УДК 517.98
DOI 10.46698/l7711-6989-4987-f

О ПРОДОЛЖЕНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ#

А. А. Гелиева[1], З. А. Кусраева[2]

[1] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;
[2] Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН,
Россия, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1
E-mail: `gelieva00@mail.ru`, `zali13@mail.ru`

Аннотация. Используя линеаризацию положительных полилинейных операторов с помощью фремлиновского тензорного произведения векторных решеток можно показать, что полилинейный оператор, действующий из декартова произведения мажорирующих подпространств векторных решеток в порядково полную векторную решетку, допускает продолжение до полилинейного положительного оператора, определенного на декартовом произведении объемлющих векторных решеток. В настоящей заметке устанавливается, что этот результата остается в силе, если полилинейный оператор определен на декартовом произведении мажорирующих подпространств сепарабельных банаховых решеток и принимает значения из топологичесой векторной решетки с σ-интерполяционным свойством при условии, что упомянутые банаховы решетки обладают свойством субаддитивности. Последнее обеспечивает тот факт, что алгебраическое тензорное произведение мажорирующих подпространст будет мажорирующим во фремлиновском тензорном произведении рассматриваемых банаховых решеток. Сформулирован открытый вопрос: остается ли в силе доказанный результат, если опустить (или ослабить) условие субаддитивности. Возможность ослабить требование порядковой полноты решетки образов за счет предъявления к области определения некоторых дополнительных требований впервые реализовали Абрамович и Викстед при доказательстве одного варианта теоремы Хана — Банаха — Канторовича.

Ключевые слова: полилинейный оператор, положительный оператор, топологическая векторная решетка, сепарабельность, σ-интерполяционное свойство, мажорирующее подпространство.

AMS Subject Classification: 46A16, 46B42, 46G25, 47A40, 47H60.

Образец цитирования: *Гелиева А. А., Кусраева З. А.* О продолжении положительных полилинейных операторов // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 4.—С. 70–76. DOI: 10.46698/l7711-6989-4987-f.

1. Введение и постановка задачи

Многие свойства операторов, действующих между векторными решетками, связаны с порядковой полнотой области значений [1]. Однако, в некоторых случаях возможно ослабить требование порядковой полноты за счет предъявления к области определения некоторых дополнительных требований. Эта идея впервые была реализована в работе Абрамовича и Викстеда [2] при доказательстве одного варианта теоремы Хана — Банаха — Канторовича см. [1, теорема 1.25]. В работе [3, теорема 1] в задаче о продолжении положительных линейных операторов авторам удалось заменить порядковую полноту более слабым σ-интерполяционным свойством (определение см. ниже в § 3), потребовав сепарабельности области определения. Точнее, установлен следующий вариант теоремы Канторовича [1, теорема 1.32] о продолжении положительных операторов. Напомним,

Исследование выполнено в рамках гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук, грант № МК-4347.2021.1.1.

что: подпространство $E_0 \subset E$ называют *мажорирующим*, если для любого $x \in E$ найдется $y \in E_0$ такой, что $x \leqslant y$; нормированное пространство называют *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

Теорема 1.1. *Пусть E — сепарабельная решетка Фреше, а F — локально телесная топологическая векторная решетка с σ-интерполяционным свойством. Пусть G — мажорирующее подпространство E. Тогда любой положительный линейный оператор T_0 из G в F допускает продолжение до линейного положительного оператора T из E в F.*

Ранее Дж. Лоан в своей диссертации показал, что аналог теоремы Канторовича имеет место для полилинейных операторов [4, теорема 3.15]. Приведем формулировку этого результата, понимая положительность полилинейного оператора как его положительность по каждой из переменной при условии, что остальным переменным присваивается произвольные положительные значения.

