Владикавказский математический журнал
, Том , Выпуск , С. 1–116

УДК 517.925.54
DOI 10.46698/w0398-0994-2990-z

ТОТАЛЬНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ ПО ПУАССОНУ И ТОТАЛЬНАЯ ОСЦИЛЛИРУЕМОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ#

К. С. Лапин[1]

[1] Мордовский государственный педагогический университет им. М. Е. Евсевьева,
Россия, 430007, Саранск, ул. Студенческая, 11 А

E-mail: klapin@mail.ru

Аннотация. В работах автора было начато изучение особого вида ограниченности решений систем дифференциальных уравнений, а именно, их ограниченности по Пуассону. Понятие ограниченности по Пуассону решения обобщает классическое понятие ограниченности решения и состоит в том, что в фазовом пространстве найдутся такой шар и на временно́й полуоси такая счетная система непересекающихся интервалов, последовательность правых концов которых стремится к плюс бесконечности, что решение при всех значениях времени из этих интервалов содержится в данном шаре. Далее в работах автора на основе методов функций Ляпунова, вектор-функций Ляпунова и высших производных функций Ляпунова были получены достаточные условия различных видов ограниченности по Пуассону всех решений. В частности, были получены достаточные условия тотальной ограниченности (ограниченности при малых возмущениях) по Пуассону, частичной тотальной ограниченности по Пуассону, а также частичной тотальной ограниченности по Пуассону решений с частично контролируемыми начальными условиями. В настоящей работе автором была получена асимптотическая или, как еще говорят, финальная характеризация понятия ограниченности по Пуассону решения, которая позволила установить связь между понятием ограниченного по Пуассону решения и понятием осциллирующего решения. Далее в работе введены понятия тотальной осциллируемости решений, частичной тотальной осциллируемости решений и частичной тотальной осциллируемости решений с частично контролируемыми начальными условиями. На основе указанной выше финальной характеризации понятия ограниченности по Пуассону решения, а также на основе метода вектор-функций Ляпунова с системами сравнений в работе получены достаточные условия тотальной осциллируемости, частичной тотальной осциллируемости, а также частичной тотальной осциллируемости решений с частично контролируемыми начальными условиями. Как следствия получены достаточные условия указанных выше видов тотальной осциллируемости решений в терминах функций Ляпунова.

Ключевые слова: ограниченность по Пуассону решений, частичная ограниченность по Пуассону решений, неограниченность решений, вектор-функции Ляпунова, осциллируемость решений, частичная осциллируемость решений.

AMS Subject Classification: 34C11, 34D20.

Образец цитирования: *Лапин К. С.* Тотальная ограниченность по Пуассону и тотальная осциллируемость решений систем дифференциальных уравнений // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 4.—С. 105–116. DOI: 10.46698/w0398-0994-2990-z.

1. Введение

В работе французского астронома и математика Ж. Шази [1] было введено понятие осциллирующего движения динамической системы и высказано предположение о возможности подобных движений в задаче трех тел. Понятие осциллирующего движения

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-211.2020.1.

в конечномерном евклидовом пространстве состоит в том, что движение не является ограниченным, но и не стремится к бесконечности при стремлении времени к плюс бесконечности. В работе [2] К. А. Ситников доказал, что в задаче трех тел для модели Колмогорова действительно существуют осциллирующие движения. В работе А. М. Леонтовича [3] также было доказано существование осциллирующих движений в некоторых бильярдных задачах. Кроме того, в работе В. М. Алексеева [4] осциллирующие движения были найдены при изучении квазислучайных динамических систем. Далее в большом цикле работ Л. Д. Пустыльникова (см., например, [5–7]) было доказано существование осциллирующих движений в задачах, связанных с физикой высоких энергий, термодинамикой и астрофизикой. Существование осциллирующих движений в указанных задачах позволило дать строгие математические обоснования существования космических частиц высоких энергий [7], второго начала термодинамики (закона возрастания энтропии) [8] и, наконец, существования гравитационных черных дыр в космосе [9]. Указанные выше результаты об осциллирующих движениях динамических систем говорят о том, что поиск таких движений является очень важной и, как правило, очень трудной задачей. Поэтому проблема разработки новых методов исследования условий существования осциллирующих движений динамических систем и, в частности, осциллирующих решений систем дифференциальных уравнений на протяжении последних уже почти ста лет всегда была актуальной.

С другой стороны, независимо от указанных выше работ об осциллирующих движениях в работе автора [10] было начато изучение особого вида ограниченности решений систем дифференциальных уравнений, а именно, их ограниченности по Пуассону. Понятие ограниченности по Пуассону решения обобщает классическое понятие ограниченности решения [11] и состоит в том, что в фазовом пространстве найдутся такой шар и на временно́й полуоси такая счетная система непересекающихся интервалов, последовательность правых концов которых стремится к плюс бесконечности, что решение при всех значениях времени из этих интервалов содержится в данном шаре. В серии работ автора (см., например, [10]) на основе методов функций Ляпунова, вектор-функций Ляпунова и высших производных функций Ляпунова получены достаточные условия ограниченности по Пуассону всех решений. Кроме того, в недавних работах автора (см., например, [12] и [13]) на основе синтеза методов вектор-функций Ляпунова и канонических областей Красносельского, а также синтеза методов вектор-функций Ляпунова, вращений векторных полей и направляющих функций Красносельского-Перова, получены достаточные условия существования ограниченных по Пуассону решений. Отметим теперь, что совсем недавно автором была получена асимптотическая или, как еще говорят, финальная характеризация понятия ограниченности по Пуассону решения (см. предложение 1 в этой статье), которая позволила установить связь между понятиями ограниченности по Пуассону и осциллируемости решений. В связи с этим возникла важная и интересная задача получения при помощи техники исследования ограниченности по Пуассону решений, развитой в указанных выше работах автора, новых достаточных условий существования осциллирующих решений.

В настоящей работе введены понятия тотальной осциллируемости, частичной тотальной осциллируемости и частичной тотальной осциллируемости с частично контролируемыми начальными условиями решений, которые являются специальными случаями соответствующих видов тотальной ограниченности по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений. На основе метода вектор-функций Ляпунова получены достаточные условия тотальной осциллируемости, частичной тотальной осциллируемости и частичной тотальной осциллируемости с частично контролируемыми начальными усло-

виями решений. Как следствия получены достаточные условия указанных выше видов тотальной осциллируемости решений в терминах функций Ляпунова. Перейдем теперь к точным определениям и формулировкам.

