Владикавказский математический журнал
, Том , Выпуск , С. 1–27

УДК 517.958
DOI 10.46698/l4464-6098-4749-m

КВАЗИДВУМЕРНАЯ КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В СЛАБО ГОРИЗОНТАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С ПАМЯТЬЮ[#]

З. А. Ахматов[1], Ж. Д. Тотиева[1,2]

[1] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22;
[2] Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22

E-mail: `ahmatov1993@yandex.ru`, `jannatuaeva@inbox.ru`

Аннотация. В работе представлена обратная задача последовательного определения двух неизвестных — коэффициента, характеризующего свойства среды со слабо горизонтальной неоднородностью, и ядра интегрального оператора, описывающего память среды. Прямая начально-краевая задача содержит нулевые данные и граничное условие Неймана. В качестве дополнительной информации задается след на границе среды Фурье-образа решения прямой задачи. Для исследования обратных задач предполагается, что искомый коэффициент разлагается в асимптотический ряд по степеням малого параметра. В статье построен метод нахождения (с учетом памяти среды) коэффициента с точностью до поправки, имеющей порядок $O(\epsilon^2)$. На первом этапе одновременно определяется решение прямой задачи в нулевом приближении и ядро интегрального оператора, при этом обратная задача сводится к эквивалентной задаче решения системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. На втором этапе ядро считается заданным, и одновременно определяется решение прямой задачи в первом приближении и искомый коэффициент. В этом случае решение эквивалентной обратной задачи будет решением линейной системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Доказаны теоремы однозначной локальной разрешимости поставленных обратных задач. Приведены результаты численных расчетов функции ядра и коэффциента.

Ключевые слова: обратная задача, дельта-функция, ядро, преобразование Фурье, интегро-дифференциальное уравнение.

Mathematical Subject Classification (2010): 35L20, 35R30, 35Q99.

Образец цитирования: *Ахматов З. А., Тотиева Ж. Д.* Квазидвумерная коэффициентная обратная задача для волнового уравнения в слабо горизонтально-неоднородной среде с памятью // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, вып. 4.—С. 15–27. DOI: 10.46698/l4464-6098-4749-m.

1. Введение. Постановка задачи

Как известно, учет памяти среды при распространении в ней упругих, акустических и электромагнитных волн, дает более точное описание процессов, происходящих в этих средах. Поэтому восстановление неизвестных характеристик для сред с последействием,

[#]Работа выполнена в Северо-Кавказском центре математических исследований ВНЦ РАН при поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2021-1844.

несомненно, является актуальной задачей. Для практических приложений более интересным является случай, когда характеристики среды зависят от двух и более переменных. Например, для геофизики одним из основных вопросов является количественная оценка горизонтальных неоднородностей в скоростях сейсмических волн. Накоплены факты, свидетельствующие о существовании внутри Земли неоднородностей по географичесим координатам, или горизонтальных неоднородностей. К числу таких фактов относятся систематические отклонения годографов волн от усредненного годографа, асиметрия гравитационного и электромагнитного полей. При этом отклонения от годографов, отвечающих сферически-симметричному распределению скоростей упругих волн, достаточно малы [1].

Целью данной работы является определение двумерного коэффициента и ядра интегрального оператора для волного уравнения в слабо горизонтально-неоднородной среде.

Для $(x, z, t) \in \mathbb{R}^3$, $z > 0$, рассмотрим *прямую задачу* определения функции $u(x, z, t)$ из интегро-дифференциального уравнения:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{zz} - q(x,z)u = \int\limits_0^t k(\tau)\, u(x,z,t-\tau)\, d\tau, \tag{1.1}$$

$$u\big|_{t<0} = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=+0} = -\delta'(x)\delta'(t), \tag{1.3}$$

где $\delta'(\cdot)$ — производная дельта-функции Дирака; $q(x, z)$ — коэффициент, характеризующий свойства среды, в которой распространяется волновой процесс; $k(t)$ — ядро, описывающее память среды.

При заданных функциях $q(x, z)$, $k(t)$ задача (1.1)–(1.3) корректно поставлена и имеет единственное решение $u(x, z, t)$, обладающее компактным носителем при любом конечном t.

Обратная задача заключается в определении коэффициента $q(x, z), (x, z) \in \mathbb{R}^2$, $z > 0$ и $k(t)$, $t > 0$, входящих в (1.1), если относительно решения прямой задачи (1.1)–(1.3) известна дополнительная информация

$$u(x,z,t)|_{z=0} = f(x,t), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

$f(x, t)$ — заданная функция.

Определение. Пара функций $q(x, z)$, $k(t)$ из класса непрерывных функций $C(R_+)$ и $C(R \times R_+)$, соответственно, называется *решением обратной задачи* (1.1)–(1.4), если соответствующее ей решение прямой задачи (1.1)–(1.3) $u(x, z, t)$ из класса обобщенных функций $D'(R \times R_+^2)$ удовлетворяет (1.4) для $f(x, t)$, принадлежащих классу функций $D'(R \times R_+)$.

Задачи по определению ядер интегральных операторов — это интенсивно развивающееся направление в теории обратных задач. Первые результаты по данному направлению отражены в работах [2–8]. Одной из фундаментальных работ по определению ядер для гиперболических уравнений является монография [9]. В ней представлены результаты исследования корректности ряда постановок одномерных и многомерных обратных динамических задач. Литературные источники, представленные в монографии достаточно полно отражают исследования в области задач определения ядер. Из последних результатов в этой области можно отметить, например, работы [10–17].

