Владикавказский математический журнал
, Том , Выпуск , С. 1–132

УДК 517.926
DOI 10.46698/a8125-0078-5238-y

ПОКАЗАТЕЛИ ОРИЕНТИРОВАННОЙ ВРАЩАЕМОСТИ РЕШЕНИЙ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А. Х. Сташ[1]

[1] Кавказский математический центр, Адыгейский государственный университет,
Россия, 385000, Майкоп, ул. Первомайская, 208

E-mail: `aidamir.stash@gmail.com`

Аннотация. В данной работе полностью изучены показатели ориентированной врашаемости решений линейных однородных автономных дифференциальных систем. Установлено, что у любого решения автономной системы дифференциальных уравнений его сильные показатели ориентированной врашаемости совпадают со слабыми. Также показано, что спектр этого показателя (т. е. множество значений на ненулевых решениях) естественным образом определяется теоретико-числовыми свойствами набора мнимых частей собственных значений матрицы системы. Это множество может содержать (в отличие от показателей колеблемости и блуждаемости) значения, отличные от нуля и от мнимых частей собственных значений матрицы системы, причем мощность этого спектра может быть экспоненциально велика по сравнению с размерностью пространства. При доказательстве этого факта были использованы базовые утверждения эргодической теории, в частности, теорема Вейля. Как следствие выводится, что спектры всех показателей ориентированной вращаемости автономных систем с симметричной матрицей состоят из одного нулевого значения. Кроме того, на множестве автономных систем установлены соотношения между главными значениями изучаемых показателей. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что показатели ориентированной вращаемости, несмотря на их простые и естественные определения, не являются в теории колебаний аналогами показателя Ляпунова.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, автономная система, показатель ориентированной вращаемости, показатель колебимости.

AMS Subject Classification: 34C10, 34D05, 34D08.

Образец цитирования: *Сташ А. Х.* Показатели ориентированной вращаемости решений автономных дифференциальных систем // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 3.—С. 120–132. DOI: 10.46698/a8125-0078-5238-y.

1. Введение

Ляпуновские характеристики колеблемости решений дифференциальных уравнений и систем впервые были введены И. Н. Сергеевым в работах [1–4]. Мотивацией к их рассмотрению послужило следующее обстоятельство. Как известно, показатели Ляпунова и Перрона линейной дифференциальной системы совпадают в автономном случае с вещественными частями собственных значений матрицы коэффициентов и поэтому могут рассматриваться для систем с переменными коэффициентами как аналоги вещественных частей собственных значений (показатели Перрона после регуляризации по Миллионщикову). Аналогами же мнимых частей собственных значений для линейных

дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами являются частоты Сергеева (которые ранее назывались характеристическими частотами) после регуляризации по Миллионщикову [2–5], а для линейных дифференциальных систем — показатели колеблемости (ранее они назывались полными и векторными частотами) [6–10]. Поэтому введением (в дополнение к показателям Ляпунова и Перрона) этих характеристик достигается естественная и необходимая полнота рассмотрения линейных дифференциальных уравнений и систем с точки зрения асимптотики поведения на бесконечности их решений в той степени, в какой это поведение для автономных уравнений и систем отражают корни их характеристических многочленов.

Круг рассматриваемых характеристик постепенно расширялся. В 2013 г. в докладе [11] И. Н. Сергеевым были определены показатели ориентированной вращаемости. Их спектры автономных систем содержат множество модулей мнимых частей собственных значений матрицы системы, но не совпадает с ним в общем случае [12]. В этом же докладе [12] был поставлен вопрос о типичных значениях показателя ориентированной вращаемости и о структуре его возможного спектра. Д. С. Бурлакову удалось показать, что для широкого класса систем с постоянными коэффициентами (у которых есть действительные собственные значения или два комплексных с несоизмеримыми мнимыми частями) ноль является типичным значением данного показателя, а в случае систем с простыми чисто мнимыми собственными значениями — определить его спектр [13]. Тем самым задача определения спектров показателей ориентированной вращаемости автономных систем была решена частично. В настоящей работе, опираясь на идеи Д. С. Бурлакова, приводим полное решение этой задачи.