2. Предварительные сведения

Пусть задана произвольная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x), \quad F(t,x) = \big(F_1(t,x), \ldots, F_n(t,x)\big)^T, \quad n \geqslant 1, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0;+\infty)$ и $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — любая непрерывная функция. Далее будем предполагать, что все решения системы (1) продолжимы на всю временну́ю полуось $\mathbb{R}^+$.

Далее под $\|\cdot\|$ будем понимать стандартную евклидову норму в $\mathbb{R}^n$. Для решения $x = x(t)$ системы (1), проходящего через точку $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, будем использовать запись $x = x(t, t_0, x_0)$. Для любого $t_0 \in \mathbb{R}^+$ множество $[t_0; +\infty)$ будем обозначать через $\mathbb{R}^+(t_0)$. Любую неотрицательную возрастающую числовую последовательность $\tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ такую, что $\lim_{i\to\infty} \tau_i = +\infty$, будем называть $\mathscr{P}$-последовательностью. Для каждой $\mathscr{P}$-последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i\geqslant 1}$ будем через $M(\tau)$ обозначать множество $\bigcup_{i=1}^{\infty}[\tau_{2i-1}; \tau_{2i}]$.

Напомним сначала необходимые определения, связанные с понятием ограниченности решения системы (1).

Далее для каждого элемента $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ и любого числа $1 \leqslant k \leqslant n$ будем использовать обозначение $y = (x_1, \ldots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k$.

Определение 1 [14]. Решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) называется *ограниченным по части переменных* $y = (x_1, \ldots, x_k)^T$, $1 \leqslant k \leqslant n$, или, более кратко, y-*ограниченным*, если для этого решения существует число $\beta > 0$, для которого выполнено условие $\|y(t, t_0, x_0)\| \leqslant \beta$ при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$. Решение системы (1), которое не является y-ограниченным, называют y-*неограниченным*.

При $k = n$, т. е. при $y = x$, определение 1 становится определением из работы [11] ограниченного решения системы (1). Решение системы (1), которое не является ограниченным, называют неограниченным.

Определение 2 [12]. Решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) называется о*граниченным по Пуассону относительно части переменных* $y = (x_1, \ldots, x_k)^T$, $1 \leqslant k \leqslant n$, или, более кратко, y-*ограниченным по Пуассону*, если для этого решения существуют такие $\mathscr{P}$-последовательность $\tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ и число $\beta > 0$, что при всех $t \in R^+(t_0) \bigcap M(\tau)$ выполнено условие $\|y(t, t_0, x_0)\| \leqslant \beta$. При $k = n$ y-ограниченное по Пуассону решение системы (1) называется *ограниченным по Пуассону решением этой системы.*

Легко видеть, что если решение системы (1) является y-ограниченным, то это решение будет и y-ограниченным по Пуассону, поскольку в этом случае в качестве требуемой $\mathscr{P}$-последовательности можно взять любую $\mathscr{P}$-последовательность. В частности, если решение системы (1) является ограниченным, то это решение будет и ограниченным по Пуассону.

Отметим, что имеется также следующее определение y-ограниченного по Пуассону решения системы (1), которое, как показано в [13], эквивалентно определению 2.

Определение 3 [13]. Решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) называется y-*ограниченным по Пуассону*, если для этого решения существуют такие $\mathscr{P}$-последовательность $\xi = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$

и число $\beta > 0$, что для каждого $i \in \mathbb{N}$ выполнено условие $\|y(\xi_i, t_0, x_0)\| \leqslant \beta$. При $k = n$ y-ограниченное по Пуассону решение системы (1) называется *ограниченным по Пуассону решением этой системы.*

Рассмотрим теперь определения некоторых видов тотальной ограниченности всех решений системы (1). Пусть вместе с системой (1) задана еще одна система

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x) + H(t,x), \quad H(t,x) = (H_1(t,x), \ldots, H_n(t,x))^T, \quad n \geqslant 1, \tag{2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^+$ и $H : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — любая непрерывная функция, называемая *возмущением системы* (1). Далее будем предполагать, что все решения системы (2) продолжимы на всю временну́ю полуось $\mathbb{R}^+$.

Далее для каждого элемента $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ и произвольных чисел $1 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$ будем использовать обозначения $y = (x_1, \ldots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k$ и $z = (x_1, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$.

Определение 4 [15]. О решениях системы (1) говорят, что они тотально ограничены по части переменных $y = (x_1, \ldots, x_k)^T$, $1 \leqslant k \leqslant n$, с контролируемой частью начальных условий $z_0 = ((x_0)_1, \ldots, (x_0)_m)^T$, $1 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$, или, более кратко, *тотально y-ограничены с z_0-контролем*, если для каждого числа $\alpha \geqslant 0$ существуют такие числа $\beta > 0$ и $\gamma > 0$, что для любого решения $x = x(t, t_0, x_0)$, $t_0 \geqslant 0$, $\|z_0\| \leqslant \alpha$, любой системы (2), удовлетворяющей неравенству $\|H(t,x)\| \leqslant \gamma$ при $t \geqslant 0$ и $x \in B_{z,y}(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|z\| \geqslant \alpha, \|y\| \leqslant \beta\}$, выполнено условие $\|y(t, t_0, x_0)\| < \beta$ для всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$.

При $k < m = n$ определение 4 становится определением из работы [16] тотальной y-ограниченности решений системы (1). При $k = m = n$ определение 4 становится определением из работы [11] тотальной ограниченности решений системы (1).