Теорема 1.2. *Пусть $E_1, \dots, E_n, F$ — векторные решетки, причем F порядково полна. Если G_i — мажорирующее подпространства E_i для всех $i = 1, \dots, n$ и T — положительный полилинейный оператор из $G_1 \times \dots \times G_n$ в F, то T допускает положительное продолжение на всю решетку $E_1 \times \dots \times E_n$.*

Цель настоящей заметки — ослабить условие порядковой полноты в теореме 1.2 по образцу теоремы 1.1. Основной инструмент — линеаризация полилинейных операторов с помощью тензорного произведения по Фремлину с последующим применением теоремы 1.1.

Всюду в тексте := означает «равно по определению», $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ и $\mathbb{R}$ обозначает множество действительных чисел. Все рассматриваемые ниже векторные решетки считаются архимедовыми и вещественными.

2. Вспомогательные сведения

Используются стандартные обозначения и терминология теории банаховых решеток из монографий Алипрантиса и Бёркиншо [1] и Мейер-Ниберга [5], а также теории полиномов из монографии Дайнина [6]. Напомним необходимые понятия.

По определению *банахова решетка* E — это вещественное банахово пространство $(E, \|\cdot\|)$, снабженное частичным порядком $\leqslant$, причем для любой пары элементов $x, y \in E$ существуют супремум $x \vee y$ и инфимум $x \wedge y$, *положительный конус* $E_+ := \{x \in E : x \geqslant 0\}$ замкнут относительно сложения и умножения на положительные скаляры, соотношения $x \geqslant y$ и $y - x \in E_+$ равносильны и норма связана с порядком условием *монотонности*, т. е. для $x, y \in E$ неравенство $|x| \leqslant |y|$ влечет $\|x\| \leqslant \|y\|$, где $|x| = x \vee (-x) = \sup\{x, -x\}$ — *модуль элемента x*.

Рассмотрим банаховы решетки $E_1, \dots, E_n, F$. Скажем, что n-линейный оператор T из $E_1 \times \dots \times E_n$ в F *положителен*, если $T(x_1, \dots, x_n) \in F_+$ для всех $0 \leqslant x_1 \in E_1, \dots, 0 \leqslant x_n \in E_n$; *регулярен*, если T представим в виде разности двух положительных n-линейный операторов; является *решеточным n-морфизмом*, если $T(|x_1|, \dots, |x_n|) = |T(x_1, \dots, x_n)|$ для всех $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$.

Обозначим символом $\mathscr{L}^r(E_1, \dots, E_n; F)$ пространство всех регулярных n-линейных операторов из $E_1 \times \dots \times E_n$ в F, упорядоченное конусом положительных n-линейных операторов, т. е. неравенство $T_1 \geqslant T_2$ означает, что оператор $T_1 - T_2$ положителен.

Основной инструмент исследования положительных полилинейных операторов между векторными решетками — тензорное произведения векторных решеток и банаховых решеток — был разработан Фремлиным в [7, теорема 4.2] и [8, теорема 1E] в случае $n = 2$;

случай $n > 2$ см. в работе Схепа [9]. В следующих ниже двух теоремах собраны основные свойства *фремлиновского тензорного произведения* векторных и банаховых решеток; они получены в [7, теорема 4.2] и [9, теорема 2.1], соответственно.

Теорема 2.1. *Существуют единственные до изоморфизма векторная решетка $E_1 \bar{\otimes} \cdots \bar{\otimes} E_n$ и решеточный n-морфизм $\otimes : E_1 \times \cdots \times E_n \to E_1 \bar{\otimes} \cdots \bar{\otimes} E_n$ такие, что:*

(1) *Для векторной решетки F и решеточного n-морфизма $T : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ существует единственный решеточный гомоморфизм $T^{\otimes} : E_1 \bar{\otimes} \cdots \bar{\otimes} E_n \to F$ такой, что $T^{\otimes} \circ \otimes = T$.*

(2) *$\otimes$ индуцирует вложение алгебраического тензорного произведения $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ во фремлиновское тензорное произведение $E_1 \bar{\otimes} \cdots \bar{\otimes} E_n$.*

