial V(x, 0+)}{\partial t} \right)_n \right] T E_{\alpha, 2}(-\lambda_n T^\alpha) \\ & - \int_0^T g_n(t, T) \left[ f_n(t) + w_n' \left( \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right)_n - (q(x)V(x, t))_n - (r(x) {}^C D_t^\alpha V(x, t))_n \right] dt \\ & + [(v_1(x)r(x))_n - v_{1n}] u^1(T) + [(v_2(x)r(x))_n - v_{2n}] u^2(T) \\ & - ([ (v_1(x)r(x))_n - v_{1n} ] u^1(0+) + [ (v_2(x)r(x))_n - v_{2n} ] u^2(0+)) E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha) \\ & - \left( [ (v_1(x)r(x))_n - v_{1n} ] \frac{\partial u^1(0+)}{\partial t} + [ (v_2(x)r(x))_n - v_{2n} ] \frac{\partial u^2(0+)}{\partial t} \right) T E_{\alpha, 2}(-\lambda_n T^\alpha). \end{aligned} \quad (11)$$

**Теорема 1.** Пусть функция  $W(t)$ , определяемая выражением (9), точно разрывна и имеет не более чем счетное число точек разрыва и интервалов непрерывности. Предположим также, что  $\alpha \in (1, 2)$ , выражение в правой части формулы (11) определено, ограничено и отлично от нуля хотя бы при одном значении  $n$ . Тогда выражение (6) эквивалентно выражению (7) с учетом выражений (9)–(11).

◁ Разложим функции  $Q^*(x)$  и  $R(x, T)$  по системе собственных функций  $\{X_n(x)\}$  и подставим результат в выражение (6). Поскольку система  $\{X_n(x)\}$  по определению является полной, то выражение (6) эквивалентно соответствующему набору выражений для коэффициентов разложения при каждом  $n$ .

Рассмотрим теперь интеграл в формуле (6), содержащий дробные производные граничных управлений (представляющий собой взвешенную сумму моментов дробных производных граничных управлений относительно функций  $g_n(t)$ ). Воспользовавшись формулой дробного интегрирования по частям [7] и проведя необходимые вычисления, по-

лучим

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T g_n(t, T) \left[ (r(x)v_1(x))_n \cdot {}^C D_t^\alpha u^1(t) + (r(x)v_2(x))_n \cdot {}^C D_t^\alpha u^2(t) \right] dt \\
 &= \int_0^T \left[ (r(x)v_1(x))_n u^1(t) + (r(x)v_2(x))_n u^2(t) \right] \cdot {}^{RL} D_T^\alpha g_n(t, T) dt \\
 &+ \left[ \left[ (r(x)v_1(x))_n \frac{\partial u^1(t)}{\partial t} + (r(x)v_2(x))_n \frac{\partial u^2(t)}{\partial t} \right] \cdot {}^{RL} I_T^{1-\{\alpha\}} g_n(t, T) \right] \Big|_0^T \\
 &+ \left[ \left[ (r(x)v_1(x))_n u^1(t) + (r(x)v_2(x))_n u^2(t) \right] \cdot {}^{RL} D_T^{\{\alpha\}} g_n(t, T) \right] \Big|_0^T,
 \end{aligned} \tag{12}$$

${}^{RL} D_T^\sigma$  и  ${}^{RL} I_T^\sigma$  — соответственно правосторонние операторы дробного дифференцирования и интегрирования порядка  $\sigma$  в смысле Римана — Лиувилля.

Пользуясь определениями правосторонних операторов Римана — Лиувилля [4] и формулой (10), получим

$${}^{RL} D_T^\alpha g_n(t, T) = \frac{1}{\Gamma(1 - \{\alpha\})} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_t^T (\tau - t)^{-\{\alpha\}} (T - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} [-\lambda_n (T - \tau)^\alpha] d\tau, \tag{13}$$

$${}^{RL} D_T^{\{\alpha\}} g_n(t, T) = -\frac{1}{\Gamma(1 - \{\alpha\})} \frac{\partial}{\partial t} \int_t^T (\tau - t)^{-\{\alpha\}} (T - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} [-\lambda_n (T - \tau)^\alpha] d\tau, \tag{14}$$

$${}^{RL} I_T^{1-\{\alpha\}} g_n(t, T) = \frac{1}{\Gamma(1 - \{\alpha\})} \int_t^T (\tau - t)^{-\{\alpha\}} (T - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} [-\lambda_n (T - \tau)^\alpha] d\tau. \tag{15}$$