Методика данного исследования базируется на развитых ранее методах исследований обратных задач для уравнений гиперболического типа [18–20]. В частности, в работе [19] рассмотрена одна модельная задача определения двумерного ядра интегродифференциального уравнения в среде со слабо горизонтальной неоднородностью, в которой развиты методы решения обратных задач из работы [18].

В работе [20] изучена обратная задача по определению двух неизвестных функций для уравнения, описывающего процесс распространения волн в полупространстве, заполненном средой. Было показано, что обе искомые функции одной переменной однозначно определяются заданием образа Фурье по переменной x решения прямой задачи на границе полупространства.

Предполагаем, что $q(x,z)$ слабо зависит от горизонтальной переменной x:

$$q(x,z) = q_0(z) + \varepsilon x q_1(z) + O(\varepsilon^2), \tag{1.5}$$

где ε — малый параметр. В дальнейшем будем полагать в равенстве (1.5) $q_0(z) \equiv q_0 > 0$ есть известная величина.

Решение прямой задачи (1.1)–(1.3) будем искать в виде ряда по степеням ε:

$$u(x,z,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j(x,z,t). \tag{1.6}$$

Тогда, учитывая (1.4) и (1.6), имеем

$$f(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j f_j(x,t). \tag{1.7}$$

Нетрудно проверить, что u_j (следовательно и f_j) — нечетные по x при четных j и четные — при нечетных j. Тем самым, по известной функции $f(x,t)$ можно найти $f_0(x,t)$ и $f_1(x,t)$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$:

$$f_0(x,t) = \frac{f(x,t) - f(-x,t)}{2}, \quad f_1(x,t) = \frac{f(x,t) + f(-x,t)}{2}.$$

Подставляя (1.5), (1.6) в (1.1)–(1.4) и приравнивая коэффициенты при ε^j, $j = 0,1$, получаем две обратные одномерные задачи последовательного определения $k(t)$ и $q_1(z)$, которые будут рассмотрены в параграфах 2 и 3 соответственно. Для решения обратных задач достаточно задать образ Фурье от функций $f_0(x,t)$ и $f_1(x,t)$ по переменной x для фикисированного ненулевого значения параметра преобразования. Результатами исследования являются теоремы однозначной локальной разрешимости решения обратных задач.

2. Задача определения $u_0(x,z,t)$ и $k(t)$

Рассмотрим прямую задачу определения $u_0(x,z,t)$ из следующей начально-краевой задачи:

$$(u_0)_{tt} = (u_0)_{xx} + (u_0)_{zz} + q_0 \cdot u_0 - \int_0^t k(\tau) u_0(x,z,t-\tau)\, d\tau, \qquad (x,z,t) \in \mathbb{R}^3, \ \ z > 0, \tag{2.1}$$

$$u_0\big|_{t<0} = 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial z}\bigg|_{z=+0} = -\delta'(x)\delta'(t). \tag{2.3}$$

Применяя преобразования Фурье, получаем

$$(\tilde{u}_0)_{tt} = (\tilde{u}_0)_{zz} + \big(q_0 - \nu^2\big)\tilde{u}_0 - \int\limits_0^t k(\tau)\tilde{u}_0(\nu, z, t-\tau)\,d\tau, \quad z > 0,\ t \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

$$\tilde{u}_0\big|_{t<0} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial z}\bigg|_{z=0} = -i\nu\delta'(t), \tag{2.5}$$

где $\tilde{u}_0(\nu, z, t) = F_x[u_0](\nu, z, t) := \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x, z, t)e^{-i\nu x}dx$.

Обратная задача 1. Найти $u_0(\nu, z, t)$ и $k(t)$, входящие в (2.4)–(2.5), если $u_0(\nu, z, t)$ для некоторого ненулевого значения параметра ν известно

$$\tilde{u}_0(\nu, z, t)\big|_{z=0} = i\nu\delta(t) + \tilde{f}_0(\nu, t)\,\theta(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

где $\tilde{f}_0(\nu, t) = F_x[f_0](\nu, t)$ — заданная функция, $\theta(t)$ — функция Хевисайда (далее знак $\tilde{}$ над функциями u_0, f_0 будет опущен).

Будем искать решение (2.4)–(2.5) в виде

$$u_0(\nu, z, t) = i\nu\delta(t-z) + v(\nu, z, t)\,\theta(t-z). \tag{2.7}$$

Тогда, подставляя (2.7) в (2.4)–(2.5) и применяя метод выделения особенностей [21], относительно функции $v(\nu, z, t)$ получим

$$v_{tt} - v_{zz} - (q_0 - \nu^2)v = -i\nu k(t-z) - \int\limits_0^{t-z} k(\tau)v(\nu, z, t-\tau)\,d\tau, \quad t > z > 0, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0, \quad v\big|_{t=z} = -\frac{i\nu z}{2}\big(q_0 - \nu^2\big). \tag{2.9}$$

$$v\big|_{z=0} = f_0(\nu, t). \tag{2.10}$$

Введем новые переменные $z_1 := t + z,\ t_1 := t - z$ и пусть

$$U(\nu, z_1, t_1) := v\left(\nu, \frac{z_1 - t_1}{2}, \frac{z_1 + t_1}{2}\right).$$

Задача (2.8)–(2.10) перепишется в терминах функции $U(\nu, z_1, t_1)$ следующим образом:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t_1 \partial z_1} = \frac{1}{4}\left[\big(q_0 - \nu^2\big)U(\nu, z_1, t_1) - i\nu k(t_1) - \int\limits_0^{t_1} k(\tau)U(\nu, z_1 - \tau, t_1 - \tau)\,d\tau\right], \tag{2.11}$$

$$U\big|_{t_1 = z_1} = f_0(\nu, z_1), \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z_1}\bigg|_{t_1 = z_1} = \frac{1}{2}\,(f_0)'_{z_1}(\nu, z_1), \tag{2.13}$$

$$U\big|_{t_1=0} = -\frac{i\nu z_1}{4}\big(q_0 - \nu^2\big). \tag{2.14}$$

Из (2.14) следует, что $f_0(\nu, 0) = 0$.