Определение 5 [17]. О решениях системы (1) говорят, что они *тотально y-ограничены по Пуассону с z_0-контролем*, если для системы (1) найдется такая $\mathscr{P}$-последовательность $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$, и для каждого числа $\alpha \geqslant 0$ существуют такие числа $\beta > 0$ и $\gamma > 0$, что для любого решения $x = x(t, t_0, x_0)$, $t_0 \in M(\tau)$, $\|z_0\| \leqslant \alpha$, любой системы (2), удовлетворяющей неравенству $\|H(t,x)\| \leqslant \gamma$ при $t \geqslant 0$ и $x \in B_{z,y}(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|z\| \geqslant \alpha, \ \|y\| \leqslant \beta\}$, выполнено условие $\|y(t, t_0, x_0)\| < \beta$ для всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \bigcap M(\tau)$. При $k \leqslant m = n$ о решениях системы (1) говорят, что они *тотально y-ограничены по Пуассону.* При $k = m = n$ о решениях системы (1) говорят, что они *тотально ограничены по Пуассону.*

Очевидно, что если решения системы (1) тотально y-ограничены с z_0-контролем, то они тотально y-ограничены по Пуассону с z_0-контролем. В частности, если решения системы (1) тотально y-ограничены, то они тотально y-ограничены по Пуассону. Наконец, если решения системы (1) тотально ограничены, то они тотально ограничены по Пуассону. Кроме того, легко видеть, что без ограничения общности функцию $\beta = \beta(\alpha)$ из определения 6 всегда можно считать неубывающей.

Далее, если требуется точно указать соответствующую $\mathscr{P}$-последовательность $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$, будем говорить, что решения системы (1) тотально y-ограничены по Пуассону с z_0-контролем относительно $\mathscr{P}$-последовательности $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Аналогично будем говорить и в случае тотальной y-ограниченности по Пуассону, а также в случае тотальной ограниченности по Пуассону решений системы (1).

Напомним теперь необходимые понятия и конструкции, связанные с вектор-функциями Ляпунова [18]. Пусть задана произвольная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \quad X(t,x) = \big(X_1(t,x), \ldots, X_n(t,x)\big)^T, \quad n \geqslant 1, \tag{3}$$

правая часть которой определена и непрерывна в $\mathbb{R}^+ \times \Omega$, где $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ — замкнутое связное множество. Кроме того, пусть задана непрерывно дифференцируемая вектор-функция

$$V : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^l, \quad V(t,x) = \big(V_1(t,x), \dots, V_l(t,x)\big)^T, \quad l \geqslant 1.$$

Производная в силу системы (3) этой вектор-функции определяется равенством $\dot V(t,x) = (\dot V_1(t,x), \dots, \dot V_l(t,x))^T$, где $\dot V_i(t,x)$ — производная в силу системы (3) функции $V_i(t,x)$, $1 \leqslant i \leqslant l$. Для векторов $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_l)^T, \eta = (\eta_1, \dots, \eta_l)^T \in \mathbb{R}^l$ далее используется запись $\xi \leqslant \eta$, если $\xi_i \leqslant \eta_i$ для любого $1 \leqslant i \leqslant l$. Пусть теперь задана непрерывная вектор-функция

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l, \quad f(t,\xi) = \big(f_1(t,\xi), \dots, f_l(t,\xi)\big)^T, \quad l \geqslant 1.$$

Далее используется запись $f \in W$, если f удовлетворяет условию Важевского (см., например, [14]), которое заключается в том, что для каждого $1 \leqslant s \leqslant l$ функция f_s не убывает по переменным $\xi_1, \dots, \xi_{s-1}, \xi_{s+1}, \dots, \xi_l$, т. е. из $\xi_i \leqslant \eta_i$, $1 \leqslant i \leqslant l$, $i \neq s$, $\xi_s = \eta_s$ следует $f_s(t,\xi) \leqslant f_s(t,\eta)$. Отметим, что при $l = 1$ условие $f \in W$ вырождается. Далее для любой непрерывной функции $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ условимся считать, что $f \in W$. Непрерывно дифференцируемая вектор-функция $V : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^l$ и система

$$\frac{d\xi}{dt} = f(t,\xi), \quad f \in W \tag{4}$$

называются, соответственно, *вектор-функцией Ляпунова* и *системой сравнения для системы* (3), если для всех $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$ выполнено следующее условие:

$$\dot V(t,x) \leqslant f(t, V(t,x)). \tag{5}$$

Так как правая часть системы (4) непрерывна, то единственность решения задачи Коши для этой системы может нарушиться. Однако, условие $f \in W$ позволяет среди всех решений системы (4), проходящих через произвольную точку (t_0, ξ_0), выбрать верхнее решение $\overline{\xi}(t,t_0,\xi_0)$, т. е. решение, для которого справедливо неравенство $\xi(t,t_0,\xi_0) \leqslant \overline{\xi}(t,t_0,\xi_0)$ при всех $t \geqslant t_0$, где $\xi(t,t_0,\xi_0)$ — любое решение системы (4). Из теоремы Важевского (см., например, [14]) следует, что решение $x(t,t_0,x_0)$ системы (3), вектор-функция Ляпунова $V : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^l$ и верхнее решение $\overline{\xi}(t,t_0,V(t_0,x_0))$ системы сравнения (4) для системы (3) связаны между собой неравенством

$$V(t, x(t,t_0,x_0)) \leqslant \overline{\xi}(t,t_0,V(t_0,x_0)), \tag{6}$$

справедливым при всех $t \geqslant t_0$.

3. Основные результаты

Рассмотрим решение $x(t,t_0,x_0)$ системы (1), для которого выполнено условие $\lim_{t\to+\infty} y(t,t_0,x_0) \neq \infty$. Очевидно, что для этого решения найдется такая последовательность $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$, где $\lim_{i\to\infty} t_i = +\infty$, что $\lim_{i\to\infty} y(t_i,t_0,x_0) \neq \infty$. Если воспользоваться эквивалентностью определений 2 и 3, а также расписать по определению условие $\lim_{i\to\infty} y(t_i,t_0,x_0) \neq \infty$, то получим следующее необходимое и достаточное условие, характеризующее асимптотическое поведение y-ограниченного по Пуассону и, в частности, ограниченного по Пуассону решения системы (1).

Предложение 1. *Решение* $x(t,t_0,x_0)$ *системы* (1) *является* y*-ограниченным по Пуассону тогда и только тогда, когда* $\lim_{t\to+\infty} y(t,t_0,x_0) \neq \infty$. *В частности, решение системы* (1) *является ограниченным по Пуассону тогда и только тогда, когда* $\lim_{t\to+\infty} x(t,t_0,x_0) \neq \infty$.