Интеграл в правой части выражений (13)–(15) можно вычислить, воспользовавшись представлением функции Миттаг-Леффлера в виде степенного ряда [4]

$$E_{\alpha, \beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \tag{16}$$

Ряд (16) сходится равномерно на вещественной оси и, следовательно, мы можем менять порядок суммирования и интегрирования в ходе вычисления интеграла в правой части выражений (13)–(15). В итоге получим

$$\begin{aligned}
 K_\alpha(T, t) &= \int_t^T (\tau - t)^{-\{\alpha\}} (T - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} [-\lambda_n (T - \tau)^\alpha] d\tau \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_n)^k}{\Gamma[\alpha(k+1)]} \int_t^T (\tau - t)^{-\{\alpha\}} (T - \tau)^{\alpha(k+1)-1} d\tau \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_n)^k}{\Gamma[\alpha(k+1)]} (T - t)^{\alpha k + [\alpha]} B(1 - \{\alpha\}, \alpha(k+1)) \\
 &= \Gamma(1 - \{\alpha\}) (T - t)^{[\alpha]} E_{\alpha, 1+[\alpha]} [-\lambda_n (T - t)^\alpha],
 \end{aligned} \tag{17}$$

где  $B(\alpha, \beta)$  — бета-функция Эйлера,  $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ .

В рассматриваемом нами случае  $\alpha \in (1, 2)$ , т. е.  $[\alpha] = 1$ . Используя выражение (15), получим из (17)

$$\begin{aligned} & \left[ \left[ (r(x)v_1(x))_n \frac{\partial u^1(t)}{\partial t} + (r(x)v_2(x))_n \frac{\partial u^2(t)}{\partial t} \right] \cdot {}^{RL}I_T^{1-\{\alpha\}} g_n(t, T) \right] \Big|_0^T \\ &= -TE_{\alpha,2}[-\lambda_n T^\alpha] \left[ (r(x)v_1(x))_n \frac{\partial u^1(0+)}{\partial t} + (r(x)v_2(x))_n \frac{\partial u^2(0+)}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Вычислим далее первую и вторую производные выражения (17), используя представление (16). Для первой производной будем иметь

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} K_\alpha(T, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(1 - \{\alpha\})(T - t)^{[\alpha]} E_{\alpha,1+[\alpha]}[-\lambda_n(T - t)^\alpha] \\ &= \Gamma(1 - \{\alpha\}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_n)^k}{\Gamma[\alpha k + 1 + [\alpha]]} (\alpha k + [\alpha])(T - t)^{\alpha k + [\alpha] - 1} \\ &= \Gamma(1 - \{\alpha\})(T - t)^{[\alpha] - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_n)^k}{\Gamma[\alpha k + [\alpha]]} (T - t)^{\alpha k} \\ &= \Gamma(1 - \{\alpha\})(T - t)^{[\alpha] - 1} E_{\alpha, [\alpha]}[-\lambda_n(T - t)^\alpha]. \end{aligned}$$

Учтя (14) и  $[\alpha] = 1$ , получим

$${}^{RL}D_T^{\{\alpha\}} g_n(t, T) = E_\alpha[-\lambda_n(T - t)^\alpha].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \left[ \left[ (r(x)v_1(x))_n u^1(t) + (r(x)v_2(x))_n u^2(t) \right] \cdot {}^{RL}D_T^{\{\alpha\}} g_n(t, T) \right] \Big|_0^T \\ &= (r(x)v_1(x))_n u^1(T) + (r(x)v_2(x))_n u^2(T) \\ &\quad - \left[ (r(x)v_1(x))_n u^1(0+) + (r(x)v_2(x))_n u^2(0+) \right] E_\alpha[-\lambda_n T^\alpha]. \end{aligned} \quad (19)$$

Аналогичным образом вычислим вторую производную выражения (17):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} K_\alpha(T, t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Gamma(1 - \{\alpha\})(T - t)^{[\alpha]} E_{\alpha,1+[\alpha]}[-\lambda_n(T - t)^\alpha] \\ &= \Gamma(1 - \{\alpha\}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_n)^k}{\Gamma[\alpha k + 1 + [\alpha]]} (\alpha k + [\alpha])(\alpha k + [\alpha] - 1)(T - t)^{\alpha k + [\alpha] - 2} \\ &= \Gamma(1 - \{\alpha\})(T - t)^{[\alpha] - 2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_n)^k (\alpha k + [\alpha] - 1)}{\Gamma[\alpha k + [\alpha]]} (T - t)^{\alpha k} \\ &= \Gamma(1 - \{\alpha\})(T - t)^{[\alpha] - 2} \left[ \frac{[\alpha] - 1}{\Gamma([\alpha])} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\lambda_n)^k (\alpha k + [\alpha] - 1)}{\Gamma[\alpha k + [\alpha]]} (T - t)^{\alpha k} \right]. \end{aligned}$$