Пусть

$$\omega(\nu, z_1, t_1) = \frac{\partial U}{\partial z_1}(\nu, z_1, t_1), \quad \omega(\nu, z_1, 0) = -i\nu\, \frac{q_0 - \nu^2}{4},$$

тогда

$$U(\nu, z_1, t_1) = f_0(\nu, t_1) + \int\limits_{t_1}^{z_1} \omega(\nu, \xi, t_1)\, d\xi. \tag{2.15}$$

Из уравнения (2.11) выводим

$$\int\limits_{t_1}^{z_1} \frac{\partial\omega}{\partial\tau}\, d\tau = \frac{1}{4}\int\limits_{t_1}^{z_1} \left[\big(q_0 - \nu^2\big)U(\nu, z_1, \tau) - i\nu k(\tau) - \int\limits_0^{\tau} k(\eta)U(\nu, z_1 - \eta, \tau - \eta)\, d\eta\right] d\tau.$$

Так как

$$\int\limits_{t_1}^{z_1} \frac{\partial\omega}{\partial\tau}\, d\tau = \frac{1}{2}\,(f_0)'_{z_1}(\nu, z_1) - \omega(\nu, z_1, t_1),$$

то для $\omega(\nu, z_1, t_1)$ имеем

$$\omega(\nu, z_1, t_1) = \frac{1}{2}\,(f_0)'_{z_1}(\nu, z_1)$$
$$-\frac{1}{4}\int\limits_{t_1}^{z_1} \left[\big(q_0 - \nu^2\big)U(\nu, z_1, \tau) - i\nu k(\tau) - \int\limits_0^{\tau} k(\eta)U(\nu, z_1 - \eta, \tau - \eta)d\eta\right] d\tau. \tag{2.16}$$

Взяв $t = 0$ в уравнении (2.16) и дифференцируя его по z_1, получим

$$\frac{1}{2}\,(f_0)''_{z_1}(\nu, z_1) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{z_1} \left[\big(q_0 - \nu^2\big)\omega(\nu, z_1, \tau) - \int\limits_0^{\tau} k(\eta)\omega(\nu, z_1 - \eta, \tau - \eta)\, d\eta\right] d\tau$$
$$+\frac{1}{4}\left[\big(q_0 - \nu^2\big) f_0(\nu, z_1) - i\nu k(z_1) - \int\limits_0^{z_1} k(\eta) f_0(\nu, z_1 - \eta)\, d\eta\right].$$

Отсюда выводим уравнение для $k(z_1)$:

$$k(z_1) = \frac{2i}{\nu}\,(f_0)''_{z_1}(\nu, z_1) - \frac{\big(q_0 - \nu^2\big)i}{\nu} f_0(\nu, z_1) + \frac{i}{\nu}\int\limits_0^{z_1} k(\tau) f_0(\nu, z_1 - \tau)\, d\tau$$
$$-\frac{i}{\nu}\int\limits_0^{z_1} \left[(q_0 - \nu^2)\omega(\nu, z_1, \tau) - \int\limits_0^{\tau} k(\eta)\omega(\nu, z_1 - \eta, \tau - \eta)\, d\eta\right] d\tau. \tag{2.17}$$

Теорема 1. *Пусть $T > 0$ фиксировано и выполнены следующие условия: $f_0(\nu, 0) = 0$, $(f_0)'_t(\nu, 0) = -i\nu\frac{q_0 - \nu^2}{2}$, $f_0(\nu, t) \in C^2[0, T]$ для некоторого ненулевого значения параметра ν. Тогда обратная задача (2.4)–(2.6) в области $G_T = \{(z, t) : 0 \leqslant z \leqslant t \leqslant T - z\}$ имеет единственное решение $k(t) \in C[0, T]$.*

$\lhd$ Заметим, что в условиях теоремы обратная задача (2.8)–(2.10) эквивалента замкнутой нелинейной системе интегральных уравнений Вольтера второго рода с непрерывными ядрами и непрерывными свободными членами (2.15)–(2.17). Это показывается переходом от начально-краевой задачи (2.8)–(2.10) к системе (2.11)–(2.14), и далее к уравнениям (2.16), (2.17). Равенство (2.15) очевидно и используется для замыкания системы. Нетрудно убедиться, что и обратные преобразования имеют место [20].