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathscr{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с *ограниченными непрерывными* оператор-функциями $A : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ (каждую из которых будем отождествлять с соответствующей системой). Подмножество множества $\mathscr{M}^n$, состоящее из *автономных* систем, обозначим через $\mathscr{C}^n$. Пространство решений системы $A \in \mathscr{M}^n$ обозначим через $\mathscr{S}(A)$, а подмножество всех ненулевых решений — через $\mathscr{S}_*(A)$. Далее, звездочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим

$$\mathscr{S}^n_* = \bigcup_{A \in \mathscr{M}^n} \mathscr{S}_*(A).$$

2. Показатели ориентированной вращаемости

Определение 1 [11]. Для функции $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ и конечного момента времени $t > 0$ определим функционал $\Theta(x,t)$, как такую непрерывную ветвь ориентированного угла между векторами $x(t)$ и $x(0)$, что $\Theta(x,0) = 0$. Если найдется момент времени $\tau \in [0,t]$, для которого $x(\tau) = 0$, то по определению (в ущерб непрерывности) считаем $\Theta(x,t) = +\infty$.

Определение 2 [11]. Нижние (верхние) сильный и слабый показатели ориентированной вращаемости вектор-функции $x \in \mathscr{S}^n_*$ зададим соответственно с помощью формул

$$\check{\theta}^\bullet(x) = \inf_{L \in \operatorname{End}_2\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}|\Theta(Lx,t)| \quad \left(\hat{\theta}^\bullet(x) = \inf_{L \in \operatorname{End}_2\mathbb{R}^n} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}|\Theta(Lx,t)|\right),$$
$$\check{\theta}^\circ(x) = \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L \in \operatorname{End}_2\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}|\Theta(Lx,t)| \quad \left(\hat{\theta}^\circ(x) = \varlimsup_{t\to+\infty} \inf_{L \in \operatorname{End}_2\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}|\Theta(Lx,t)|\right),$$

где $\mathrm{End}_2\,\mathbb{R}^n$ подмножество множества $\mathrm{End}\mathbb{R}^n$, состоящее из линейных операторов ранга 2.

В случае совпадения верхнего и нижнего значений какого-либо из перечисленных показателей $\hat{\varkappa}(x) = \check{\varkappa}(x)$ будем говорить, что показатель $\varkappa(x)$ является *точным*, а в случае совпадения значений слабого и сильного показателей $\varkappa^\circ(x) = \varkappa^\bullet(x)$ будем говорить, что показатель $\varkappa(x)$ является абсолютным.

Замечание. Заметим, что показатели вращаемости при $n = 1$ теряют смысл. Поэтому в дальнейшем по умолчанию будем считать, что $n \geqslant 2$.

Определение 3 [11]. Для каждого

$$\omega = \check{\theta}^\bullet, \hat{\theta}^\bullet, \check{\theta}^\circ, \hat{\theta}^\circ \tag{1}$$

назовем i-ым верхним $\omega_{\bar{i}}(A)$ и нижним $\omega_{\underline{i}}(A)$ главными (или регуляризованными по Миллионщикову) значениями соответствующего показателя ориентированной вращаемости системы $A \in \mathscr{M}^n$ величины, задаваемые равенствами

$$\omega_{\bar{i}}(A) \equiv \inf_{V \in G^i(A)} \sup_{x \in V_*} \omega(x), \qquad \omega_{\underline{i}}(A) \equiv \sup_{V \in G^{n-i+1}(A)} \inf_{x \in V} \omega(x),$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, а через $G^i(A)$ обозначено множество i-мерных подпространств пространства $\mathscr{S}(A)$.

