Владикавказский математический журнал
, Том , Выпуск , С. 1–23

УДК 517.955.8
DOI 10.46698/u8315-8858-4224-f

НАХОЖДЕНИЕ НЕИЗВЕСТНОЙ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ В МНОГОМЕРНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА#

П. В. Бабич[1]

[1] Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук,
Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, 8

E-mail: `xblahblahc@gmail.com`

Аннотация. В работе рассматривается задача Коши с нулевым начальным условием для многомерной линейной гиперболической системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами и быстро осциллирующей по времени правой частью. Каждая компонента последней является произведением двух функций, одна из которых зависит только от пространственной переменной, а вторая — только от временной и «быстрой временной» переменных. Функции-сомножители, зависящие от пространственной переменной, известны, а зависящие от времени быстро осциллирующие сомножители неизвестны. Поставлена и решена обратная коэффициентная задача о восстановлении последних по некоторым дополнительным сведениям о частичной асимптотике решения задачи Коши в том случае, когда правая часть системы известна (прямая задача). Эти дополнительные сведения состоят в задании значений нескольких первых коэффициентов асимптотики, вычисленных в определенной точке пространства. Такой вид условия переопределения (дополнительного условия) отличает постановку обратной задачи от постановки, используемой в классической теории обратных коэффициентных задач, где условия переопределения ставятся на точное решение. Таким образом, в работе постановка и решение обратной задачи предваряются решением задачи, состоящей в построении и обосновании частичной асимптотики решения. На этом этапе, в частности, определяется, сколько первых коэффициентов асимптотического разложения решения будет задействовано в условии переопределения обратной задачи. Отметим еще, что эволюционные задачи с быстро осциллирующими данными играют важную роль в математике и ее приложениях уже потому, что моделируют многие физические процессы; к примеру, связанные с высокочастотными механическими, электромагнитными или иными колебаниями. При этом вопрос о построении для таких задач нескольких первых членов асимптотики решения нередко является существенно более простым, нежели построение собственно решения (а также вычисленние его значений в нужных точках). Поэтому развитие для быстро осциллирующих задач теории обратных коэффициентных задач представляется несомненно актуальным.

Ключевые слова: уравнения с частными производными, гиперболические системы, быстро осциллирующая правая часть, асимптотика решения, обратная задача.

AMS Subject Classification: 35L40, 35L45, 35R30, 35C20.

Образец цитирования: *Бабич П. В.* Нахождение неизвестной быстро осциллирующей правой части в многомерной гиперболической системе первого порядка // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 1.—С. 15–23. DOI: 10.46698/u8315-8858-4224-f.

Введение

Данная работа относится к теории обратных коэффициентных задач для уравнений с быстро осциллирующими данными. Теория обратных коэффициентных задач широко представлена в литературе как монографиями (см., например, [1–4]), так и статьями

#Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 20-11-20141.

(см., например, [5–7]). Однако обратные задачи с быстро осциллирующими данными в настоящее время исследованы не достаточно. В то же время, такие задачи моделируют многие физические процессы, связанные, к примеру, с высокочастотными механическими, электромагнитными или иными колебаниями. Данная статья, как и работы [8–11], в которых исследуются вопросы восстановления быстро осциллирующих данных для параболических и гиперболических начально-краевых задач, лежит на стыке теории асимптотических методов и теории обратных коэффициентных задач.

В данной работе рассматривается задача Коши с однородным начальным условием для многомерной гиперболической системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами и быстро осциллирующей по времени правой частью. При этом правая часть является вектор-функцией, компоненты которой имеют вид $f^j(x)r^j(t,\omega t)$, $j=1,\ldots,m$, $m\in\mathbb{N}$, $\omega\gg 1$. Исследуется обратная коэффициентная задача о нахождении неизвестных сомножителей $r^j(t,\omega t)$. Доказано, что по коэффициентам двучленной асимптотики решения, вычисленной в фиксированной точке пространства x^0, эти функции определяются однозначно. Предварительно решена прямая задача о построении двучленной асимптотики решения при известной правой части.