Сделав в полученном выражении замену индекса  $k = m + 1$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} K_\alpha(T, t) &= \Gamma(1 - \{\alpha\})(T - t)^{[\alpha] - 2} \left[ \frac{[\alpha] - 1}{\Gamma([\alpha])} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[-\lambda_n(T - t)^\alpha]^{m+1}}{\Gamma[\alpha(m + 1) + [\alpha] - 1]} \right] \\ &= \Gamma(1 - \{\alpha\})(T - t)^{[\alpha] - 2} \left[ \frac{[\alpha] - 1}{\Gamma([\alpha])} - \lambda_n(T - t)^\alpha E_{\alpha, [\alpha] + \alpha - 1}[-\lambda_n(T - t)^\alpha] \right]. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в формулу (13) с учетом формулы (10) и  $[\alpha] = 1$ , получим

$${}_t^{RL}D_T^\alpha g_n(t, T) = -\lambda_n g_n(t, T). \quad (20)$$

Подставив выражения (18), (19) и (20) в правую часть выражения (12), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^T g_n(t, T) [(r(x)v_1(x))_n \cdot {}_0^CD_t^\alpha u^1(t) + (r(x)v_2(x))_n \cdot {}_0^CD_t^\alpha u^2(t)] dt \\ &= -\lambda_n \int_0^T [(r(x)v_1(x))_n u^1(t) + (r(x)v_2(x))_n u^2(t)] g_n(t, T) dt - TE_{\alpha,2}[-\lambda_n(T-t)^\alpha] \\ & \times \left[ (r(x)v_1(x))_n \frac{\partial u^1(0+)}{\partial t} + (r(x)v_2(x))_n \frac{\partial u^2(0+)}{\partial t} \right] + (r(x)v_1(x))_n u^1(T) + (r(x)v_2(x))_n u^2(T) \\ & - [(r(x)v_1(x))_n u^1(0+) + (r(x)v_2(x))_n u^2(0+)] E_\alpha[-\lambda_n T^\alpha]. \end{aligned}$$

Подставив полученное выражение в формулу (6) и учтя выражения (9), (11) и (10), окончательно получим выражение (7).  $\triangleright$

**Следствие 1.** Задача оптимального управления, поставленная в п. 1, при заданных  $l$  и  $T$  эквивалентна счетномерной  $l$ -проблеме моментов (7)–(8) для функции (9), моментов (11) и функций (10).

**Замечание 1.** Выражения (11) содержат начальные и конечные значения граничных управлений и их производных. В общем случае эти значения могут быть определены из некоторых дополнительных условий или предположений. В случае  $r(x) = 1$  коэффициенты при этих значениях обнуляются и необходимость в таком доопределении отпадает.

### 3. Конечномерная $l$ -проблема моментов

Как было показано в предыдущем разделе, рассматриваемая в данной работе задача оптимального управления может быть сведена к счетномерной  $l$ -проблеме моментов. Однако для полученной проблемы неизвестно четких критериев, позволяющих установить ее разрешимость, и алгоритмов построения решения. Для конечномерной  $l$ -проблемы моментов такие критерии и алгоритмы существуют [5], что делает целесообразным ее рассмотрение. Конечномерная  $l$ -проблема моментов (7)–(8) может быть получена по аналогии со счетномерной проблемой, если вместо точного решения (6) использовать приближенное, получаемое при усечении входящих в формулу рядов. Тогда из решения (6), в котором ряды заменены частичными суммами, мы получим уже не счетный, а конечный набор из некоторого числа  $N$  равенств для коэффициентов разложения. Этот набор может быть переписан в виде конечномерной проблемы моментов, которую в данном случае можно назвать  $\{l, N\}$ -проблемой моментов.

Будем говорить, что конечномерная  $\{l, N\}$ -проблема моментов корректна, если норма функций  $g_n(t)$  определена в пространстве  $L_{p'}[0, T]$ .

Конечномерная  $l$ -проблема моментов, как известно, является разрешимой, если функции  $g_n(t) \in L_{p'}[0, T]$  линейно независимы или среди них можно выделить подсистему линейно независимых функций [5].