(3) *$E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ плотна в $E_1 \bar{\otimes} \cdots \bar{\otimes} E_n$, в том смысле, что для любого $u \in E_1 \bar{\otimes} \cdots \bar{\otimes} E_n$ существуют $0 \leqslant x_k \in (E_k)_+$ $(k = 1, \ldots, n)$ такие, что для всех $\varepsilon > 0$ существует элемент $v \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ такой, что $|u - v| \leqslant \varepsilon x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$.*

(4) *Если $u \in E_1 \bar{\otimes} \cdots \bar{\otimes} E_n$, тогда существуют $x_k \in (E_k)_+$ $(k = 1, \ldots, n)$ такие, что $|u| \leqslant x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$.*

В случае, когда $E_1, \ldots, E_n$ — банаховы решетки, на $E_1 \bar{\otimes} \ldots \bar{\otimes} E_n$ можно определить *позитивно проективную норму* $\| \cdot \|_{|\pi|}$ следующим образом:

$$\|u\|_{|\pi|} := \inf \left\{ \sum_{i \leqslant m} \prod_{k \leqslant n} \|x_{i,k}\| : \, x_{i,k} \in (E_k)_+, \, |u| \leqslant \sum_{i \leqslant m} x_{i,1} \otimes \cdots \otimes x_{i,n}, \, i \leqslant m \right\}.$$

Можно показать, что $\| \cdot \|_{|\pi|}$ — монотонная нормой на $E_1 \bar{\otimes} \ldots \bar{\otimes} E_n$. Банахова решетка $E_1 \hat{\otimes}_{|\pi|} \ldots \hat{\otimes}_{|\pi|} E_n$ определяется как пополнение векторной решетки $E_1 \bar{\otimes} \ldots \bar{\otimes} E_n$ относительно нормы $\| \cdot \|_{|\pi|}$ и называется *позитивно проективным тензорным произведением* банаховых решеток $E_1, \ldots, E_n$. Функционал $\rho : E_1 \bar{\otimes} \ldots \bar{\otimes} E_n \to \mathbb{R}$ вводится формулой

$$\rho(u) = \inf \left\{ \prod_{k \leqslant n} \|x_k\| : \, x_k \in (E_k)_+ (k = 1, \ldots, n), \, |u| \leqslant x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \right\}.$$

Скажем, что банаховы решетки $E_1, \ldots, E_n$ обладают *свойством субаддитивности*, если функционал ρ субаддитивен, т. е. если $\rho(u + v) \leqslant \rho(u) + \rho(v)$ для всех $u, v \in E_1 \bar{\otimes} \ldots \bar{\otimes} E_n$. Следующий ниже результат установлен Схепом в [9, теорема 2.1.], случай $n = 2$ установлен Фремлином в [8].

Теорема 2.2. *Пусть $E_1, \ldots, E_n$ — банаховы решетки, обладающие свойством субаддитивности. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$\rho(u) = \|u\|_{|\pi|}$ на $E_1 \bar{\otimes} \ldots \bar{\otimes} E_n$.*

(2) *Если $u \in E_1 \hat{\otimes}_{|\pi|} \ldots \hat{\otimes}_{|\pi|} E_n$, тогда существуют $x_k \in (E_k)_+$ $(k = 1, \ldots, n)$ такие, что $|u| \leqslant x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$.*

(3) *$E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ равномерно плотна в $E_1 \hat{\otimes}_{|\pi|} \cdots \hat{\otimes}_{|\pi|} E_n$, в том смысле, что для любого $u \in E_1 \hat{\otimes}_{|\pi|} \cdots \hat{\otimes}_{|\pi|} E_n$ существуют $x_k \in (E_k)_+$ $(k = 1, \ldots, n)$ такие, что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $v \in E_1 \bar{\otimes} \cdots \bar{\otimes} E_n$ такой, что $|u - v| \leqslant \varepsilon x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$.*

(4) *Если F — равномерно полная векторная решетка, то существует взаимнооднозначное соответствие между положительными n-линейными операторами $T : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ и положительными линейными операторами $T^{\otimes} : E_1 \hat{\otimes}_{|\pi|} \cdots \hat{\otimes}_{|\pi|} E_n \to F$ такое, что $T = T^{\otimes} \circ \otimes$.*

Отметим еще один простой факт, который потребуется при доказательстве основного результата.