1. Вспомогательные результаты

Символом Q обозначим множество $Q=\{(x,t): x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ t\in[0,T]\}$, $n\in\mathbb{N}$, $T>0$. Рассмотрим в Q линейную систему вида

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+\sum\limits_{j=1}^{n} B_j\frac{\partial u}{\partial x_j}=F(x)\circ R(t),\\ u(x,t)|_{t=0}=0.\end{cases}\tag{1}$$

Вектор-функция $u: Q\to\mathbb{R}^m$, $u=(u^1,\ldots,u^m)$, неизвестна, а B_j — матрицы размера $m\times m$, вектор-функции $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $F=(F^1,\ldots,F^m)$, $R:[0,T]\to\mathbb{R}^m$, $R=(R^1,\ldots,R^m)$ заданы. Здесь под знаком $\circ$ мы понимаем произведение Адамара, т. е. поэлементное произведение векторов.

Обозначим также для $y\in\mathbb{R}^n$

$$B(y)=\sum_{j=1}^{n} y_jB_j.$$

Будем считать, что для каждого $y\in\mathbb{R}^n$ матрица $B(y)$ имеет m вещественных собственных значений

$$\lambda_1(y)\leqslant\lambda_2(y)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_m(y).$$

В данной работе решением задачи (1) мы называем ее классическое решение, т. е. вектор-функцию $u\in C^1(Q)$, удовлетворяющую (1).

Теорема 1. *Пусть* $F\in W_2^{m+\left[\frac{n}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^n)$, *а также* $R(t)$ *— непрерывная на* $[0,T]$ *вектор-функция. Тогда существует единственное решение начальной задачи* (1).

$\lhd$ Доказательство этого факта основано на [12, § 5.8.4, § 7.3]. $\rhd$

2. Основные результаты

2.1. Прямая задача. Двучленная асимптотика. Рассмотрим в Q линейную систему с большим параметром ω:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{n} B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f(x) \circ r(t, \omega t), \quad \omega \gg 1, \\ u(x,t)|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Как и в предыдущем параграфе, вектор-функция $u : Q \to \mathbb{R}^m$, $u = (u^1, \dots, u^m)$, неизвестна, а B_j — матрицы размера $m \times m$, вектор-функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f^1, \dots, f^m)$, $r : D = [0, T] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$, $r = (r^1, \dots, r^m)$ заданы.

Для вектор-функций f и r будем предполагать, что выполнены следующие условия. Вектор-функция $f \in W_2^{m+[\frac{n}{2}]+2}(\mathbb{R}^n)$, а функция r непрерывна на множестве D и 2π-периодична по τ. Представим ее в виде суммы:

$$r(t, \tau) = r_0(t) + r_1(t, \tau), \tag{3}$$

где $r_0(t)$ — среднее вектор-функции $r(t, \tau)$ по τ:

$$r_0(t) = \langle r(t, \cdot) \rangle = \langle r(t, \tau) \rangle_\tau \equiv \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} r(t, \tau) \, d\tau,$$

и будем предполагать, что $r_1(t, \tau)$ дифференцируема по t. Вектор-функцию r, обладающую указанными свойствами, для краткости будем называть вектор-функцией класса **A**.

Определим теперь некоторые функции и константы, которые понадобятся нам в дальнейшем:

$$\rho_0(t, \tau) = \int\limits_0^\tau r_1(t, s) \, ds - \left\langle \int\limits_0^\tau r_1(t, s) \, ds \right\rangle_\tau,$$

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f(y) \, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Представим решение задачи (2) в виде:

$$u_\omega(x, t) = U_\omega(x, t) + W_\omega(x, t), \quad \omega \gg 1, \tag{4}$$

$$U_\omega(x, t) = u_0(x, t) + \omega^{-1}[u_1(x, t) + v_1(x, t, \tau)], \tag{5}$$

$$u_0(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ixy} \int\limits_0^t e^{-iB(y)(t-s)} \big(\hat{f}(y) \circ r_0(s)\big) \, ds dy, \tag{6}$$

$$v_1(x, t, \tau) = f(x) \circ \rho_0(t, \tau), \tag{7}$$

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ixy} e^{-itB(y)} \big(\hat{f}(y) \circ \rho_0(0, 0)\big) \, dy. \tag{8}$$