Систему (2.15)–(2.17) можно переписать в виде

$$\varphi = A\varphi, \tag{2.18}$$

где $A := (A_1, A_2, A_3)$ — нелинейный оператор, действующий на множестве вектор-функций $\varphi \in C[G_T]$,

$$\varphi := \Big[\underbrace{U(\nu, z_1, t_1)}_{\varphi_1}, \underbrace{\omega(\nu, z_1, t_1)}_{\varphi_2}, \underbrace{k(z_1)}_{\varphi_3}\Big].$$

Вид A_1, A_2, A_3 определяется правыми частями равенств (2.15)–(2.17). В качестве малого параметра данная система (2.18) содержит промежуток интегрирования, который не превосходит число T. Поэтому при малых T к ней применим принцип Банаха, обеспечивающий существование единственного решения системы. Действительно, пусть $Q(\varphi_0, \|\varphi_0\|) =: \{\varphi : \|\varphi - \varphi_0\| \leqslant \|\varphi_0\|\}$ — шар радиуса $\|\varphi_0\|$ с центром в точке φ_0 пространства непрерывных функций, где вектор-функция

$$\varphi_0(\nu, z_1) := \Bigg[\underbrace{f_0(\nu, t_1)}_{\varphi_{01}}, \underbrace{\frac{1}{2}(f_0)'_{z_1}(\nu, z_1)}_{\varphi_{02}}, \underbrace{\frac{2i}{\nu}(f_0)''_{z_1}(\nu, z_1) - \frac{(q_0 - \nu^2)i}{\nu} f_0(\nu, z_1)}_{\varphi_{03}}\Bigg]$$

и

$$\|\varphi_0\| = \max\{\|\varphi_{01}\|, \|\varphi_{02}\|, \|\varphi_{03}\|\}, \quad \|\cdot\| := \|\cdot\|_{C[G_T]}.$$

Нетрудно заметить, что для $\varphi \in Q(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ имеет место оценка

$$\|\varphi\| \leqslant \|\varphi_0\| + \|\varphi_0\| \leqslant 2\|\varphi_0\|.$$

Пусть $\varphi(\nu, z_1, t_1) \in Q(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Покажем, что при подходящем выборе T оператор A переводит шар в шар, т. е. $A\varphi \in Q(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. На самом деле, составляя норму разностей с помощью равенств системы (2.18), для $(z, t) \in G_T$ имеем

$$\|A\varphi - \varphi_0\| = \sup_{(z_1, t_1) \in G_T} |A\varphi - \varphi_0| \leqslant \alpha \|\varphi_0\|,$$

где

$$\alpha = \mu\big[q_0 + \nu + \|f_0\| + 2T\|\varphi_0\|\big], \quad \mu = 2T \max\left\{1, \frac{1}{\nu}\right\}.$$

Очевидно, что существует такое T^*, при котором $\alpha < 1$ и для $T \in (0, T^*)$ оператор A переводит множество Q в себя.

Пусть теперь φ^1, φ^2 — любые два элемента из $Q(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Тогда, используя вспомогательные неравенства вида

$$\left|\varphi_i^1\varphi_j^1 - \varphi_i^2\varphi_j^2\right| \leqslant \left|\varphi_i^1\right| \left|\varphi_j^1 - \varphi_j^2\right| + \left|\varphi_j^2\right| \left|\varphi_i^1 - \varphi_i^2\right| \leqslant 4\|\varphi_0\| \left\|\varphi^1 - \varphi^2\right\|,$$

получим

$$\left\|A\varphi^1 - A\varphi^2\right\| \leqslant \tilde{\alpha} \left\|\varphi^1 - \varphi^2\right\|,$$

где
$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}\mu\big[q_0 + \nu + \|f_0\| + 4T\|\varphi_0\|\big].$$

Заметим, что из условия $\alpha < 1$ следует $\tilde{\alpha} < 1$. Поэтому можно сделать вывод о том, что оператор A является сжимающим на $Q(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Тогда согласно принципу Банаха уравнение (2.18) имеет и притом единственное решение в $Q(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ при $T \in (0, T^*)$.

Решая систему уравнений (2.18) методом последовательных приближений, можно однозначно построить в области G_T для $T \in (0, T^*)$ вектор-функцию φ и тем самым определить функцию $k(t) \in C[0, T]$ [9]. $\triangleright$

3. Задача определения $u_1(x, z, t)$ и $q_1(z)$

Рассмотрим прямую задачу определния $u_1(x, z, t)$ из следующей начально-краевой задачи:
$$(u_1)_{tt} = (u_1)_{zz} + xq_1(z)u_0 + q_0u_1 - \int\limits_0^t k(\tau)u_1(x, z, t-\tau)\, d\tau, \tag{3.1}$$
$$u_1\big|_{t<0} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0, \quad z > 0,\ (x, t) \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Обратная задача 2. Найти $u_1(x, z, t)$ и $q_1(z)$, входящих в (3.1)–(3.2), если относительно преобразования Фурье $F_x[u_1](\nu, z, t)$ для некоторого ненулевого значения параметра ν известно
$$F_x[u_1](\nu, z, t)\big|_{z=0} = \tilde{f}_1(\nu, t), \quad t > 0.$$

После преобразования Фурье по переменной x имеем (далее знак $\tilde{}$ над $u_1(\nu, z, t)$, $f_1(\nu, t)$ будет опущен)
$$\begin{gathered}(u_1)_{tt} = (u_1)_{zz} + iq_1(z)(u_0)'_\nu(\nu, z, t) + \left(q_0 - \nu^2\right)u_1(\nu, z, t) \\ - \int\limits_0^t k(\tau)u_1(\nu, z, t-\tau)\, d\tau, \quad z > 0,\ t \in R,\end{gathered} \tag{3.3}$$
$$u_1\big|_{t<0} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0, \quad u_1|_{t=z} = 0, \tag{3.4}$$
$$u_1\big|_{z=0} = f_1(\nu, t). \tag{3.5}$$