Лемма 2.3. *Пусть* $E_1, \dots, E_n$ *— банаховы решетки со свойством субаддитивности. Если* $G_1, \dots, G_n$ *— мажорирующие подпространства в* $E_1, \dots, E_n$ *соответственно, то* $G_1 \otimes \dots \otimes G_n$ *— мажорирующее подпространство в* $E_1 \hat{\otimes}_{|\pi|} \dots \hat{\otimes}_{|\pi|} E_n$.

$\lhd$ Следует непосредственно из утверждения 2.2(2). $\rhd$

Лемма 2.4. *Пусть* $E_1, \dots, E_n$ *— банаховы решетки,* F *— локально телесная топологическая векторная решетка. Тогда отображение* $S \mapsto S \circ \otimes$ *является линейным и порядковым изоморфизмом из* $\mathscr{L}^r(E_1 \hat{\otimes}_{|\pi|} \times \dots \times \hat{\otimes}_{|\pi|} E_n; F)$ *на* $\mathscr{L}^r(E_1, \dots, E_n; F)$.

$\lhd$ Следует непосредственно из утверждения 2.2(4). $\rhd$

3. Основной результат

Ниже понадобятся следующие понятия. Говорят, что архимедова векторная решетка F обладает *σ-интерполяционным свойством* (или *свойством Кантора*), если для любых последовательностей (x_n) и (z_n) в F, удовлетворяющих неравенству $x_n \leqslant z_m$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$, существует $y \in F$ такой, что $x_n \leqslant y \leqslant z_m$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$, см. [5, определение 1.1.7 (iv)].

Пусть теперь векторная решетка E одновременно является хаусдорфовыми топологическим векторным пространством. Назовем пространство E *топологической векторной решеткой*, если E *локально телесно,* т. е. если E обладает базисом окрестностей нуля, состоящим из телесных множеств (см. [4]; используются также более громоздкие термины — *локально телесное пространство Рисса* [6] и *векторная решетка с локально телесной топологией линейного пространства* [2]). Напомним, что множество $A \subset E$ называют *телесным*, если $|y| \leqslant |x|$ и $x \in A$ влекут $y \in A$.

Лемма 3.1. *Пусть* $E_1, \dots, E_n$, F *— векторные решетки и для каждого* $i = 1, \dots, n$ *фиксировано мажорируеющее подпространство* $G_i \subset E_i$ *с индуцированным из* E_i *порядком. Предположим, что полилинейный оператор* T *из* $G_1 \times \dots \times G_n$ *в* F *и линейный оператор* $T^{\otimes}$ *из* $G_1 \otimes \dots \otimes G_n$ *в* F *таковы, что* $T = T^{\otimes} \circ \otimes$. *Если алгебраическое тензорное произведение* $G_1 \otimes \dots \otimes G_n$ *рассматривается с индуцированным из* $E_1 \bar{\otimes} \dots \bar{\otimes} E_n$ *порядком, то положительность* T *влечет положительность* $T^{\otimes}$.