Доказательство теоремы VI [3] переносится на рассматриваемые функционалы (1), следовательно, для любой системы $A \in \mathscr{M}^n$ справедливы соотношения

$$0 \leqslant \omega_{\bar{1}}(A) \leqslant \ldots \leqslant \omega_{\bar{n}}(A), \quad 0 \leqslant \omega_{\underline{1}}(A) \leqslant \ldots \leqslant \omega_{\underline{n}}(A), \tag{2}$$

$$\omega_{\underline{i}}(A) \leqslant \omega_{\bar{i}}(A), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$\omega_{\underline{1}}(A) = \omega_{\bar{1}}(A) = \inf_{x \in \mathscr{S}_*(A)} \omega(x), \quad \omega_{\underline{n}}(A) = \omega_{\bar{n}}(A) = \sup_{x \in \mathscr{S}_*(A)} \omega(x).$$

Последние величины обозначим через $\omega_1(A)$ и $\omega_n(A)$ соответственно.

3. Формулировка основных результатов

Определение 4 [13]. Зададим функцию $\gcd^*$ от множества неотрицательных чисел $Q = \{q_1, \ldots, q_r\}$ такую, что $\gcd^*(\{q_i\}) = q_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Если q_i, $i = 1, \ldots, r$ попарно рационально несоизмеримы, то $\gcd^*(Q) = 0$. В противном случае рассмотрим такое наибольшее число α, что множество $S = \left\{\frac{q_1}{\alpha}, \ldots, \frac{q_r}{\alpha}\right\}$ состоит из целых чисел. Если в множестве S есть хотя бы одно четное число, то $\gcd^*(Q) = 0$, иначе $\gcd^*(Q) = \alpha$.

Теорема 1. *Для произвольной системы $A \in \mathscr{C}^n$ показатель θ является точным, абсолютным, а его спектр имеет вид*

$$\mathrm{Spec}_\theta(A) = \bigl\{\gcd^*(S) \mid S \neq \varnothing,\ S \subset \{|\mathrm{Im}\,\lambda_1(A)|, \ldots, |\mathrm{Im}\,\lambda_n(A)|\}\bigr\}, \tag{4}$$

где $\lambda_i(A)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — корни характеристического многочлена системы A, упорядоченные по неубыванию модулей их мнимых частей.

Следствие 1. *Для произвольной системы $A \in \mathscr{C}^n$ спектр показателя θ дискретный, причем его мощность не может превышать $2^{\frac{n}{2}} - 1$.*

Из курса алгебры известно, что все собственные значения симметричной матрицы являются действительными. Поэтому имеет место следующее

Следствие 2. *Спектры всех показателей ориентированной вращаемости автономных систем с симметричной матрицей состоят из одного нулевого значения.*

Теорема 2. *Для любой системы $A \in \mathscr{C}^n$ при любом $\omega = \check{\theta}^\bullet, \hat{\theta}^\bullet, \check{\theta}^\circ, \hat{\theta}^\circ$ выполнены*

$$\omega_1(A) = \omega_{\underline{2}}(A) = \omega_{\overline{2}}(A) = \cdots = \omega_{\underline{n-1}}(A) = \omega_{\overline{n-1}}(A) \leqslant \omega_n(A) = |\operatorname{Im} \lambda_n(A)|. \tag{5}$$

4. Вспомогательные определения и факты

Определение 5 [8, 9]. Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости гиперкорней функции $x \in \mathscr{S}_*^n$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}_\bullet^*(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \tfrac{\pi}{t} \nu^*(x, m, t) \quad \left(\check{\nu}_\bullet^*(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \underline{\lim_{t \to +\infty}} \tfrac{\pi}{t} \nu^*(x, m, t)\right),$$
$$\hat{\nu}_\circ^*(x) \equiv \overline{\lim_{t \to +\infty}} \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \tfrac{\pi}{t} \nu^*(x, m, t) \quad \left(\check{\nu}_\circ^*(x) \equiv \underline{\lim_{t \to +\infty}} \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \tfrac{\pi}{t} \nu^*(x, m, t)\right),$$

$\nu^*(x, m, t)$ — число ее гиперкорней скалярного произведения $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$: при его подсчете каждый некратный корень берется ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз.