Определение 6. Решение $x(t,t_0,x_0)$ системы (1) будем называть *y-осциллирующим*, если это решение является y-неограниченным и $\lim_{t\to+\infty} y(t,t_0,x_0) \neq \infty$.

При $k = n$ определение 6 становится определением из работы [1] (см. также [5]) осциллирующего решения системы (1).

Из предложения 1 и определения 6 следует, что любое y-ограниченное по Пуассону решение системы (1) является либо y-ограниченным либо y-осциллирующим. В частности, при $k = n$ получаем, что любое ограниченное по Пуассону решение системы (1) является либо ограниченным, либо осциллирующим. Из этого имеем следующее утверждение.

Предложение 2. *Решение системы* (1) *является* y*-осциллирующим тогда и только тогда, когда это решение* y*-ограничено по Пуассону, но* y*-неограничено. В частности, решение системы* (1) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда это решение ограничено по Пуассону, но неограничено.*

Введем теперь понятие тотальной y-осциллируемости с z_0-контролем решений, которое является специальным случаем понятия тотальной y-ограниченности по Пуассону с z_0-контролем решений.

Определение 7. Будем говорить, что решения системы (1) *тотально y-осциллируют с z_0-контролем*, если решения этой системы тотально y-ограничены по Пуассону с z_0-контролем и, кроме того, каждое решение любой системы (2), удовлетворяющей при $t \geqslant 0$ и $x \in B_{z,y}(\alpha,\beta)$ неравенству $\|H(t,x)\| \leqslant \gamma$, является y-неограниченным (здесь α, β, γ и $B_{z,y}(\alpha,\beta)$ такие же, как в определении 6). При $k \leqslant m = n$ будем говорить, что решения системы (1) *равномерно y-осциллируют*. При $k = m = n$ будем говорить, что решения системы (1) *равномерно осциллируют*.

Далее через $a, b, s, c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ будем обозначать произвольные функции, обладающие следующими свойствами:

1) a и s — возрастающие функции, которые удовлетворяют условиям $a(r) > 0$ и $s(r) > 0$ при любом $r \in \mathbb{R}^+$;

2) b — неубывающая функция, которая удовлетворяет условию $b(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$;

3) c — неубывающая функция, которая удовлетворяет условию $c(r) > 0$ при любом $r > 0$.

Для каждого элемента $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_l)^T \in \mathbb{R}^l$ и любых чисел $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant l$ далее будем использовать обозначения $\mu = (\xi_1, \ldots, \xi_p)^T$ и $\gamma = (\xi_1, \ldots, \xi_q)^T$. Кроме того, для любой $\mathscr{P}$-последовательности $\tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ наряду с указанным выше множеством $M(\tau) = \bigcup_{i=1}^{\infty}[\tau_{2i-1}; \tau_{2i}]$ далее будет рассматриваться еще и множество $N(\tau) = \bigcup_{i=1}^{\infty}[\tau_{2i}; \tau_{2i+1}]$.

Сформулируем и докажем теперь достаточное условие тотальной y-осциллируемости с z_0-контролем решений системы (1) в терминах вектор-функций Ляпунова.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *существуют* $\mathscr{P}$*-последовательность* $\tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$*, вектор-функция Ляпунова* $V : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^l$*, где* $\Omega = \mathbb{R}^n$*, с системой сравнения* (4)*, функции* $a, b, s, c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$*, обладающие указанными выше свойствами* 1)–3)*, числа* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant l$ *и непрерывно дифференцируемая положительная функция* $L : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, для которых выполнены следующие условия:*

1) $V_1(t,x) \geqslant 0, \ldots, V_q(t,x) \geqslant 0$ *для всех* $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$*;*

2) $b(\|y\|) \leqslant \sum_{i=1}^{p} V_i(t,x)$ *для всех* $(t,x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$;

3) $\sum_{i=1}^{q} V_i(t,x) \leqslant a(\|z\|)$ *для всех* $(t,x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$;

4) $\|(\partial V_i/\partial x)(t,x)\| \leqslant L_i$, $1 \leqslant i \leqslant l$, *для всех* $(t,y) \in \mathbb{R}^+ \times K$, *где* K *— любое компактное подмножество в* $\mathbb{R}^k$ *и* $L = (L_1, \dots, L_l)^T > 0$ *— постоянный вектор, зависящий от* K*;*

5) $L(t,x) \leqslant s(\|y\|)$ *для всех* $(t,x) \in N(\tau) \times \mathbb{R}^n$;

6) $\dot{L}(t,x) \geqslant c(L(t,x))$ *для всех* $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, *где* $\dot{L}(t,y)$ *— производная функции* $L(t,x)$ *в силу системы* (1).

Кроме того, пусть решения системы сравнения (4) *для системы* (1) *тотально* μ*-ограничены по Пуассону с* γ_0*-контролем относительно* $\mathscr{P}$*-последовательности* $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$. *Тогда решения системы* (1) *тотально* y*-осциллируют с* z_0*-контролем.*

$\lhd$ Покажем сначала, что решения системы (1) тотально y-ограничены по Пуассону с z_0-контролем. Пусть задано произвольное число $\alpha \geqslant 0$. Заметим сначала, что из условий 1) и 3) теоремы следует, что для вектора $V^\gamma(t_0,x_0) = (V_1(t_0,x_0), \dots, V_q(t_0,x_0))^T$, где $(t_0,x_0) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$ и $\|z_0\| \leqslant \alpha$, справедливы неравенства

$$\|V^\gamma(t_0,x_0)\| \leqslant \sum_{i=1}^{q} |\, V_i(t_0,x_0)| = \sum_{i=1}^{q} V_i(t_0,x_0) \leqslant a(\|z_0\|) \leqslant a(\alpha).$$