$\lhd$ Пусть $w \in G_1 \otimes \dots \otimes G_n$ и $w \geqslant 0$ в решетке $E_1 \bar{\otimes} \dots \bar{\otimes} E_n$. Так же, как и в доказательстве предложения 5.1 из [7], дело можно свести к случаю, когда G_i — мажорирующее подпространство в векторной решетке непрерывных функций $C(Q_i)$ на компактном пространстве Q_i. Пусть F_0 — порядковый идеал в F, порожденный элементом $T(1_{Q_1}, \dots, 1_{Q_n})$, где 1_{Q_i} — тождественная единица на Q_i. Если $h : F_0 \to \mathbb{R}$ — решеточный гомоморфизм, то $h \circ T$ — положительный n-линейный функционал из $G_1 \times, \dots, \times G_n$ в $\mathbb{R}$, который по теореме 1.2 продолжается до положительного n-линейного функционала на $C(Q_1) \times \dots \times C(Q_n)$. Те же рассуждения, что и в [7, предложение 5.1], со ссылкой на [7, предложение 3.5], дают $h(Tw) \geqslant 0$ для любого решеточного гомоморфизма h. Но так как решеточные гомоморфизмы $h : F_0 \to \mathbb{R}$ разделяют точки F_0, то $Tw \geqslant 0$. $\rhd$

Теперь имеются все ингредиенты, чтобы сформулировать и доказать основной результат настоящей заметки.

Теорема 3.2. *Пусть* $E_1, \dots, E_n$ *— сепарабельные банаховы решетки со свойством субаддитивности и* G_i *— мажорирующее подпространство в* E_i *для всех* $i = 1, \dots, n$. *Предположим, что* F *— топологическая векторная решетка с* σ*-интерполяционным свойством.*

Тогда любой положительный полилинейный оператор T_0 из $G_1 \times \ldots \times G_n$ в F допускает продолжение до полилинейного положительного оператора T из $E_1 \times \ldots \times E_n$ в F.

$\lhd$ Доказательство основано на сведении задачи к линейному случаю из теоремы 1.1. Рассмотрим положительный полилинейный оператор T_0 из $G_1 \times \ldots \times G_n$ в F.

Согласно лемме 3.1, существует линейный положительный оператор $T_0^{\otimes} : G_1 \otimes \cdots \otimes G_n \to F$ такой, что $T_0 = T_0^{\otimes} \circ \otimes$, где отображение $\otimes : G_1 \times \ldots \times G_n \to G_1 \bar{\otimes} \ldots \bar{\otimes} G_n$ является решеточным n-морфизмом из 2.1(2).

Возьмем произвольный элемент $u = \sum_{j=1}^{m} x_{ij}$ из $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. По условию G_i — мажорирующее подпространство в E_i, поэтому для любых $i = 1, \ldots, n$ и $j = 1, \ldots, m$ можно подобрать элемент $g_{ij} \in G_i$ так чтобы $x_{ij} \leqslant g_{ij}$. Тогда $u \leqslant v := \sum_{j=1}^{m} g_{ij}$ и $v \in G_1 \otimes \cdots \otimes G_n$, поэтому $G_1 \otimes \cdots \otimes G_n$ — мажорирующее подпространство в $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. В силу п. 2 теоремы 2.2 подпространство $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ является мажорирующим в $E_1 \hat{\otimes}_{|\pi|} \ldots \hat{\otimes}_{|\pi|} E_n$, следовательно, $G_1 \otimes \cdots \otimes G_n$ — мажорирующее подпространство в $E_1 \hat{\otimes}_{|\pi|} \cdots \hat{\otimes}_{|\pi|} E_n$. Покажем теперь, что $E_1 \hat{\otimes}_{|\pi|} \cdots \hat{\otimes}_{|\pi|} E_n$ сепарабельно, т.е. необходимо показать , что в $E_1 \hat{\otimes}_{|\pi|} \cdots \hat{\otimes}_{|\pi|} E_n$ найдется счетное всюду плотное множество. Рассмотрим в E_k счетное, плотное подмножество M_k $(k = 1, \ldots, n)$ и определим новое множество $M := \{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : x_k \in M_k, k = 1, \ldots, n\}$. Очевидно, что M счетное подмножество $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$, , так как является образом счетного множества $M_1 \times \cdots \times M_n$ относительно отображения $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$.