Пусть $z_2 := \frac{z+t}{2}$, $t_2 = \frac{t-z}{2}$ и $U^*(\nu, z_2, t_2) := u_1(\nu, z_2 - t_2, z_2 + t_2)$, тогда задача (3.3)–(3.5) перепишется в терминах новой функции $U^*(\nu, z_2, t_2)$
$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t_2 \partial z_2} = \frac{i}{2}\, q_1(z_2 - t_2)\big[i\delta(2t_2) + U'_\nu(\nu, 2z_2, 2t_2)\theta(2t_2)\big] \\ + \frac{1}{2}\left[\big(q_0 - \nu^2\big)U^*(\nu, z_2, t_2) - \int\limits_0^{2t} k(\tau)U^*(\nu, z_2 - \tau, t_2 - \tau)\, d\tau\right],\end{gathered} \tag{3.6}$$
$$U^*\big|_{t_2=0} = 0, \quad U^*\big|_{t_2=z_2} = f_1(\nu, 2z_2), \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial z_2}\bigg|_{t_2=z_2} = (f_1')_{z_2}(\nu, 2z_2). \tag{3.8}$$

С учетом (3.8) очевидно, что

$$U^*(\nu, z_2, t_2) = f_1(\nu, 2t_2) + \int\limits_{t_2}^{z_2} \frac{\partial U^*}{\partial z_2}\big(\nu, \xi, t_2\big)\, d\xi. \tag{3.9}$$

Из уравнения (3.6) имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_{t_2}^{z_2} \frac{\partial U^*}{\partial\tau\partial z_2}\, d\tau = -\frac{1}{2}\int\limits_{t_2}^{z_2} q_1(z_2-\tau)\delta(2\tau)\, d\tau + \frac{i}{2}\int\limits_{t_2}^{z_2} q_1(z_2-\tau)U_\nu'(\nu, 2z_2, 2\tau)\, d\tau \\ +\frac{1}{2}\int\limits_{t_2}^{z_2}\left[\big(q_0-\nu^2\big)U^*(\nu, z_2, \tau) - \int\limits_0^{2\tau} k(\eta)U^*(\nu, z_2-\eta, \tau-\eta)\, d\eta\right] d\tau.\end{gathered} \tag{3.10}$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{t_2}^{z_2} \frac{\partial U^*}{\partial\tau\partial z_2}\,(\nu, z_2, \tau)\, d\tau = (f_1)_{z_2}'(\nu, 2z_2) - \frac{\partial U^*}{\partial z_2}\,(\nu, z_2, t_2). \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial U^*}{\partial z_2}\,(\nu, z_2, t_2) = (f_1)_{z_2}'(\nu, 2z_2) + \frac{1}{4}\, q_1(z_2) - \frac{i}{2}\int\limits_{t_2}^{z_2} q_1(z_2-\tau)U_\nu'(\nu, 2z_2, 2\tau)\, d\tau \\ -\frac{1}{2}\int\limits_{t_2}^{z_2}\left[\big(q_0-\nu^2\big)U(\nu, z_2, \tau) - \int\limits_0^{2\tau} k(\eta)U^*(\nu, z_2-\eta, \tau-\eta)\, d\eta\right] d\tau.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Так как в силу (3.7)

$$\frac{\partial U^*}{\partial z_2}\bigg|_{t_2=0} = 0,$$

то взяв в (3.12) $t_2 = 0$, выводим

$$\begin{gathered}q_1(z_2) = -4(f_1)_{z_2}'(\nu, 2z_2) + 2i\int\limits_0^{z_2} q_1(z_2-\tau)U_\nu'(\nu, 2z_2, 2\tau)\, d\tau \\ +2\int\limits_0^{z_2}\left[\big(q_0-\nu^2\big)U^*(\nu, z_2, \tau) - \int\limits_0^{2\tau} k(\eta)U^*(\nu, z_2-\eta, \tau-\eta)\, d\eta\right] d\tau.\end{gathered} \tag{3.13}$$

Подставляя (3.12) в (3.11), получим уравнение для $U^*(\nu, z_2, t_2)$:

$$\begin{gathered}U^*(\nu, z_2, t_2) = f_1(\nu, 2z_2) + \frac{1}{4}\int\limits_{t_2}^{z_2} q_1(\xi)\, d\xi - \frac{i}{2}\int\limits_{t_2}^{z_2}\int\limits_{t_2}^{\xi} q_1(\xi-t_2)U_\nu'(\nu, 2\xi, 2\tau)\, d\tau d\xi \\ -\frac{1}{2}\int\limits_{t_2}^{z_2}\int\limits_{t}^{\xi}\Big[\big(q_0-\nu^2\big)U^*(\nu, \xi, \tau) - \int\limits_0^{2\tau} k(\eta)U^*(\nu, \xi-\eta, \tau-\eta)\, d\eta\Big]\, d\tau d\xi.\end{gathered} \tag{3.14}$$

Уравнения (3.13) и (3.14) являются замкнутой системой относительно $q_1(z_2)$ и $U^*(\nu, z_2, t_2)$.

Теорема 2. *Пусть* $T \in (0, T^*)$, $f_1(\nu, t_1) \in C^1[0, T]$, $f_1(\nu, 0) = 0$, $(f_1)'_t(\nu, 0) = 0$, *и функции* $u_0(\nu, z, t)$ *и* $k(t)$ *являются решением задачи* (2.4)–(2.6). *Тогда в области* G_T *существует единственное решение обратной задачи* (3.13)–(3.14) $q_1(z) \in C[0, T/2]$.