Лемма 1 [10]**.** *Для любого $x \in \mathscr{S}_*^n$ справедливы неравенства*

$$\hat{\theta}^\bullet(x) \leqslant \hat{\nu}_\bullet^*(x), \quad \check{\theta}^\bullet(x) \leqslant \check{\nu}_\bullet^*(x), \quad \hat{\theta}^\circ(x) \leqslant \hat{\nu}_\circ^*(x), \quad \check{\theta}^\circ(x) \leqslant \check{\nu}_\circ^*(x).$$

Определение 6 [14]. Будем называть подобными:

а) матрицы $A, B \in \mathscr{C}^n$, если для некоторой невырожденной матрицы $C \in \mathscr{C}^n$ выполняется равенство $B = CAC^{-1}$;

б) вектор-функции $x, y \in \mathscr{S}_*^n$, если для некоторой невырожденной матрицы $C \in \mathscr{C}^n$ имеет место представление $y = Cx$.

Лемма 2. *Для подобных векторов $x, y \in \mathscr{S}_*^n$ справедливо равенство*

$$\varkappa(x) = \varkappa(y), \tag{6}$$

где $\varkappa$ — один из показателей ориентированной вращаемости $\check{\theta}^\bullet, \hat{\theta}^\bullet, \check{\theta}^\circ, \hat{\theta}^\circ$.

$\lhd$ Пусть вектор-функции $x, y \in \mathscr{S}_*^n$ подобны. Тогда для некоторой невырожденной матрицы $C \in \mathscr{C}^n$ выполнено равенство $y = Cx$. Далее, для нижнего слабого показателя ориентированной вращаемости имеем

$$\check{\theta}^\circ(y) = \underline{\lim_{t \to +\infty}} \inf_{L \in \operatorname{End}_2 \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} |\Theta(Ly, t)| = \underline{\lim_{t \to +\infty}} \inf_{L \in \operatorname{End}_2 \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} |\Theta(LCx, t)| = \check{\theta}^\circ(x).$$

Для остальных показателей ориентированной вращаемости равенство (6) доказывается аналогично. $\rhd$

В тексте кандидатской диссертации Д. С. Бурлакова можно найти доказательства следующих трех лемм.

Лемма 3. *Пусть вектор-функция*

$$x(\tau) = \begin{pmatrix} g_1(\tau) \\ g_2(\tau) \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$$

удовлетворяет условиям $|x(t)| \neq 0$, $g_1(0) = 0$ *и все нули* g_1 *простые. Обозначим через* t_k *нули* g_1, *начиная с* $t_0 = 0$. *Тогда верно тождество*

$$|\Theta(x, t_k)| = \left| \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \left(\operatorname{sgn} g_2(t_i) - \operatorname{sgn} g_2(t_{i-1})\right) \right|, \quad k > 0.$$

Лемма 4. *В обозначениях предыдущей леммы для произвольного момента времени* $t \in \mathbb{R}_+$ *верно неравенство*

$$\left| |\Theta(x,t)| - \left| \pi \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \operatorname{sgn} g_2(t_i) \right| \right| \leqslant 2\pi,$$

где k *— максимальный индекс такой, что* $t_k \leqslant t$.

Лемма 5. *Для произвольной вектор-функции* $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n_*)$, *числа* $\alpha > 0$ *и функции* y, *заданной равенством* $y(t) = x(\alpha t)$, *верно*

$$\varkappa(y) = \alpha \varkappa(x),$$

где $\varkappa$ *— один из показателей ориентированной вращаемости* $\check{\theta}^\bullet$, $\hat{\theta}^\bullet$, $\check{\theta}^\circ$, $\hat{\theta}^\circ$.