Для нахождения требуемых чисел $\beta = \beta(\alpha)$ и $\gamma = \gamma(\alpha)$ рассмотрим систему сравнения (4) для системы (1). Так как по условию решения системы сравнения тотально μ-ограничены по Пуассону γ_0-контролем, то для числа $a(\alpha)$ найдутся такие числа $\lambda = \lambda(a(\alpha))$ и $\delta = \delta(a(\alpha))$, что для произвольного решения $\xi(t,t_0,V(t_0,x_0))$ любой системы $\dot{\xi} = f(t,\xi) + h(t,\xi)$, где $\|h(t,\xi)\| \leqslant \delta$ при $t \geqslant 0$ и $\xi \in B_{\gamma,\mu}(a(\alpha),\lambda)$, выполнено условие $\|\mu(t,t_0,V(t_0,x_0))\| < \lambda$ для всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$. Пользуясь условием $b(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$ и тем, что число $p \geqslant 1$ из условий теоремы фиксировано, выберем такое число $\beta = \beta(\alpha)$, что $(p \cdot \lambda(a(\alpha))) < b(\beta)$. Число $\gamma = \gamma(\alpha)$ определим, полагая $\gamma = (1/\|L\|)\delta(a(\alpha))$, где постоянный вектор L выбран для компактного в $\mathbb{R}^k$ множества $B_{z,y}(\alpha,\beta) \cap \mathbb{R}^k$. Рассмотрим теперь любую систему

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x) + H(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times B_{z,y}(\alpha,\beta), \tag{2$'$}$$

удовлетворяющую условию $\|H(t,x)\| \leqslant \gamma = \gamma(\alpha) = (1/\|L\|)\delta(a(\alpha))$. Для производной $\dot{V}_{F(t,x)+H(t,x)}(t,x)$ вектор-функции $V(t,x)$ в силу системы (2$'$), пользуясь условием 4) теоремы, имеем

$$\dot{V}_{F(t,x)+H(t,x)}(t,x) = \dot{V}_{F(t,x)}(t,x) + ((\partial V(t,x))/(\partial x)) \cdot H(t,x) \leqslant f(t,V(t,x)) + L\gamma,$$

где $((\partial V(t,x))/(\partial x)) \cdot H(t,x)$ — умножение матрицы на вектор и $L\gamma$ — умножение вектора на число. Так как для непрерывной вектор-функции $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$, $g(t,\xi) = f(t,\xi) + L\gamma$, выполнено условие $g \in W$, то система $\dot{\xi} = f(t,\xi) + L\gamma$ является системой сравнения для системы (2$'$). По условию решения системы сравнения $\dot{\xi} = f(t,\xi)$ для системы (1) тотально μ-ограничены по Пуассону с γ_0-контролем относительно $\mathscr{P}$-последовательности $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Поэтому из равенства $\|L\gamma\| = \delta(a(\alpha))$ получаем, что для верхнего решения $\overline{\xi}(t,t_0,V(t_0,x_0))$ системы сравнения $\dot{\xi} = f(t,\xi) + L\gamma$ при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \bigcap M(\tau)$ выполнено условие

$$\|\,\overline{\mu}(t,t_0,V(t_0,x_0))\| < \lambda(a(\alpha)),$$

где $\overline{\mu}(t,t_0,V(t_0,x_0)) = (\overline{\xi}_1(t,t_0,V(t_0,x_0)), \dots, \overline{\xi}_p(t,t_0,V(t_0,x_0)))$. Пользуясь условием 2) теоремы и неравенством (6), получаем для решения $\widetilde{x}(t,t_0,x_0)$ системы (2$'$) и верхнего

решения $\overline{\xi}(t,t_0,V(t_0,x_0))$ системы сравнения $\dot{\xi}=f(t,\xi)+L\gamma$ справедливые при всех $t\in\mathbb{R}^+(t_0)\cap M(\tau)$ неравенства

$$b\big(\|\widetilde{y}(t,t_0,x_0)\|\big)\leqslant\sum_{i=1}^{p}V_i\big(t,\widetilde{x}(t,t_0,x_0)\big)\leqslant\sum_{i=1}^{p}\overline{\xi}_i\big(t,t_0,V(t_0,x_0)\big),$$

где $\widetilde{y}(t,t_0,x_0)=(\widetilde{x}_1(t,t_0,x_0),\ldots,\widetilde{x}_k(t,t_0,x_0))$. Кроме того, для всех $t\in\mathbb{R}^+$ имеем очевидные неравенства

$$\sum_{i=1}^{p}\overline{\xi}_i(t,t_0,V(t_0,x_0))\leqslant\sum_{i=1}^{p}\big|\,\overline{\xi}_i(t,t_0,V(t_0,x_0))\big|\leqslant p\cdot\big\|\,\overline{\mu}(t,t_0,V(t_0,x_0))\big\|.$$

Так как $p\cdot\|\,\overline{\mu}(t,t_0,V(t_0,x_0))\|\leqslant p\cdot\lambda(a(\alpha))<b(\beta)$, то из указанных выше неравенств получаем $b(\|\widetilde{y}(t,t_0,x_0)\|)<b(\beta)$ при всех $t\in\mathbb{R}^+(t_0)\cap M(\tau)$ и, следовательно, для всех $t\in\mathbb{R}^+(t_0)\cap M(\tau)$ имеем $\|\widetilde{y}(t,t_0,x_0)\|<\beta$, поскольку функция $b(r)$ неубывающая. Покажем теперь, что для любого решения $x(t,t_0,x_0)$, $t_0\in M(\tau)$, $\|z_0\|\leqslant\alpha$, системы (2), где $\|H(t,x)\|\leqslant\gamma(\alpha)$ при $t\geqslant0$ и $x\in B_{z,y}(\alpha,\beta)$, выполнено условие $\|y(t,t_0,x_0)\|<\beta$ при всех $t\in\mathbb{R}^+(t_0)\cap M(\tau)$. Предположим от противного, что для некоторого $t_1>t_0$, $t_1\in M(\tau)$, выполнены условия $\|y(t,t_0,x_0)\|<\beta$ при $t_0\leqslant t<t_1$, $t\in M(\tau)$, и $\|y(t_1,t_0,x_0)\|=\beta_1\geqslant\beta$. Пусть $t_1\in[\tau_{2i-1};\tau_{2i}]$ для некоторого $i\geqslant1$. Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть $\tau_{2i-1}<t_1\leqslant\tau_{2i}$. Тогда из непрерывности на интервале $[\tau_{2i-1};\tau_{2i}]$ функции $\|y(t,t_0,x_0)\|$ по переменной t следует, что $\beta_1=\beta$. В этом случае решение $x(t,t_0,x_0)$ системы (2), рассматриваемое при $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, является решением системы $(2')$, рассматриваемым при $t_0\leqslant t\leqslant t_1$. Из этого, как было сказано выше, следует, что $\|y(t,t_0,x_0\|<\beta$ при $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, $t\in M(\tau)$. В частности, получаем $\|y(t_1,t_0,x_0)\|<\beta$, что противоречит равенству $\|y(t_1,t_0,x_0)\|=\beta$.