**Теорема 2.**  $\{l, N\}$ -проблема моментов (7)–(8) с учетом выражений (9)–(11) при любом фиксированном  $N$  и заданном  $l > 0$  корректна и разрешима.

◁ Оценим норму функций  $g_n(t)$ , заданных формулой (10), в пространстве  $L_{p'}[0, T]$ :

$$\|\tilde{g}_n(t, T)\| \leq \|E_{\alpha, \alpha}[-\lambda_n(T - \tau)^\alpha]\| \cdot \|(T - t)^{\alpha-1}\|, \quad n = 1, \dots, N.$$

Первый множитель в результирующем выражении ограничен [4, с. 42]. Второй множитель вычислим в явном виде, учитывая, что  $p' \geq 1$  и  $\alpha \in (1, 2)$ :

$$\|(T - t)^{\alpha-1}\| = \frac{(T - t)^{[p'(\alpha-1)+1]/p'}}{[p'(\alpha-1) + 1]^{1/p'}} \Big|_0^T, \quad t \in [0, T].$$

Полученное выражение ограничено при любых вещественных  $T > 0$ ,  $p' \geq 1$  и  $\alpha \in (1, 2)$ . Следовательно, рассматриваемая  $\{l, N\}$ -проблема моментов корректна.

Функции, определяемые формулой (10), являются линейно независимыми, в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Следовательно, рассматриваемая проблема моментов разрешима. ▷

Как известно, конечномерная  $l$ -проблема моментов (для которой обоснованы корректность и разрешимость) эквивалентна следующей задаче условной оптимизации [5]: найти

$$\min_{\xi_1, \dots, \xi_N} \left( \int_0^T \left| \sum_{i=1}^N \xi_i g_i(t) \right|^{p'} dt \right)^{1/p'} = \left( \int_0^T \left| \sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t) \right|^{p'} dt \right)^{1/p'} \quad (21)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^N \xi_i c_i = \sum_{i=1}^N \xi_i^* c_i = 1, \quad (22)$$

где  $\xi_i$  — произвольные числа, а числа  $\xi_i^*$  соответствуют решению задачи,  $i = 1, \dots, N$ .

Основываясь на решении данной задачи оптимизации, можно построить решение конечномерной  $l$ -проблемы моментов и, следовательно, задачи оптимального управления [5]. Это решение при  $W(t) \in L_p[0, T]$ ,  $p > 1$  будет единственным. В случае задачи А функция  $\widetilde{W}(t)$ , являющаяся единственным решением конечномерной  $l$ -проблемы моментов, будет определяться выражением

$$\widetilde{W}(t) = \Lambda_N^{p'} \left| \sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t) \right|^{p'-1} \operatorname{sign} \left[ \sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t) \right], \quad t \in [0, T]. \quad (23)$$

Аналогично, в случае задачи Б

$$\widetilde{W}(t) = l^{p'} \left| \sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t) \right|^{p'-1} \operatorname{sign} \left[ \sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t) \right], \quad t \in [0, T^*], \quad (24)$$

где  $T^*$  — минимальное вещественное неотрицательное число, для которого выполняется условие

$$\Lambda_N(T) \leq l, \quad (25)$$

где

$$\frac{1}{\Lambda_N(T)} = \left( \int_0^T \left| \sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t) \right|^{p'} dt \right)^{1/p'}.$$



ПРИМЕР 1. Рассмотрим приближенное решение задачи Б оптимального граничного управления для уравнения супердиффузии, к которому уравнение (1) сводится при следующих предположениях:

$$\begin{aligned} f(x, t) = u(x, t) = 0, \quad r(x) = w(x) = 1, \quad q(x) = 0, \\ b_1 = b_2 = 0, \quad a_1 = a_2 = 1, \quad h_1(t) = h_2(t) = 0, \\ u^1(t) = u^2(t) = u(t), \quad \varphi^0(x) = Q^0 = \text{const}, \quad \varphi_1(x) = Q^1 = \text{const}. \end{aligned}$$

Конечное состояние (5), в которое необходимо перевести систему за минимальное время, зададим в виде

$$Q^*(x) = Q^T = \text{const}, \quad Q^T > Q^0.$$

Собственные функции  $X_n(x)$  и собственные значения  $\lambda_n$  в данном случае выражаются формулами

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{L}, \quad \lambda_n = \left( \frac{\pi n}{L} \right)^2.$$

Будем рассматривать граничные управления, являющиеся существенно ограниченными функциями,  $u(t) \in L_\infty[0, T]$ .