Определение 7 [15]. Под *вещественным аналогом жордановой матрицы* будем понимать клеточно-диагональную матрицу с клетками вида

$$J_{\lambda,s} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^s,$$

$$J_{\alpha,\beta,p} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^p,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $s, j \in \mathbb{N}$, $p = 2j$; при этом клетки первого вида будем называть одиночными, а второго — парными.

Обозначим через $\mathscr{G}^2$ множество всех двумерных подпространств G пространства $\mathbb{R}^n$, наделенное конечной лебеговой мерой и стандартной топологией, а через P_G будем обозначать ортогональный проектор на подпространство $G \subset \mathbb{R}^n$.

Лемма 6 [11]**.** *Если в равенствах определения 2 вместо взятия точной нижней грани по* $L \in \operatorname{End}_2 \mathbb{R}^n$ *положить* $L = P_G$ *и брать точную нижнюю грань по всем* $G \in \mathscr{G}^2$, *то определяемые этими равенствами величины не изменятся.*

5. Доказательство основных результатов

$\triangleleft$ Доказательство теоремы 1. **1.** Как известно [15], матрица $A \in \mathscr{C}^n$ подобна некоторому вещественному аналогу жордановой матрицы, при переходе к которому каждое решение системы A заменяется подобной вектор-функцией, от чего значения рас-

сматриваемых показателей вращаемости не изменятся (лемма 2). Поэтому матрицу A изначально будем считать вещественным аналогом жордановой матрицы.

2. Упорядочим собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы A по нестрогому возрастанию модулей их мнимых частей и построим действительную фундаментальную систему решений

$$x^1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad x^n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} \tag{7}$$

системы $A \in \mathscr{C}^n$ по нескольким подсистемам, каждая из которых соответствует своей клетке матрицы A:

а) Каждой одиночной клетке $J_{\lambda_k,s}$ порядка s, отвечающей собственному значению $\lambda_k \in \mathbb{R}$, поставим в соответствие подсистему из s решений

$$x^k(t) = e^{\lambda_k t} h_k, \dots, x^{k+s-1}(t) = \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} e^{\lambda_k t} h_k + \dots + t e^{\lambda_k t} h_{k+s-2} + e^{\lambda_k t} h_{k+s-1},$$

где j-ая компонента каждого вектора h_j из этой подсистемы равна единице, а все остальные равны нулю.

б) Каждой парной клетке $J_{\alpha,\beta,p}$ порядка $p = 2s$, отвечающей собственному значению $\lambda_k = \alpha + i\beta$, соответствует подсистема решений $x^k, x^{k+1}, \dots, x^{k+2s-1}$