2) Пусть $t_1=\tau_{2i-1}$ и $\beta_1=\beta$. В этом случае, так же, как и в случае 1), получаем $\|y(t_1,t_0,x_0)\|<\beta$, что противоречит равенству $\|y(t_1,t_0,x_0)\|=\beta$.

3) Пусть $t_1=\tau_{2i-1}$ и $\beta_1>\beta$. В этом случае рассмотрим любую систему

$$\frac{dx}{dt}=F(t,x)+H(t,x),\quad (t,x)\in\mathbb{R}^+\times B_{z,y}(\alpha,\beta_1),\tag{$2''$}$$

удовлетворяющую условию $\|H(t,x)\|\leqslant\gamma_1=\gamma_1(\alpha)=(1/\|L_1\|)\delta(a(\alpha))$, где постоянный вектор L_1 выбран для компактного в $\mathbb{R}^k$ множества $B_{z,y}(\alpha,\beta_1)\cap\mathbb{R}^k$. Так как $\beta<\beta_1$ и функция $b(r)$ неубывающая, то имеем $(p\cdot\lambda(a(\alpha)))<b(\beta)\leqslant b(\beta_1)$. Поэтому, если в проведенных выше рассуждениях вместо β взять β_1, то аналогично тому, как это было сделано выше для системы $(2')$, получаем, что для решения $\widehat{x}(t,t_0,x_0)$ системы $(2'')$ при всех $t\in\mathbb{R}^+(t_0)\bigcap M(\tau)$ справедливо неравенство $\|\widehat{y}(t,t_0,x_0)\|<\beta_1$. Рассуждая теперь аналогично случаю 2), получим для решения $x(t,t_0,x_0)$ системы (2) неравенство $\|y(t_1,t_0,x_0)\|<\beta_1$, что противоречит равенству $\|y(t_1,t_0,x_0)\|=\beta_1$.

Подводя итог рассмотрению случаев 1)−3), заключаем, что сделанное выше предположение от противного неверно и, следовательно, для любого решения $x(t,t_0,x_0)$, $t_0\in M(\tau)$, $\|z_0\|\leqslant\alpha$, системы (2), где $\|H(t,x)\|\leqslant\gamma(\alpha)$ при $t\geqslant0$ и $x\in B_{z,y}(\alpha,\beta)$, выполнено условие $\|y(t,t_0,x_0)\|<\beta$ для всех $t\in\mathbb{R}^+(t_0)\bigcap M(\tau)$. Таким образом, показано, что решения системы (1) тотально y-ограничены по Пуассону с z_0-контролем.

Покажем теперь, что каждое решение системы (1) является y-неограниченным. Предположим от противного, что при выполнении условий теоремы любое решение системы (1) является y-ограниченным, т. е. для каждого решения $x(t,t_0,x_0)$ этой системы

существует такое число $\beta > 0$, что $\|y(t,t_0,x_0)\| \leqslant \beta$ при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$. Из этого, пользуясь условием 4) теоремы, имеем

$$L(t,x(t,t_0,x_0)) \leqslant s(\|y(t,t_0,x_0)\|) \leqslant s(\beta)$$

при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap N(\tau)$. С другой стороны, при помощи условия 5) теоремы получаем для всех $\mathbb{R}^+(t_0)$ неравенство

$$L(t,x(t,t_0,x_0)) = L(t_0,x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \dot{L}(\xi,x(\xi,t_0,x_0))d\xi \geqslant L(t_0,x_0) + c(L(t_0,x_0))(t-t_0).$$

Из этого неравенства и неравенства $s(\beta) \geqslant L(t,x(t,t_0,x_0))$, справедливого для всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap N(\tau)$, следует, что $s(\beta) \geqslant L(t_0,x_0) + c(L(t_0,x_0))(t-t_0)$ при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap N(\tau)$, что невозможно, поскольку $s(\beta)$ – фиксированное число и $c(L(t_0,x_0)) > 0$. Таким образом, предположение о том, что любое решение системы (1) является y-ограниченным привело к противоречию и, следовательно, каждое решение этой системы является y-неограниченным. Из этого, учитывая доказанную выше тотальную y-ограниченность по Пуассону с z_0-контролем решений системы (1), получаем, что решения системы (1) тотально y-осциллируют с z_0-контролем. $\rhd$

Отметим, что если для присутствующих в формулировке теоремы 1 элементов $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^k$ и $z \in \mathbb{R}^m$, где $1 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$, выполнено условие $k \leqslant m = n$, то теорема 1 становится достаточным условием тотальной y-осциллируемости решений системы (1). При $k = m = n$ теорема 1 превращается в достаточное условие тотальной осциллируемости решений системы (1).

Рассмотрим отдельно случай, когда в теореме 1 для вектор-функций Ляпунова берется $l = 1$, т. е. когда в качестве вектор-функций Ляпунова берутся функции Ляпунова. Легко видеть, что если в рассматриваемом случае воспользоваться неравенством (5), то получим следующее достаточное условие тотальной y-осциллируемости с z_0-контролем решений системы (1) в терминах функций Ляпунова.