$\lhd$ Обратная задача (3.3)–(3.5) эквивалентна системе интегральных уравнений (3.13), (3.14). Данная система является замкнутой линейной системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода с непрерывными свободными членами и ядрами относительно неизвестных функций в области G_T при $\nu \in R$. Идея доказательства существования единственного решения данной системы состоит в применении обобщенного принципа сжатых отображений [22]. Запишем систему (3.13), (3.14) в виде операторного уравнения

$$\psi = B\psi, \tag{3.15}$$

$$\psi := \Big[\underbrace{q_1(z_2)}_{\psi_1},\ \underbrace{U^*(\nu, z_2, t_2)}_{\psi_2}\Big].$$

Линейный оператор $B = (B_1, B_2)$ определен на множестве вектор-функции $\psi \in C(R \times G_T)$ и $B_1,\ B_2$ определяются правыми частями уравнений (3.13), (3.14). Покажем теперь, что некоторая степень n (n — натуральное число) линейного отображения $B\psi$ является сжатием. Положим $D_T := [0, T/2] \times [0, T/2]$ и

$$\|\psi\|(\nu) = \max\Big\{\max_{(z_2,t_2)\in D_T} |\psi_j(\nu, z_2, t_2)|,\ j = 1, 2\Big\}.$$

Пусть $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$ — две непрерывные вектор-функции в $R \times D_T$, удовлетворяющие линейной системе интегральных уравнений (3.15). Для $(\nu, z_2, t_2) \in R \times D_T$ имеем

$$\max_j \big|B_j\psi^{(1)} - B_j\psi^{(2)}\big|(\nu, z_2, t_2) \leqslant Mz_2\big\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\big\|, \quad (\nu, z_2, t_2) \in R \times D_T,$$

где M — константа, зависящая от величин T, $\|U'_\nu\|$, q_0, ν, $\|k(t)\|$.

Далее

$$\big|B_j^2\psi^{(1)} - B_j^2\psi^{(2)}\big|(\nu, z_2, t_2) \leqslant M^2\int\limits_0^{z_2} \xi\big\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\big\|\,d\xi \leqslant M^2\,\frac{z_2^2}{2!}\big\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\big\|, \quad j = 1, 2.$$

Отсюда

$$\max_j \big|B_j^n\psi^{(1)} - B_j^n\psi^{(2)}\big|(\nu, z_2, t_2) \leqslant M^2\frac{z_2^2}{n!}\big\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\big\|, \quad (z_2, t_2) \in D_T,$$

и, вообще, $\big\|B^n\psi^{(1)} - B^n\psi^{(2)}\big\| \leqslant M^n\frac{(T/2)^n}{n!}\big\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\big\|$. При любом фиксированном T число n можно выбрать настолько большим, что

$$M^n\frac{(T/2)^n}{n!} < 1.$$

Тогда отображение B^n является сжатием. Согласно обобщению принципа сжимающих отображений уравнение $B\psi = \psi$ имеет одно и только одно решение, принадлежащее

$C(R\times D_T)$. Данное решение может быть найдено методом последовательных приближений. $\triangleright$

Формулы (2.15)–(2.17) и (3.13)–(3.14) служат основой для численной реализации алгоритма определения значений коэффициента $q(z)$. Подробное описание аналогичного алгоритма предложено в монографии [23, гл. 5], где в области D_T вводится равномерная сетка с шагом $h=T/(2N)$, N — количество узлов разбиения отрезка $[0,T/2]$. Затем в формулах (2.15)–(2.17), (3.13)–(3.14) интегралы заменяются квадратурными формулами прямоугольников. Значения функций в узлах сетки находятся по рекуррентным формулам [23]. Результаты расчетов функций $k(t)$, $q_1(z)$ представлены на рисунках 1 и 2 соответственно при следующих значениях входных данных: $T=4$, $q_0=0.5$, $\nu=1$, $f(\nu,t)=\nu(t^2-i\frac{q_0-\nu^2}{2}t)$. На рисунке 2 — графики коэффициента $q_1(z)$ (с учетом ядра памяти — пунктирная линия, без учета — сплошная линия).

Рис. 1. Функция памяти.

Рис. 2. Коэффициент.

Литература

1. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики.—М.: Наука, 1984.
2. *Lorenzi A. and Sinestrari E.* An inverse problem in the theory of materials with memory I // Nonlinear Anal. TMA.—1988.—Vol. 12, № 12.—P. 1317–1335. DOI: 10.1016/0362-546X(88)90080-6.
3. *Lorenzi A.* An inverse problem in the theory of materials with memory II // Semigroup Theory and Applications, Ser. Pure and Appl. Math.—1989.—Vol. 116.—P. 261–290.
4. *Дурдиев Д. К.* Обратная задача для трехмерного волнового уравнения в среде с памятью // Мат. анализ и дискретная математика.—Новосибирск: НГУ, 1989.—С. 19–27.
5. *Lorenzi A., Paparoni E.* Direct and inverse problems in the theory of materials with memory // Ren. Sem. Math. Univ.—1992.—Vol. 87.—P. 105–138.
6. *Bukhgeym A. L.* Inverse problems of memory reconstruction // J. of Inverse and Ill-Posed Problems.—1993.—Vol. 1, № 3.—P. 193–206. DOI: 10.1515/jiip.1993.1.1.17.
7. *Дурдиев Д. К.* Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 3.—С. 574–582. DOI: 10.1007/BF02104815.
8. *Bukhgeim A. L., Dyatlov G. V.* Inverse problems for equations with memory // SIAM J. Math. Fool.—1998.—Vol. 1, № 2.—P. 1–17.
9. *Дурдиев Д. К.* Обратные задачи для сред с последействием.—Ташкент: Турон-Икбол, 2014.
10. *Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш.* Обратная задача определения ядра для уравнения вязкоупругости в ограниченной области // Мат. заметки.—2015.—Т. 97, № 6.—С. 855–867.
11. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача определения многомерного ядра уравнения вязкоупругости // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 4.—С. 18–43. DOI: 10.23671/VNC.2015.4.5969.
12. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении одномерного ядра электровязкоупругости // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 58, № 3.—С. 553–572. DOI: 10.17377/smzh.2017.58.307.
13. *Дурдиев Д. К., Рахмонов А. А.* Обратная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений SH-волн в вязкоупругой пористой среде: глобальная разрешимость // Теор. и мат. физика.—2018.—Т. 195, № 3.—С. 491–506. DOI: 10.4213/tmf9480.
14. *Durdiev U. D.* A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Eurasian J. Math. Comp. App.—2019.—Vol. 7, № 2.—P. 4–19.