Теорема 2. *Решение $u_\omega(x, t)$ задачи (2) представимо в виде (4)–(8), и*

$$\|W_\omega(x, t)\|_{C(Q)} = o(\omega^{-1}), \quad \omega \to \infty. \tag{9}$$

◁ Решение задачи (2) представим в виде

$$u_\omega(x,t) = u_0(x,t) + \omega^{-1}[u_1(x,t) + v_1(x,t,\omega t)] + W_\omega(x,t), \tag{10}$$

где слагаемое W_ω предполагается равномерно в Q бесконечно малым (позже это будет доказано) достаточно высокого порядка относительно ω^{-1}, $\omega \gg 1$.

Подставив (10) в задачу (2), получим

$$\begin{cases} u_{0t} + \sum\limits_{j=1}^{n} B_j u_{0x_j} + v_{1\tau} \\ \qquad + \omega^{-1}\left[u_{1t} + \sum\limits_{j=1}^{n} B_j u_{1x_j} + v_{1t} + \sum\limits_{j=1}^{n} B_j v_{1x_j}\right] + W_{\omega t} + \sum\limits_{j=1}^{n} B_j W_{\omega x_j} \\ \qquad\qquad = f(x)\circ r_0(t) + f(x)\circ r_1(t,\tau), \quad \tau = \omega t, \\ u_0 + \omega^{-1}[u_1 + v_1] + W_\omega\big|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Приравнивая в последних равенствах коэффициенты при одинаковых степенях ω и в полученных равенствах проводя операцию усреднения по τ, получим следующие задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{n} B_j \frac{\partial u_0}{\partial x_j} = f(x)\circ r_0(t), \\ u_0|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial \tau} = f(x)\circ r_1(t,\tau), \\ \langle v_1\rangle_\tau = 0, \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{n} B_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j} = 0, \\ u_1|_{t=0} = -v_1(x,0,0). \end{cases} \tag{14}$$

Задачи (12)–(14) в силу наших предположений относительно вектор-функций f и r однозначно разрешимы и при этом решения u_0, u_1, v_1 имеют вид (6), (8), (7) соответственно. Из систем (11) и (12)–(14) находим

$$\begin{cases} \frac{\partial W_\omega}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{n} B_j \frac{\partial W_\omega}{\partial x_j} = -\omega^{-1}\left[\frac{\partial v_1}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{n} B_j \frac{\partial v_1}{\partial x_j}\right], \\ W_\omega|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{15}$$

В силу теоремы 1 решение задачи (15) имеет вид

$$W_\omega(x,t) = \omega^{-1}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ixy}\left[\int\limits_0^t e^{-iB(y)(t-s)}\big(\hat f(y)\circ \rho_{0t}(s,\omega s)\big)\,ds \right.$$
$$\left. - iB(y)\int\limits_0^t e^{-iB(y)(t-s)}\big(\hat f(y)\circ \rho_0(s,\omega s)\big)\,ds\right] dy \equiv W_{1,\omega}(x,t) + W_{2,\omega}(x,t).$$

Для доказательства теоремы 2 достаточно установить соотношения порядка

$$\|W_{1,\omega}(x,t)\|_{C(Q)} = o(\omega^{-1}), \quad \|W_{2,\omega}(x,t)\|_{C(Q)} = o(\omega^{-1}), \quad \omega\to\infty.$$

Поскольку рассуждения при выводе их аналогичны, ограничимся выводом первого из них. Воспользуемся оценками [12, § 5.8.4]

$$|\hat{f}(y)| \leqslant C_1 \frac{|g(y)|}{1+|y|^{m+[\frac{n}{2}]+2}}, \quad C_1 > 0,\ g \in L_2(\mathbb{R}^n),$$

$$\|W_{1,\omega}(x,t)\|_{C(Q)} \leqslant \omega^{-1} C_2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \frac{1+|y|^{m-1}}{1+|y|^{m+[\frac{n}{2}]+2}}\, dy \left\| \int\limits_0^t e^{t-s} \rho_{0t}(s,\omega s)\, ds \right\|_{C([0,T])},$$