$$\begin{pmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{k-1k} \\ x_{kk} \\ x_{k+1k} \\ x_{k+2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{\alpha t} \cos \beta t \\ -e^{\alpha t} \sin \beta t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{1k+1} \\ \vdots \\ x_{k-1k+1} \\ x_{kk+1} \\ x_{k+1k+1} \\ x_{k+2k+1} \\ \vdots \\ x_{nk+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{\alpha t} \sin \beta t \\ e^{\alpha t} \cos \beta t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{1k+2} \\ \vdots \\ x_{kk+2} \\ x_{k+1k+2} \\ x_{k+2k+2} \\ x_{k+3k+2} \\ \vdots \\ x_{nk+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ t e^{\alpha t} \cos \beta t \\ -t e^{\alpha t} \sin \beta t \\ e^{\alpha t} \cos \beta t \\ -e^{\alpha t} \sin \beta t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{1k+3} \\ \vdots \\ x_{kk+3} \\ x_{k+1k+3} \\ x_{k+2k+3} \\ x_{k+3k+3} \\ \vdots \\ x_{nk+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ t e^{\alpha t} \sin \beta t \\ t e^{\alpha t} \cos \beta t \\ e^{\alpha t} \sin \beta t \\ e^{\alpha t} \cos \beta t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$\begin{pmatrix} x_{1k+2s-2} \\ \vdots \\ x_{kk+2s-2} \\ x_{k+1k+2s-2} \\ \vdots \\ x_{k+2s-4k+2s-2} \\ x_{k+2s-3k+2s-2} \\ x_{k+2s-2k+2s-2} \\ x_{k+2s-1k+2s-2} \\ \vdots \\ x_{nk+2s-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{\alpha t}\cos\beta t \\ -\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{\alpha t}\sin\beta t \\ \vdots \\ te^{\alpha t}\cos\beta t \\ -te^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t}\cos\beta t \\ -e^{\alpha t}\sin\beta t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{1k+2s-1} \\ \vdots \\ x_{kk+2s-1} \\ x_{k+1k+2s-1} \\ \vdots \\ x_{k+2s-4k+2s-1} \\ x_{k+2s-3k+2s-1} \\ x_{k+2s-2k+2s-1} \\ x_{k+2s-1k+2s-1} \\ \vdots \\ x_{nk+2s-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{\alpha t}\sin\beta t \\ \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{\alpha t}\cos\beta t \\ \vdots \\ te^{\alpha t}\sin\beta t \\ te^{\alpha t}\cos\beta t \\ e^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t}\cos\beta t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

в) Собрав решения всех таких подсистем, получим общую упорядоченную фундаментальную систему решений (7).

Следовательно, общее решение системы A принимает вид

$$x = c_1x^1(t) + c_2x^2(t) + \dots + c_nx^n(t), \tag{8}$$

где $c_1,\ c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные.

В работе [10] доказано, что

$$\check\theta^\circ(x^j) = \hat\theta^\circ(x^j) = \check\theta^\bullet(x^j) = \hat\theta^\bullet(x^j) = \lambda_j(A), \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{9}$$

Возьмем произвольное решение

$$x = c_qx^q(t) + c_{q+1}x^{q+1}(t) + \ldots + c_rx^r(t), \quad c_q \ne 0,\ 1 \leqslant q \leqslant r \leqslant n, \tag{10}$$

системы $A \in \mathscr{C}^n$.

3. Пусть $\lambda_q \in \mathbb{R}$. Тогда из работы [16] следует цепочка равенств

$$\hat\nu^*_\bullet(x) = \check\nu^*_\bullet(x) = \hat\nu^*_\circ(x) = \check\nu^*_\circ(x) = 0,$$

откуда на основании леммы 1 вытекает

$$\check\theta^\circ(x) = \hat\theta^\circ(x) = \check\theta^\bullet(x) = \hat\theta^\bullet(x) = 0. \tag{11}$$

4. Пусть $\beta \equiv \operatorname{Im}\lambda_q(A) = \dots = \operatorname{Im}\lambda_r(A) \ne 0$. Тогда вектор-функция Lx на основании леммы 6 имеет вид:

$$Lx = \begin{pmatrix} e^{\gamma_1 t}\sqrt{P_1^2(t) + P_2^2(t)}\sin(\beta t + \varphi(t)) \\ e^{\gamma_2 t}\sqrt{P_3^2(t) + P_4^2(t)}\cos(\beta t + \phi(t)) \end{pmatrix},$$

где $\varphi(t)$, $\phi(t)$ — вспомогательные аргументы при каждом $t \geqslant 0$, а $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$, $P_4(t)$ — многочлены степени не выше $n/2$. Откуда вытекает оценка

$$|\Theta(Lx, t) - \Theta(z, t)| \leqslant 2\pi, \quad t \geqslant 0,$$

где

$$z = \begin{pmatrix} \sin\beta t \\ \cos\beta t \end{pmatrix}.$$

Поэтому справедливы равенства

$$\check{\theta}^{\circ}(x)=\hat{\theta}^{\circ}(x)=\check{\theta}^{\bullet}(x)=\hat{\theta}^{\bullet}(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}|\Theta(z,t)|=\beta.$$