В целом, исследуемая в данном примере задача аналогична исследованной ранее задаче оптимального граничного управления для уравнения субдиффузии, в котором  $\alpha \in (0, 1]$  [8].

Моменты (11) в данном случае будут выражаться следующей формулой:

$$c_n = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) [Q^T - Q^0 E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha) - Q^1 T E_{\alpha, 2}(-\lambda_n T^\alpha)].$$

Функция (9) будет пропорциональна граничному управлению

$$W(t) = \frac{2\lambda_n}{\pi n} (1 - (-1)^n) u(t).$$

Конечномерная  $\{l, N\}$ -проблема моментов в данном случае запишется в следующем виде:

$$\int_0^T g_n(t, T) u(t) dt = \frac{Q^T - Q^0 E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha) - Q^1 T E_{\alpha, 2}(-\lambda_n T^\alpha)}{\lambda_n} = \tilde{c}_n. \quad (26)$$

Положим  $N = 3$  и найдем решение проблемы (26). Используя (22) сведем задачу условной минимизации (21) к задаче безусловной минимизации следующего вида:

$$\frac{1}{\Lambda_3(T)} = \min_{\xi_1, \xi_2} \rho_\xi(T),$$

где

$$\rho_\xi(T) = \int_0^T \left| \xi_1 g_1(t) + \xi_2 g_2(t) + \frac{1 - \xi_1 c_1 - \xi_2 c_2}{c_3} g_3(t) \right| dt.$$

Эта задача может быть решена численно, например, используя алгоритм из монографии [5, гл. 4, § 1]. Найдя таким образом оценки  $T^*$  и  $\xi_{1,2}^*$ , можно вычислить оптимальное управление по формуле (24) и состояние системы в конечный момент времени:

$$Q^N(x, T^*) = \sum_{n=1}^N Q_n(T^*) X_n(x),$$

где

$$Q_n(T^*) = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) \left[ \lambda_n \int_0^{T^*} g_n(t, T^*) u(t) dt + Q^0 E_\alpha(-\lambda_n (T^*)^\alpha) + Q^1 T^* E_{\alpha,2}(-\lambda_n (T^*)^\alpha) \right].$$

На рис. 1 показаны оптимальное управление и конечное состояние, вычисленные при следующих значениях параметров:  $l = 100$ ,  $\alpha = 1,8$ ,  $Q^0 = 10$ ,  $Q^T = 30$ ,  $Q^1 = 0$  (точность численного нахождения времени управления  $5 \times 10^{-2}$ ). На рис. 2 показана зависимость времени управления  $T^*$  от показателя  $\alpha$  при  $Q^1 = 0$  (сплошная линия) и  $Q^1 = 5$  (штриховая линия), соответствующие линии очень близки.

**Рис. 1.** Пример вычисленного оптимального управления (верхний график) и конечного состояния системы (нижний график).

**Рис. 2.** Зависимость времени управления от показателя  $\alpha$ .

### **Заключение**

В настоящей работе исследована задача оптимального управления для системы, поведение которой описывается диффузионно-волновым уравнением, содержащим дробную производную Капуто по времени. Задача сведена к счетномерной  $l$ -проблеме моментов на основе точного решения диффузионно-волнового уравнения и к конечномерной  $l$ -проблеме моментов на основе приближенного решения. В последнем случае доказана корректность и разрешимость полученной проблемы.

### **Литература**

1. Mophou G. M. Optimal control of fractional diffusion equation // *Comp. Math. Appl.*—2010.—Vol. 61, № 1.—P. 68–78. DOI: 10.1016/j.camwa.2010.10.030.
2. Tang Q., Ma Q. Variational formulation and optimal control of fractional diffusion equations with Caputo derivatives // *Adv. Differ. Equ.*—2015.—Article number 283. DOI: 10.1186/s13662-015-0593-5.
3. Zhou Z., Gong W. Finite element approximation of optimal control problems governed by time fractional diffusion equation // *Comp. Math. Appl.*—2016.—Vol. 71, № 1.—P. 301–318. DOI: 10.1016/j.camwa.2015.11.014.
4. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*.—Amsterdam: Elsevier, 2006.—540 p.
5. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами.—М.: Наука, 1965.—475 с.
6. Sandev T., Tomovski Z. The general time fractional wave equation for a vibrating string // *J. Phys. A: Math. Theor.*—2010.—Vol. 43, № 5.—Paper ID 055204. DOI: 10.1088/1751-8113/43/5/055204.
7. Agrawal O. P. Fractional variational calculus in terms of Riesz fractional derivatives // *J. Phys. A: Math. Theor.*—2007.—Vol. 40, № 24.—P. 6287–6303. DOI: 10.1088/1751-8113/40/24/003.
8. Кубышкин В. А., Постнов С. С. Оптимальное по быстродействию граничное управление для систем, описываемых уравнением диффузии дробного порядка // *Автоматика и телемеханика*.—2018.—№ 5.—С. 137–152.