где C_2 — некоторое положительное число. Так как интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \frac{1+|y|^{m-1}}{1+|y|^{m+[\frac{n}{2}]+2}}\, dy$$

сходится в силу неравенства Коши — Буняковского, далее достаточно доказать равномерную относительно $t \in [0,\infty)$ оценку

$$\left\| \int\limits_0^t e^{t-s} \rho_{0t}(s,\omega s)\, ds \right\|_{C([0,T])} = o(1), \quad \omega \to \infty. \tag{16}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем достаточно малое $t_0 > 0$, чтобы

$$\left\| \int\limits_0^{t_0} e^{t-s} \rho_{0t}(s,\omega s)\, ds \right\|_{C([0,T])} < \varepsilon, \tag{17}$$

а участок $[t_0, t]$ разобьем на N равных частей $[t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, и воспользуемся равенством

$$\int\limits_{t_0}^{t} e^{t-s} \rho_{0t}(s,\omega s)\, ds$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} e^{t-s} \rho_{0t}(s,\omega s)\, ds - \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} e^{t-t_k} \rho_{0t}(t_k,\omega s)\, ds \right]$$
$$+ \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} e^{t-t_k} \rho_{0t}(t_k,\omega s)\, ds = S_1 + S_2.$$

Выберем N столь большим, что при всех $\omega > 0$

$$|S_1| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{18}$$

Далее, в силу равенства

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} e^{t-t_k} \rho_{0t}(t_k,\omega s)\, ds = e^{t-t_k} \left[\omega^{-1} \int\limits_0^{\omega t_{k+1}} \rho_{0t}(t_k,\tau)\, d\tau - \omega^{-1} \int\limits_0^{\omega t_k} \rho_{0t}(t_k,\tau)\, d\tau \right]$$

и того факта, что вектор-функция ρ_{0t} имеет нулевое среднее по второй переменной, найдется такое ω_0, что при $\omega > \omega_0$

$$|S_2| < \frac{\varepsilon}{2N}. \tag{19}$$

Из соотношений (17), (18) и (19) следует асимптотическое равенство (16). $\rhd$

2.2. Обратная задача. Пусть в начальной задаче (2) матрицы B_j и вектор-функция f те же, что и в п. 2.1, и кроме того существует такая точка x^0, в которой

$$f^j(x^0) \neq 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{20}$$

Вектор-функция r класса $\mathbf{A}$ не известна. Зададим точку $x^0 \in \mathbb{R}^n$, в которой выполнено условие (20), а также вектор-функции $\varphi_0(t)$, $\varphi_2(t, \tau)$:

$$\varphi_0 : [0, T] \to \mathbb{R}^m, \quad \varphi_0 = (\varphi_0^1, \ldots, \varphi_0^m), \quad \varphi_0 \in C^1([0, T]), \quad \varphi_0(0) = 0,$$
$$\varphi_2 : D \to \mathbb{R}^m, \quad \varphi_2 = (\varphi_2^1, \ldots, \varphi_2^m), \quad \varphi_{2t\tau} \in C(D),$$

кроме того, $\varphi_2(t, \tau)$ — 2π-периодична по τ с нулевым средним. Введем еще в рассмотрение функцию $\varphi_1 : [0, T] \to \mathbb{R}^m$, $\varphi_1 = (\varphi_1^1, \ldots, \varphi_1^m)$:

$$\varphi_1(t) = -\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix^0 y} e^{-itB(y)} \big(\hat{f}(y) \circ \varphi_{2\tau}(0, 0) \circ h\big)\, dy,$$

где

$$h \in \mathbb{R}^m, \quad h_j = \frac{1}{f^j(x^0)}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Обратная задача состоит в нахождении такой вектор-функции $r(t, \tau)$ класса $\mathbf{A}$, для которой решение $u_\omega(x, t)$ задачи (2) удовлетворяет условию

$$\big\| u_\omega(x^0, t) - \big[\varphi_0(t) + \omega^{-1}(\varphi_1(t) + \varphi_2(t, \tau))\big] \big\|_{C([0,T])} = o(\omega^{-1}), \quad \omega \to \infty. \tag{21}$$