5. Пусть $\lambda_q\notin\mathbb{R}$ и среди мнимых частей $\operatorname{Im}\lambda_q(A),\ldots,\operatorname{Im}\lambda_r(A)$ собственных значений матрицы A, фигурирующих в решении (10), есть рационально несоизмеримая пара. Обозначим их β_1, β_2. Тогда найдется такое преобразование L_1, что вектор-функция L_1x будет иметь вид

$$L_1x=\begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t\\ e^{\alpha_2 t}\cos\beta_2 t\end{pmatrix}.$$

Для последовательности моментов $t_k=\frac{\pi k}{\beta_1}$ выполнено неравенство

$$|\Theta(L_1x,t)-\Theta(L_1x,t_k)|\leqslant\pi.$$

На основании леммы 4 будем иметь

$$\left||\Theta(L_1x,t)|-\left|\pi\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\operatorname{sgn}e^{\alpha_2 t_i}\cos\beta_2 t_i\right|\right| = \left||\Theta(L_1x,t)|-\left|\pi\sum_{i=1}^{k}\operatorname{sgn}\cos\left(\frac{\beta_2\pi i}{\beta_1}+\pi i\right)\right|\right|\leqslant 2\pi,$$

где k — максимальный индекс такой, что $t_k\leqslant t$. Из последних двух неравенств, переходя к пределу по t, получим цепочку равенств

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}|\Theta(L_1x,t)|=\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{1}{t_k}|\Theta(L_1x,t_k)|=\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\pi}{t_k}\left|\sum_{i=1}^{k}\operatorname{sgn}\cos\omega i\right|,\tag{12}$$

где $\omega=\pi\bigl(1+\frac{\beta_2}{\beta_1}\bigr)$.

Из того, что β_1 и β_2 рационально несоизмеримы, следует, что ω рационально несоизмеримо с π. Возьмем интегрируемую по Риману функцию $f(s)=\beta_1\operatorname{sgn}\cos s$ и отображение $T(\alpha)=\alpha+\omega\bmod 2\pi$, являющееся поворотом окружности на иррациональный угол. Из равенства

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}f(T^i0)=\frac{\beta_1}{k}\sum_{i=1}^{k}\operatorname{sgn}\cos\omega i=\frac{\pi}{t_k}\sum_{i=1}^{k}\operatorname{sgn}\cos\omega i,\quad k\geqslant 0,$$

на основании теоремы Вейля [17] к последовательности $f(T^k0)$, получим

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}f(T^i0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(s)\,ds=\frac{\beta_1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\cos s\,ds=0,$$

откуда вытекают требуемые соотношения

$$0\leqslant\hat{\theta}^{\bullet}(x)\leqslant\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}|\Theta(L_1x,t)|=\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\pi}{t_k}\left|\sum_{i=1}^{k}\operatorname{sgn}\cos\omega i\right|=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\left|\sum_{i=1}^{k}f(T^i0)\right|=0.$$

И в этом случае для рассматриваемого решения x имеем равенство (11).

6. Пусть $\lambda_q \notin \mathbb{R}$ и среди мнимых частей $\operatorname{Im}\lambda_q(A), \ldots, \operatorname{Im}\lambda_r(A)$ собственных значений матрицы A, фигурирующих в решении (10), есть пара β_3, β_4 такая, что $\frac{\beta_4}{\beta_3} = \frac{2p}{l}$, где $\frac{p}{l}$ — несократимая дробь, причем q — нечетное. Тогда найдется такой гомоморфизм L_2, что вектор-функция L_2x будет иметь вид

$$L_2x = \begin{pmatrix} e^{\alpha_3 t}\sin\beta_3 t \\ e^{\alpha_4 t}\cos\beta_4 t \end{pmatrix}.$$

Покажем, что и этот случай приводит к цепочке равенсвтв (11).