Из приведенных выше свойств фремлиновского тензорного произведения следует, что $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ плотно в $E_1 \hat{\otimes}_{|\pi|} \cdots \hat{\otimes}_{|\pi|} E_n$ в позитивно проективной норме. Действительно, в силу теоремы 2.3 (3) для любого $u \in E_1 \hat{\otimes}_{|\pi|} \cdots \hat{\otimes}_{|\pi|} E_n$ существуют $x_k \in (E_k)_+$ $(k = 1, \ldots, n)$ такие, что для любого $n \in \mathbb{N}$ можно подобрать элемент $v_n \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ так, что выполняется $\|u - v_n\|_{|\pi|} \leqslant \frac{1}{n} \|x_1 \otimes \cdots \otimes x_n\|_{|\pi|} = \frac{1}{n} \|x_1\|_{E_1} \cdots \|x_n\|_{E_n}$. Последнее равенство возможно в силу того что норма $\|\cdot\|_{|\pi|}$ является так называемой кросс-нормой, т. е. $\|x_1 \otimes \cdots \otimes x_n\|_{|\pi|} = \|x_1\|_{|\pi|} \cdot \ldots \cdot \|x_n\|_{|\pi|}$, см. [8, лемма 1D]. Итак, $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ плотно в $E_1 \hat{\otimes}_{|\pi|} \cdots \hat{\otimes}_{|\pi|} E_n$.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество $A_m = \{\sum_{j=1}^{m} a_j : a_1, \ldots, a_m \in M\}$ и положим $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$. Очевидно, что $A \subset E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. По построению видно, что A_k счетно, так как допускает представление $A_k = \sigma_k(M^k)$, где $\sigma_k(a_1, \ldots, a_m) = a_1 + \cdots + a_m$ и $M^k = \underbrace{M \times \cdots \times M}_{k\text{-раз}}$, причем множество M^k счетно. Остается показать, что так построенное множество A плотно в $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. Для этого рассмотрим элемент $a := \sum_{j=1}^{k} x_{1j} \otimes \cdots \otimes x_{nj}$ из $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. Так как M_i плотно в E_i, то для фиксированных номеров $i \leqslant n$ и $j \leqslant k$ существует последовательность $(u_{ij}^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ такая, что $\sum_{j=1}^{k} u_{1j}^{(p)} \otimes \cdots \otimes u_{nj}^{(p)}$ в A_k, где $(u_{ij}^{(p)}) \in M_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $(u_{ij}^{(p)}) \to x_{ij}$ при $p \to \infty$. Таким образом, $a \in \bar{A}_k$, а следовательно и $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \subset \bar{A}$. $\rhd$

Замечание 3.3. Как показал Схеп в [9, теорема 2.2], банаховы решетки $E_k = L^{p_k}(\Omega_k, \Sigma_k, \mu_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$ обладают свойством субаддитивности, если $\sum_{k=1}^{n} p_k^{-1} = 1$. Таким образом, в этом случае теорема 3.2 имеет место, если только соответствующие пространства с мерой $(\Omega_k, \Sigma_k, \mu_k)$ сепарабельны. Нам неизвестно, можно ли из условий теоремы 3.2 удалить условие субаддитивности.

Литература

1. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—London: Acad. Press Inc., 1985.
2. *Abramovich Yu. A., Wickstead A. W.* The regularity of order bounded operators into $C(K)$. II // Quart. J. Math. Oxford.—1993.—Vol. 44, № 3.—P. 257–270.
3. *Кусраева З. А., Ильина К. Ю.* О продолжении положительных операторов // Сиб. мат. журн.—2020.—Т. 61, № 2.—С. 330—336. DOI: 10.33048/smzh.2020.61.208.
4. *Loane J.* Polynomials on Riesz Spaces. PhD Thesis. Galway: National Univ. of Ireland, 2008.
5. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices.—Berlin: Springer etc., 1991.
6. *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces.—Berlin: Springer, 1999.
7. *Fremlin D. H.* Topological Riesz Spaces and Measure Theory.—Cambridge University Press, 1974.
8. *Fremlin D. H.* Tensor product of Banach lattices // Math. Ann.—1974.—Vol. 211.—P. 87–106.
9. *Schep A.* Factorization of positive multilinear maps // Illinois Journal of Math.—1984.—Vol. 28, № 4.—P. 579–591. DOI: 10.1215/ijm/1256045967.