Теорема 3. *Для любой пары вектор-функций φ_0, φ_2 и точки x^0, удовлетворяющих указанным выше условиям, существует единственная вектор-функция r класса $\mathbf{A}$, при которой решение $u_\omega(x, t)$ задачи (2) удовлетворяет условию (21).*

$\lhd$ Из теоремы 2 следует, что при заданной вектор-функции $r(t, \tau)$ класса $\mathbf{A}$ решение задачи (2) представимо в виде (4)–(8). Пусть вектор-функция $r(t, \tau)$ является решением обратной задачи и u_ω — отвечающее ему решение задачи (2). В силу соотношений (9), (21) равномерно по t

$$u_0(x^0, t) + \omega^{-1}\Big[u_1(x^0, t) + v_1(x^0, t, \tau)\Big] = \varphi_0(t) + \omega^{-1}[\varphi_1(t) + \varphi_2(t, \tau)] + o(\omega^{-1}), \quad \omega \gg 1, \tag{22}$$

Приравнивая в (22) коэффициенты при одинаковых степенях ω^{-k}, $k = 0, 1$, и, проводя затем усреднение по τ, получим

$$u_0(x^0, t) = \varphi_0(t), \quad v_2(x^0, t, \tau) = \varphi_2(t, \tau),$$

дифференцируя полученные равенства по t и τ соответственно, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} u_0(x^0, t) = \varphi_0'(t), \quad \frac{\partial}{\partial \tau} v_2(x^0, t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_2(t, \tau).$$

В силу условий задачи (13)

$$r_1(t,\tau) = \varphi_{2\tau}(t,\tau) \circ h. \tag{23}$$

Вектор-функция $u_0(x,t)$ определяется равенством (6), из которого находим

$$\frac{\partial}{\partial t} u_0(x^0,t) = f(x^0) \circ r_0(t) - \frac{i}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix_0 y} B(y) e^{-iB(y)(t-s)} \big(\hat{f}(y) \circ r_0(s)\big)\, dyds. \tag{24}$$

Равенство (24) равносильно уравнению Вольтерра второго рода

$$r_0(t) = \int\limits_0^t K(t-s) r_0(s)\, ds + h \circ \varphi_0'(t), \tag{25}$$

где

$$K(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} (\Phi(x^0))^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix^0 y} iB(y) e^{-iB(y)t} \hat{\Phi}(y)\, dy, \tag{26}$$

$$\Phi(x) = \operatorname{diag}\big(f^1(x), \dots, f^m(x)\big), \quad \hat{\Phi}(x) = \operatorname{diag}\big(\hat{f}^1(x), \dots, \hat{f}^m(x)\big).$$

В силу условий, наложенных на f, а также [12, § 7.3], матрица-функция $K(t)$ непрерывна. Уравнение Вольтерра второго рода (25) имеет единственное непрерывное решение $(r_0(t))_j$. В силу условий, наложенных на вектор-функции φ_0, φ_2, а также непрерывности $K(t)$ функции r_0 и r_1 принадлежат требуемым классам.

Покажем теперь, что найденная вектор-функция r является решением обратной задачи. Так как функция $r = r_0 + r_1$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то решение задачи (2) представимо в виде (4)–(8). Для доказательства асимптотического равенства (21) достаточно установить равенства

$$u_0(x^0,t) = \varphi_0(t), \quad u_1(x^0,t) = \varphi_1(t), \quad v_1(x^0,t,\tau) = \varphi_2(t,\tau).$$

Из предыдущей части доказательства известно, что $r_0(t)$ удовлетворяет равенствам (24), (25). Отсюда следует, что для вектор-функции $u_0(x^0,t)$ верно равенство $u_{0t}(x^0,t) = \varphi_0'(t)$. Учитывая, что $u_0(x^0,0) = \varphi_0(0) = 0$, получим $u_0(x^0,t) = \varphi_0(t)$. Вектор-функция r_1 определяется равенством (23). Учитывая это, найдем

$$\rho_0(t,\tau) = h \circ \left[\int\limits_0^\tau \varphi_{2\tau}(t,s)\, ds - \left\langle \int\limits_0^\tau \varphi_{2\tau}(t,s)\, ds \right\rangle_\tau \right].$$