Следствие 1. *Пусть для системы* (1) *существуют такие $\mathscr{P}$-последовательность $\tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$, неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, функции $a, b, s, c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, обладающие указанными выше свойствами* 1)–3)*, непрерывно дифференцируемая положительная функция $L : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и непрерывная функция $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что выполнены следующие условия:*

1) $b(\|y\|) \leqslant V(t,x) \leqslant a(\|z\|)$ *для всех* $(t,x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$;

2) $\dot{V}(t,x) \leqslant f(t,V(t,x))$ *для всех* $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$;

3) $\|(\partial V/\partial x)(t,x)\| \leqslant M$ *для всех* $(t,y) \in \mathbb{R}^+ \times K$, *где* K *— любое компактное подмножество в* $\mathbb{R}^k$ *и* $M > 0$ *— число, которое зависит от* K;

4) $L(t,x) \leqslant s(\|y\|)$ *для всех* $(t,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$;

5) $\dot{L}(t,x) \geqslant c(L(t,x))$ *для всех* $(t,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

Кроме того, пусть решения уравнения $\dot{\xi} = f(t,\xi)$ тотально ограничены по Пуассону относительно $\mathscr{P}$-последовательности $\tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Тогда решения системы (1) *тотально y-осциллируют с z_0-контролем.*

Отметим, что если для присутствующих в формулировке следствия 1 элементов $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^k$ и $z \in \mathbb{R}^m$, где $1 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$, выполнено условие $k \leqslant m = n$, то следствие 1 становится достаточными условием тотальной y-осциллируемости решений системы (1). При $k = m = n$ следствие 1 превращается в достаточное условие тотальной осциллируемости решений системы (1).

Литература

1. *Chazy Z.* Sur l′allure finale du mouvement dans le probléme des trois corps quand le temps croit indefiniment // Annales de l′Ecole Norm. Sup. 3^{e}ser.—1922.—Ser. 39.—P. 29–130.
2. *Ситников К. А.* Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // Докл. АН СССР.—1960.—Т. 133, № 2.—С. 303–306.
3. *Леонтович А. М.* О существовании осциллирующих траекторий в одной биллиардной задаче // Докл. АН СССР.—1962.—Т. 145, № 3.—С. 523–526.
4. *Алексеев В. М.* Квазислучайные динамические системы. II // Мат. сб.—1968.—Т. 77 (119), № 4.—С. 545–601.
5. *Пустыльников Л. Д.* Существование множества положительной меры осциллирующих движений в одной задаче динамики // Докл. АН СССР.—1972.—№ 2 (202).—С. 287–289.
6. *Пустыльников Л. Д.* О строгом обосновании возможности неограниченного роста энергии частиц в одной задаче ядерной физики // Докл. АН СССР.—1985.—№ 3 (283).—С. 550–553.
7. *Пустыльников Л. Д.* Новый механизм ускорения частиц и релятивистский аналог модели Ферми — Улама // Теор. и мат. физика.—1988.—Т. 77, № 1.—С. 154–160.
8. *Пустыльников Л. Д.* Модели Пуанкаре, строгое обоснование второго начала термодинамики из механики и механизм ускорения Ферми // Успехи мат. наук.—1995.—Т. 50, № 1 (301).—С. 146–183.
9. *Пустыльников Л. Д., Дерябин М. В.* Черные дыры и обобщенные релятивистские биллиарды // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша.—2013.—№ 54.—36 с.
10. *Лапин К. С.* Равномерная ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений и вектор-функции Ляпунова // Диф. уравнения.—2018.—Т. 54, № 1.—С. 40–50. DOI: 10.1134/S0374064118010053.
11. *Йосидзава Т.* Функция Ляпунова и ограниченность решений / Пер. Б. П. Демидовича // Математика.—1965.—№ 5.—С. 95–127.
12. *Лапин К. С.* Вектор-функции Ляпунова, канонические области Красносельского и существование ограниченных по Пуассону решений // Диф. уравнения.—2020.—Т. 56, № 10.—С. 1304–1309. DOI: 10.1134/S0374064120100027.
13. *Лапин К. С.* Вектор-функции Ляпунова, вращения векторных полей, направляющие функции и существование ограниченных по Пуассону решений // Диф. уравнения.—2021.—Т. 57, № 3.—С. 306–312. DOI: 10.31857/S037406412103002X.
14. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения относительно части переменных.—М.: Наука, 1987.—253 с.
15. *Лапин К. С.* Частичная тотальная ограниченность решений систем дифференциальных уравнений с частично контролируемыми начальными условиями // Мат. заметки.—2016.—Т. 99, вып. 2.—С. 239–247. DOI: 10.4213/mzm10876.
16. *Miki K., Masamichi A., Shoichi S.* On the partial total stability and partially total boundednes of a system of ordinary differential equations // Res. Rept. Akita Tech. Coll.—1985.—Vol. 20.—P. 105–109.
17. *Лапин К. С.* Тотальная ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений и вектор-функции Ляпунова // Мат. заметки.—2018.—Т. 104, вып. 2.—С. 243–254. DOI: 10.4213/mzm11683.
18. *Матросов В. М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем.—М.: Физматлит, 2001.—373 с.

Статья поступила 4 октября 2021 г.

Лапин Кирилл Сергеевич
Мордовский государственный педагогический университет им. М. Е. Евсевьева,
доцент кафедры математики и методики обучения математике
РОССИЯ, 430007, Саранск, ул. Студенческая, 11 А
E-mail: `klapin@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-8367-4494

Vladikavkaz Mathematical Journal
, Volume , Issue , P. 105–116

TOTAL POISSON BOUNDEDNESS AND TOTAL OSCILLABILITY OF SOLUTIONS OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Lapin, K. S. [1]

[1] Mordovian State Pedagogical University named after M. E. Evseviev,
11 A Studencheskaya St., Saransk 430007, Russia

E-mail: `klapin@mail.ru`

Abstract. In the works of the author, the study of a special form of boundedness of solutions of systems of differential equations, namely, their Poisson boundedness, has started. The concept of Poisson boundedness of a solution generalizes the classical concept of boundedness of a solution and means that there is a ball in the phase space and there is a countable system of disjoint intervals on the time semiaxis such that the sequence of right ends of intervals tends to plus infinity and the solution for all values of time from these intervals is contained in the ball. Further, in the author's papers, on the basis of methods of Lyapunov functions, Lyapunov vector functions, and higher-order derivatives of Lyapunov functions, sufficient conditions for various types of Poisson boundedness of all solutions were obtained. In particular, sufficient conditions were obtained for total Poisson boundedness (Poisson boundedness under small perturbations), partial total Poisson boundedness, and also partial total Poisson boundedness of solutions with partially controlled initial conditions. In this paper, we obtaine an asymptotic or, in other words, final characterization of the concept of Poisson boundedness of a solution, which made it possible to establish a connection between the concept of a Poisson bounded solution and the concept of an oscillating solution. Further, the concepts of total oscillating of solutions, partial total oscillating of solutions, and partial total oscillating of solutions with partially controlled initial conditions are introduced. Based on the above final characterization of the concept of Poisson boundedness of a solution, and also on the basis of the method of Lyapunov vector functions with comparison systems, we obtain sufficient conditions for total oscillating, partial total oscillating, and partial total oscillating of solutions with partially controlled initial conditions. As a consequence, sufficient conditions for the above types of total oscillating of solutions are obtained in terms of Lyapunov functions.