Статья поступила 14 сентября 2022 г.

Гелиева Алина Альбертовна
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
младший научный сотрудник
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: gelieva00@mail.ru

Кусраева Залина Анатольевна
Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1
E-mail: zali13@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-8817-1888

Vladikavkaz Mathematical Journal
, Volume , Issue , P. 70–76

ON EXTENSION OF POSITIVE MULTILINEAR OPERATORS

Gelieva, A. A.[1] and Kusraeva, Z. A.[2]

[1] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia;
[2] North Caucasus Center for Mathematical Research VSC RAS,
1 Williams St., village of Mikhailovskoye 363110, Russia
E-mail: gelieva00@mail.ru, zali13@mail.ru

Abstract. Using the linearization of positive multilinear operators by means of the Fremlin tensor product of vector lattices one can show that a multilinear operator acting from the Cartesian product of majorizing subspaces of vector lattices to Dedekind complete vector lattice admits an extension to a positive multilinear operator defined on the Cartesian product of the ambient vector lattices. In this note, we establish that this result remains valid if the multilinear operator is defined on the Cartesian product of majorizing subspaces of separable Banach lattices and takes values in a topological vector lattice with the σ-interpolation property, provided that the mentioned Banach lattices have the property of subadditivity. The latter ensures that the algebraic tensor product of the majorizing subspaces is majorizing in the Fremlin tensor product of the Banach lattices under consideration. An open question is stated: whether or not the result remains valid if the subadditivity property is omitted (or weakened). The possibility of weakening the requirement of order completeness of the target lattice by imposing some additional requirements on the domain vector lattices was first observed by Abramovich and Wikstead when proving one version of the Hahn–Banach–Kantorovich theorem.

Key words: multilinear operator, positive operator, topological vector lattice, separability, σ-interpollation property, majorizing sublattice.

AMS Subject Classification: 46A16, 46B42, 46G25, 47A40, 47H60.

For citation: *Gelieva, A. A. and Kusraeva, Z. A.* On Extension of Positive Multilinear Operators, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 4, pp. 70–76 (in Russian). DOI: 10.46698/l7711-6989-4987-f.

References

1. *Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. Positive Operators,* London, Acad. Press Inc., 1985.
2. *Abramovich, Yu. A. and Wickstead, A. W.* The Regularity of Order Bounded Operators into $C(K)$. II, *The Quarterly Journal of Mathematics*, 1993, vol. 44, no. 3, p. 257–270.
3. *Ilina, K. Y. and Kusraeva, Z. A.* Extension of Positive Operators, *Siberian Mathematical Journal*, 2020, vol. 61, pp. 261–265, DOI: 10.1134/S0037446620020081.
4. *Loane, J. Polynomials on Riesz Spaces. PhD Thesis*, Galway, National Univ. of Ireland, 2008.
5. *Meyer-Nieberg, P. Banach Lattices*, Berlin, Springer etc., 1991.
6. *Dineen, S. Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Berlin, Springer, 1999.
7. *Fremlin, D. H. Topological Riesz Spaces and Measure Theory*, Cambridge University Press, 1974.
8. *Fremlin, D. H.* Tensor Product of Banach Lattices, *Mathematische Annalen*, 1974, vol. 211, pp. 87–106.
9. *Schep, A.* Factorization of Positive Multilinear Maps, *Illinois Journal of Math.*, 1984, vol. 28, no. 4, pp. 579–591. DOI: 10.1215/ijm/1256045967.

Received September 14, 2022

Alina A. Gelieva
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Junior Researcher
E-mail: gelieva00@mail.ru

Zalina A. Kusraeva
North Caucasus Center for Mathematical Research VSC RAS,
1 Williams Str., village of Mikhailovskoye 363110, Russia,
Leading Researcher
E-mail: zali13@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-8817-1888