Подставляя это выражение и точку $x = x^0$ в (7) и (8), учитывая, что вектор-функция φ_2 является 2π-периодической с нулевым средним по второй переменной, получим $v_1(x^0,t,\tau) = \varphi_2(t,\tau)$, $u_1(x^0,t) = \varphi_1(t)$. $\rhd$

Литература

1. *Лаврентьев М. М., Резницкая К. Г., Яхно В. Г.* Одномерные обратные задачи математической физики.—Новосибирск: Наука, 1982.—88 с.
2. *Денисов А. М.* Обратные задачи математической физики.—М.: МГУ, 1984.
3. *Романов В. Г.* Введение в теорию обратных задач.—М.: Наука, 1994.—260 с.
4. *Lavrentiev M. M.* Inverse Problems of Mathematical Physics.—Utrecht: VSP, 2003.

5. *Денисов А. М.* Асимптотика решений обратных задач для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной // Журн. вычисл. матем. и мат. физики.—2013.—Т. 53, № 5.—С. 744–752. DOI: 10.7868/S0044466913050049.
6. *Камынин В. Л.* Обратная задача одновременного определения правой части и младшего коэффициента в параболическом уравнении со многими пространственными переменными // Мат. заметки.—2015.—Т. 97, № 3.—С. 368–381. DOI: 10.4213/mzm10499.
7. *Денисов А. М.* Задачи определения неизвестного источника в параболическом и гиперболическом уравнениях // Журн. вычисл. матем. и мат. физики.—2015.—Т. 55, № 5.—С. 830–835. DOI: 10.7868/S0044466915050087.
8. *Бабич П. В., Левенштам В. Б., Прика С. П.* Восстановление быстро осциллирующего источника в уравнении теплопроводности по асимптотике решения // Журн. вычисл. матем. и мат. физики.—2017.—Т. 57, № 12.—С. 1955–1965. DOI: 10.7868/S0044466917120079.
9. *Бабич П. В., Левенштам В. Б.* Восстановление быстро осциллирующего свободного члена в многомерном гиперболическом уравнении // Мат. заметки.—2017.—Т. 57, № 12.—С. 1955–1965. DOI: 10.4213/mzm12151.
10. *Бабич П. В., Левенштам В. Б.* Восстановление быстро осциллирующей правой части волнового уравнения по частичной асимптотике решения // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, № 4.—С. 28–44. DOI: 10.46698/s0301-1959-8380-s.
11. *Левенштам В. Б.* Параболические уравнения с большим параметром. Обратные задачи // Мат. заметки.—2020.—Т. 107, № 3.—С. 412–425. DOI: 10.4213/mzm12245.
12. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. Университетская серия. Т. 7.—Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003.—562 с.

Статья поступила 19 июня 2021 г.

Бабич Павел Васильевич
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук,
младший научный сотрудник
РОССИЯ, 119991, Москва, ул. Губкина, 8
E-mail: xblahblahc@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9845-7492

Vladikavkaz Mathematical Journal
, Volume , Issue , P. 15–23

FINDING AN UNKNOWN RAPIDLY OSCILLATING RIGHT-HAND SIDE IN MULTIDIMENSIONAL FIRST-ORDER HYPERBOLIC SYSTEM

Babich, P. V.[1]
[1] Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences,
8 Gubkina St., Moscow 119991, Russia
E-mail: xblahblahc@gmail.com