Key words: total boundedness of solutions, unboundedness of solutions, Lyapunov vector functions, Poisson boundedness of solutions, oscillating of solutions, partial oscillating of solutions.

AMS Subject Classification: 34C11, 34D20.

For citation: *Lapin, K. S.* Total Poisson Boundedness and Total Oscillability of Solutions of Systems of Differential Equations // *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 4, pp. 105–116 (in Russian). DOI: 10.46698/w0398-0994-2990-z.

References

1. *Chazy, Z.* Sur l′allure Finale du Mouvement dans le Probléme des Trois Corps Quand le Temps Croit Indefiniment, *Annales de l′Ecole Normale Supérieure.* 3^{e}*ser.*, 1922, ser. 39, pp. 29–130.
2. *Sitnikov, K.* The Existence of Oscillatory Motions in the Three-Body Problems, *Soviet Physics Doklady*, 1960, vol. 5, pp. 647–650.
3. *Leontovich, A. M.* On the Existence of Unbounded Oscillating Trajectories in a Billiard Problem, *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of USSR], 1962, vol. 145, no. 3, pp. 523–526 (in Russian).
4. *Alekseev, V. M.* Quasirandom Dynamical Systems. II. One-Dimensional Nonlinear Vibrations in a Periodically Perturbed Field, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1968, vol. 6, no. 4, pp. 505–560. DOI: 10.1070/SM1968v006n04ABEH001074.
5. *Pustyl'nikov, L. D.* The Existence of a Set of Positive Measure of Oscillating Motions in a Certain Problem of Dynamics, *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of USSR], 1972, vol. 202, no. 2, pp. 287–289 (in Russian).
6. *Pustyl'nikov, L. D.* Strict Justification of the Possibility of Unbounded Increase in Particle Energy in a Problem of Nuclear Physics, *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of USSR], 1985, vol. 283, no. 3, pp. 550–553 (in Russian).

7. *Pustyl'nikov, L. D.* A New Mechanism for Particle Acceleration and a Relativistic Analogue of the Fermi–Ulam Model, *Theoretical and Mathematical Physics*, 1988, vol. 77, no. 1, pp. 1110–1115. DOI: 10.1007/BF01028687.
8. *Pustyl'nikov, L. D.* Poincaré Models, Rigorous Justification of the Second Element of Thermodynamics on the Basis of Mechanics, and the Fermi Acceleration Mechanism, *Russian Mathematical Surveys*, 1995, vol. 50, no. 1, pp. 145–149. DOI: 10.1070/RM1995v050n01ABEH001663.
9. *Pustyl'nikov, L. D. and Deryabin, M. V.* Black Holes and Generalized Relativistic Billiards *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha* [Keldysh Institute Preprints], 2013, vol. 54, 36 p. (in Russian).
10. *Lapin, K. S.* Uniform Boundedness in the Sense of Poisson of Solutions of Systems of Differential Equations and Lyapunov Vector Functions, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 38–48. DOI: 10.1134/S0012266118010056.
11. *Yoshizawa, T.* Liapunov's Function and Boundedness of Solutions, *Funcialaj Ekvacioj*, 1959, vol. 2, pp. 95–142.
12. *Lapin, K. S.* Lyapunov Vector Functions, Krasnosel'skii Canonical Domains, and Existence of Poisson Bounded Solutions, *Differential Equations*, 2020, vol. 56, no. 10, pp. 1270–1275. DOI: 10.1134/S0012266120010002X.
13. *Lapin, K. S.* Lyapunov Vector Functions, Rotation of Vector Fields, Guiding Functions, and the Existence of Poisson Bounded Solutions, *Differential Equations*, 2021, vol. 57, no. 3, pp. 284–290. DOI: 10.1134/S0012266121030022.
14. *Rumyantsev, V. V. and Oziraner, A. S. Ustoychivost' i stabilizatsiya dvijeniya otnositel'no chati peremennyh* [Stability and stabilization of motion with respect to part of variables], Moscow, Nauka, 1987, 253 p. (in Russian).
15. *Lapin, K. S.* Partial Total Boundedness of Solutions to Systems of Differential Equations with Partly Controlled Initial Conditions, *Mathematical Notes*, 2016, vol. 99, no. 2, pp. 253–260. DOI: 10.1134/S0001434616010272.
16. *Miki, K., Shoichi, S. and Masamichi, A.* On the Partial Total Stability and Partially Total Boundednes of a System of Ordinary Differential Equations, *Res. Rept. Akita Tech. Coll.*, 1985, vol. 20, pp. 105–109.
17. *Lapin, K. S.* Poisson Total Boundedness of Solutions of Systems of Differential Equations and Lyapunov Vector Functions, *Mathematical Notes*, 2018, vol. 104, no. 2, pp. 253–262. DOI: 10.1134/S000143461807026X.
18. *Matrosov, V. M. Metod vektornyh funktsiy Lyapunova: analiz dinamicheskih svoystv nelineynyh sistem* [Method of Lyapunov Vector Functions: Analisys of Dynamical Properties of Nonlinear Systems], Moscow, Fizmatlit, 2001, 373 p. (in Russian).

Received October 4, 2021

Kirill S. Lapin
Mordovian State Pedagogical University named after M. E. Evseviev,
11 A Studencheskaya St., Saransk 430007, Russia,
Associate Professor
E-mail: `klapin@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-8367-4494