15. *Durdiev U. D., Totieva Z. D.* A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Math. Meth. Appl. Sci.—2019.—Vol. 42, № 18.—P. 7440–7451.
16. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* О глобальной разрешимости многомерной обратной задачи для уравнения с памятью // Сиб. мат. журн.—2021.—Т. 62, № 2.—С. 215–229.
17. *Kumar P., Kinra R., Mohan M.* A local in time existence and uniqueness result of an inverse problem for the Kelvin–Voigt fluids // Inverse Problems.—2021.—Vol. 37, № 8.—085005. DOI: 10.1088/1361-6420/ac1050.
18. *Благовещенский А. С., Федоренко Д. А.* Обратная задача для уравнения акустики в слабо горизонтально-неоднородной среде // Зап. науч. сем. ПОМИ.—2008.—Т. 354.—С. 81–99.
19. *Дурдиев Д. К., Бозоров З. Р.* Задача определения ядра интегро-дифференциального волного уравнения со слабо горизонтальной однородностью // Дальневост. матем. журн.—2013.—Т. 13, № 2.—С. 209–221.
20. *Дурдиев Д. К.* Обратная задача определения двух коэффициентов в одном интегродифференциальном волновом уравнении // Сиб. журн. индустр. матем.—2009.—Т. 12, № 3.—С. 28–40.
21. *Курант Р.* Уравнения с частными производными.—М.: Мир, 1964.
22. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.—М.: Физматлит, 2006.
23. *Яхно В. Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости.—Новосибирск: Наука, 1988.

Статья поступила 1 августа 2021 г.

Ахматов Зариф Ануарович
Южный математический институт ВНЦ РАН,
аспирант
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `ahmatov1993@yandex.ru`

Тотиева Жанна Дмитриевна
Южный математический институт ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник отдела математического моделирования
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН,
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
ведущий научный сотрудник
E-mail: `jannatuaeva@inbox.ru`
https://orcid.org/0000-0002-0089-074X

Vladikavkaz Mathematical Journal
, Volume , Issue , P. 15–27

QUASI-TWO-DIMENSIONAL COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION IN A WEAKLY HORIZONTALLY INHOMOGENEOUS MEDIUM WITH MEMORY

Akhmatov, Z. A.[1] and Totieva, Zh. D.[1,2]

[1] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia;
[2] North Caucasus Center for Mathematical Research VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia

E-mail: ahmatov1993@yandex.ru, jannatuaeva@inbox.ru

Abstract. The paper studies the inverse problem of sequentially determining the two unknowns: the coefficient characterizing the properties of a medium with weakly horizontal inhomogeneity and the kernel of some integral operator describing the memory of the medium. The direct initial-boundary value problem contains zero data and the Neumann boundary condition. As additional information, the trace of the Fourier image of the direct problem solution at the boundary of the medium is given. To study inverse problems, it is assumed that the unknown coefficient decomposes into an asymptotic series. In this paper, a method is constructed for finding (taking into account the memory of the medium) the coefficient with accuracy $O(\epsilon^2)$. At the first stage, the solution of the direct problem in the zero approximation and the kernel of the integral operator are simultaneously determined. The inverse problem is reduced to solving a system of nonlinear Volterra integral equations of the second kind. At the second stage, the kernel is considered to be given, and the first approximation solution of the direct problem and the unknown coefficient are determined. In this case, the inverse problem and the problem of solving a linear system of Volterra integral equations of the second kind will be equivalent. Two theorems on unique local solvability of the inverse problems are proved. Numerical results on the kernel function and coefficient are presented.

Key words: inverse problem, delta function, kernel, fourier transform, integro-differential equation.

Mathematical Subject Classification (2010): 35L20, 35R30, 35Q99.

For citation: *Akhmatov, Z. A. and Totieva, Zh. D.* Quasi-Two-Dimensional Coefficient Inverse Problem for the Wave Equation in a Weakly Horizontally Inhomogeneous Medium with Memory, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 23, no. 4, pp. 15–27 (in Russian). DOI: 10.46698/l4464-6098-4749-m.