Abstract. The paper considers the Cauchy problem with a zero initial condition for a multidimensional linear hyperbolic system of first-order differential equations with constant coefficients and a right-hand side rapidly oscillating in time. Each component of the latter is a product of two functions, one of which depends only on the spatial variable, and the second only on the temporal and “fast temporal” variables. The the multiplier functions that depend on the spatial variable are known, but the time-dependent, rapidly oscillating multiplier are unknown. The inverse coefficient problem of recovering the latter from some additional information on the partial asymptotics of the solution of the Cauchy problem in the case when the right-hand side of the system is known (direct problem) is posed and solved. This additional information consists in setting the values of the first few asymptotic coefficients calculated at a certain point of the space. This type of overdetermination condition (additional condition) distinguishes the statement of the inverse problem from the one used in the classical theory of inverse coefficient problems, where the overdetermination conditions are

imposed on the exact solution. Thus, the formulation and solution of the inverse problem is preceded by the solution of the problem, which consists in constructing and justifying the partial asymptotics of the solution. At this stage, in particular, it is determined how many first coefficients of the asymptotic expansion of the solution will be used in the condition of redefining the inverse problem. We also note that evolutionary problems with rapidly oscillating data play an important role in mathematics and its applications, already because they simulate many physical processes; for example, associated with high-frequency mechanical, electromagnetic or other vibrations. Moreover, the question of constructing for such problems the first few terms of the asymptotics of the solution is often much simpler than constructing the solution itself (and also calculating its values at the required points). Therefore, the development of the theory of inverse coefficient problems for rapidly oscillating problems seems to be undoubtedly relevant.

Key words: partial differential equations, hyperbolic sestems, rapidly oscillating right-hand side, asymptotics, inverse problems.

AMS Subject Classification: 35L40, 35L45, 35R30, 35C20.

For citation: *Babich, P. V.* Finding an Unknown Rapidly Oscillating Right-Hand Side in Multidimensional First-Order Hyperbolic System, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 1, pp. 15–23 (in Russian). DOI: 10.46698/u8315-8858-4224-f.

References

1. *Lavret'ev, M. M., Reznitskaya, K. G. and Yakhno, V. G. One-Dimensional Inverse Problems of Mathematical Physics*, Novosibirsk, Nauka, 1982 (in Russian).
2. *Denisov, A. M. Introduction to the Theory of Inverse Problems*, Moscow, Nauka, 1994 (in Russian).
3. *Romanov, V. G. Inverse Problems of Mathematical Physics*, Moscow, Nauka, 1984 (in Russian).
4. *Lavrentiev, M. M. Inverse Problems of Mathematical Physics*, Utrecht, VSP, 2003.
5. *Denisov, A. M.* Asymptotic Expansions of Solutions to Inverse Problems for a Hyperbolic Equation with a Small Parameter Multiplying the Highest Derivative, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2013, vol. 53, no. 5, pp. 580–587. DOI: 10.1134/S0965542513050047.
6. *Kamynin, V. L.* The Inverse Problem of the Simultaneous Determination of the Right-Hand Side and the Lowest Coefficient in Parabolic Equations with Many Space Variables, *Mathematical Notes*, 2015, vol. 97, pp. 349–361. DOI: 10.1134/S0001434615030062.
7. *Denisov, A. M.* Problems of Determining the Unknown Source in Parabolic and Hyperbolic Equations, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, no. 5, pp. 829–833. DOI: 10.1134/S0965542515050085.
8. *Babich, P. V., Levenshtam, V. B. and Prika, S. P.* Recovery of a Rapidly Oscillating Source in the Heat Equation from Solution Asymptotics, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, pp. 1908–1918. DOI: 10.1134/S0965542517120065.
9. *Babich, P. V. and Levenshtam, V. B.* Recovery of a Rapidly Oscillating Absolute Term in the Multidimensional Hyperbolic Equation, *Mathematical Notes*, 2018, vol. 104, no. 4, pp. 489–497. DOI: 10.1134/S000143461809016X.
10. *Babich, P. V. and Levenshtam, V. B.* Recovery of Rapidly Oscillated Right-Hand Side of the Wave Equation by the Partial Asymptotics of the Solution, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 28–44 (in Russian). DOI: 10.46698/s0301-1959-8380-s.
11. *Levenshtam, V. B.* Parabolic Equations with Large Parameter. Inverse Problems, *Mathematical Notes*, 2020, vol. 107, pp. 452–463. DOI: 10.1134/S0001434620030098.
12. *Evans, L. C. Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.

Received June 19, 2021

Pavel V. Babich
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences,
8 Gubkina St., Moscow 119991, Russia,
Junior Researcher
E-mail: `xblahblahc@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0002-9845-7492