*Статья поступила 29 октября 2021 г.*

Постнов Сергей Сергеевич

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,  
научный сотрудник

РОССИЯ, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65

E-mail: [postnov.sergey@inbox.ru](mailto:postnov.sergey@inbox.ru)

<https://orcid.org/0000-0002-0392-3762>

*Vladikavkaz Mathematical Journal*  
, Volume , Issue , P. 108–119

## OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR SYSTEMS MODELLED BY DIFFUSION-WAVE EQUATION

Postnov, S. S.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS,  
65 Profsoyuznaya St., 117997 Moscow, Russia

E-mail: [postnov.sergey@inbox.ru](mailto:postnov.sergey@inbox.ru)

**Abstract.** This paper deals with an optimal control problem for a model system defined by a one-dimensional non-homogeneous diffusion-wave equation with a time derivative of fractional-order. In general case we consider both of boundary and distributed controls which are  $p$ -integrable functions (including  $p = \infty$ ).

In this case two types of optimal control problem are posed and analyzed: the problem of control norm minimization at given control time and the problem of time-optimal control at given restriction on control norm. The study is based on the use of an exact solution of the diffusion-wave equation, with the help of which the optimal control problem is reduced to an infinite-dimensional  $l$ -moment problem. We also consider a finite-dimensional  $l$ -moment problem obtained in a similar way using an approximate solution of the diffusion-wave equation. Correctness and solvability are analyzed for this problem. Finally, an example of boundary control calculation using a finite-dimensional  $l$ -moment problem is considered.

**Key words:** optimal control, Caputo derivative, diffusion-wave equation,  $l$ -problem of moments.

**AMS Subject Classification:** 49N05, 49J21, 34K35, 34A08.

**For citation:** Postnov, S. S. Optimal Control Problem for Systems Modelled by Diffusion-Wave Equation, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 3, pp. 108–119 (in Russian). DOI: 10.46698/s3949-8806-8270-n.

## References

1. Mophou, G. M. Optimal Control of Fractional Diffusion Equation, *Computational and Applied Mathematics*, 2010, vol. 61, no. 1, pp. 68–78. DOI: 10.1016/j.camwa.2010.10.030.
2. Tang, Q. and Ma, Q. Variational Formulation and Optimal Control of Fractional Diffusion Equations with Caputo Derivatives, *Advances in Difference Equations*, 2015, article number 283. DOI: 10.1186/s13662-015-0593-5.
3. Zhou, Z. and Gong, W. Finite Element Approximation of Optimal Control Problems Governed by Time Fractional Diffusion Equation, *Computational and Applied Mathematics*, 2016, vol. 71, no. 1, pp. 301–318. DOI: 10.1016/j.camwa.2015.11.014.
4. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Amsterdam, Elsevier, 2006, 540 p.
5. Butkovskii, A. G. *Distributed Control Systems*, New York, American Elsevier, 1969, 446 p.
6. Sandev, T. and Tomovski, Z. The General Time Fractional Wave Equation for a Vibrating String, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2010, vol. 43, no. 5, paper ID 055204. DOI: 10.1088/1751-8113/43/5/055204.
7. Agrawal, O. P. Fractional Variational Calculus in Terms of Riesz Fractional Derivatives, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2007, vol. 40, no. 24, pp. 6287–6303. DOI: 10.1088/1751-8113/40/24/003.
8. Kubyshkin, V. A. and Postnov, S. S. Time-Optimal Boundary Control for Systems Defined by a Fractional Order Diffusion Equation, *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, no. 5, pp. 884–896. DOI: 10.1134/S0005117918050090.

*Received October 29, 2021*

SERGEY S. POSTNOV

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS,  
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russia

Researcher

E-mail: [postnov.sergey@inbox.ru](mailto:postnov.sergey@inbox.ru)

<https://orcid.org/0000-0002-0392-3762>