References

1. *Romanov, V. G. Obratnye zadachi matematicheskoj fiziki* [Inverse Problems of Mathematical Physics], Moscow, Nauka, 1984 (in Russian).
2. *Lorenzi, A. and Sinestrari, E.* An Inverse Problem in the Theory of Materials with Memory I, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 1988, vol. 12, no. 12, pp. 1317–1335. DOI: 10.1016/0362-546X(88)90080-6.
3. *Lorenzi, A.* An Inverse Problem in the Theory of Materials with Memory II, *Journal of Semigroup Theory and Applications, Series on Pure and Applied Mathematics*, 1989, vol. 116, pp. 261–290.
4. *Durdiev, D. K.* The Inverse Problem for a Three-Dimensional Wave Equation in a Memory Environmentu, *Matematicheskij analiz i diskretnaya matematika*, Novosibirsk, Izd-vo Novosibirskogo Universiteta, 1989, pp. 19–27 (in Russian).
5. *Lorenzi, A. and Paparoni, E.* Direct and Inverse Problems in the Theory of Materials with Memory, *The Mathematical Journal of the University of Padua*, 1992, vol. 87, pp. 105–138.
6. *Bukhgeym, A. L.* Inverse Problems of Memory Reconstruction, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 1993, vol. 1, no. 3, pp. 193–206. DOI: 10.1515/jiip.1993.1.1.17.
7. *Durdiev, D. K.* A Multidimensional Inverse Problem for an Equation with Memory, *Siberian Mathematical Journal*, 1994, vol. 35, pp. 514–521. DOI: 10.1007/BF02104815.
8. *Bukhgeim, A. L. and Dyatlov, G. V.* Inverse Problems for Equations with Memory, *SIAM J. Math. Fool.*, 1998, vol. 1, no. 2, pp. 1–17.

9. *Durdiev, D. K. Obratnye zadachi dlya sred s posledejstviem*, Tashkent, Turon-Ikbol, 2014.
10. *Durdiev, D. K. and Safarov, Zh. Sh.* Inverse Problem of Determining the One-Dimensional Kernel of the Viscoelasticity Equation in a Bounded Domain, *Mathematical Notes*, 2015, vol. 97, no. 6, pp. 855–867. DOI: 10.4213/mzm10659.
11. *Durdiev, D. K. and Totieva, Zh. D.* The Problem of Determining the Multidimensional Kernel of Viscoelasticity Equation, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2015, vol. 17, no. 4, pp. 18–43 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2015.4.5969.
12. *Durdiev, D. K. and Totieva, Z. D.* The Problem Of Determining The One-Dimensional Kernel of the Electroviscoelasticity Equation, *Siberian Mathematical Journal*, 2017, vol. 58, no. 3, pp. 427–444. DOI: 10.1134/S0037446617030077.
13. *Durdiev, D. K. and Rahmonov, A. A.* Inverse Problem for a System of Integro-Differential Equations for SH Waves in a Visco-Elastic Porous Medium: Global Solvability, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2018, vol. 195, pp. 923–937. DOI: 10.1134/S0040577918060090.
14. *Durdiev, U. D.* A Problem of Identification of a Special 2D Memory Kernel in an Integro-Differential Hyperbolic Equation, *Eurasian J. Math. Comp. App.*, 2019, vol. 7, no. 2, pp. 4–19.
15. *Durdiev, U. D. and Totieva, Z. D.* A Problem of Determining a Special Spatial Part of 3D Memory Kernel in an Integro-Differential Hyperbolic Equation, *Mathematical Methods in Applied Sciences*, 2019, vol. 42, no. 18, pp. 7440–7451. DOI: 10.1002/mma.5863.
16. *Durdiev, D. K. and Totieva, Z. D.* About Global Solvability of a Multidimensional Inverse Problem for an Equation with Memory, *Siberian Mathematical Journal*, 2021, vol. 62, no. 2, pp. 215–229. DOI: 10.1134/S0037446621020038.
17. *Kumar, P., Kinra, R. and Mohan, M.* A Local in Time Existence and Uniqueness Result of an Inverse Problem for the Kelvin–Voigt Fluids, *Inverse Problems*, 2021, vol. 37, no. 8, 085005. DOI: 10.1088/1361-6420/ac1050.
18. *Blagoveshchenskii, D. A. and Fedorenko, A. S.* The Inverse Problem for the Acoustic Equation in a Weakly Horizontally Inhomogeneous Medium, *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 155, no. 3, pp. 379–389, DOI: 10.1007/s10958-008-9221-1.
19. *Durdiev, D. K. and Bozorov, Z. R.* A Problem of Determining the Kernel of Integrodifferential Wave Equation with Weak Horizontal Properties, *Dal'nevostochnyi matematicheskii zhurnal*, 2013, vol. 13, no. 2, pp. 209–221 (in Russian).
20. *Durdiev, D. K.* The Inverse Problem of Determining Two Coefficients in One Integro Differential Wave Equation, *Sib. zhurnal industrialnoy matematiki* [Siberian Journal of Industrial Mathematics], 2009, vol. 12, no. 3, pp. 28–40 (in Russian).
21. *Courant, R. and Hilbert, D. Methods of Mathematical Physics*, II, New York-London, Interscience Publ., 1962.
22. *Kolmogorov, A. N. and Fomin, S. V. Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza* [Elements of the Function's Theory and Functional Analysis], Moscow, Fizmatlit, 2006, 572 p. (in Russian).
23. *Yakhno, V. G. Obratnyye zadachi dlya differentsialnykh uravneniy uprugosti* [Inverse Problems for Differential Equations of Elasticity], Novosibirsk, Nauka, 1988, 304 p. (in Russian).

Received August 1, 2021

Zarif A. Akhmatov
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Graduate Student
E-mail: `ahmatov1993@yandex.ru`

Zhanna D. Totieva
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Senior Researcher of the Department of Math. Modelin;
North Caucasus Center for Mathematical Research VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Leader Researcher
E-mail: `jannatuaeva@inbox.ru`
https://orcid.org/0000-0002-0089-074X