Заметим, что функции $\sin\beta_3 t$, $\cos\beta_4 t$ являются периодическими с периодом $T = \frac{2\pi l}{\beta_3} = \frac{4\pi p}{\beta_4}$. Возьмем последовательность моментов времени $t_k = \frac{\pi k}{\beta_3}$. Из леммы 3 вытекает равенство

$$|\Theta(L_2x, kT)| = \left|\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\frac{\beta_3 Tk}{\pi}}(-1)^i\Big(\operatorname{sgn}\left(e^{\alpha_4 t_i}\cos\beta_4 t_i\right) - \operatorname{sgn}\left(e^{\alpha_4 t_{i-1}}\cos\beta_4 t_{i-1}\right)\Big)\right|$$

$$= \left|\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\frac{\beta_3 Tk}{\pi}}(-1)^i\left(\operatorname{sgn}\cos\beta_4 t_i - \operatorname{sgn}\cos\beta_4 t_{i-1}\right)\right| = \left|\pi\sum_{i=1}^{2lk}(-1)^i \operatorname{sgn}\cos\beta_4 t_i\right|$$

$$= \left|\pi\sum_{i=1}^{2lk}\operatorname{sgn}\cos\left(\frac{2p\pi i}{l} + \pi i\right)\right| = \left|\pi\sum_{i=1}^{2lk}\operatorname{sgn}\cos\frac{2p+l}{l}\,\pi i\right|$$

$$= \left|\pi\sum_{i=1}^{lk}\operatorname{sgn}\cos\frac{2p+l}{l}\pi i + \pi\sum_{i=lk+1}^{2lk}\operatorname{sgn}\cos\frac{2p+l}{l}\,\pi i\right|$$

$$= \left|\pi\sum_{i=1}^{lk}\operatorname{sgn}\cos\frac{2p+l}{l}\,\pi i + \pi\sum_{i=1}^{lk}\operatorname{sgn}\cos\left(\frac{2p+l}{l}\,\pi i + (2p+l)\pi\right)\right|$$

$$= \left|\pi\sum_{i=1}^{lk}\operatorname{sgn}\cos\frac{2p+l}{l}\,\pi i - \pi\sum_{i=1}^{lk}\operatorname{sgn}\cos\frac{2p+l}{l}\,\pi i\right| = 0.$$

Откуда получаем требуемое неравенство

$$0 \leqslant \hat{\theta}^{\bullet}(x) \leqslant \overline{\lim_{k\to+\infty}}\,\frac{1}{kT}|\Theta(L_2x, kT)| = 0.$$

7. Пусть $\lambda_r \notin \mathbb{R}$ и среди модулей мнимых частей $\beta_q, \ldots, \beta_r$ собственных значений матрицы A, фигурирующих в решении (10), любая пара является рационально соизмеримой. Далее, выбираем наибольшее число α такое, что множество $\left\{\frac{\beta_q}{\alpha}, \ldots, \frac{\beta_r}{\alpha}\right\}$ состоит из нечетных натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен единице. Обозначим произвольные два числа из этого множества через ω_1 и ω_2. Из леммы 5 вытекает, что функция

$$y(t) = x\left(\frac{t}{\alpha}\right) = c_q x^q\left(\frac{t}{\alpha}\right) + c_{q+1}x^{q+1}\left(\frac{t}{\alpha}\right) + \ldots + c_r x^r\left(\frac{t}{\alpha}\right), \tag{13}$$

где $c_q \cdot c_r \neq 0$, $1 \leqslant q \leqslant r \leqslant n$, удовлетворяет равенствам

$$\varkappa(x) = \alpha\varkappa(y), \quad \varkappa \in \left\{\check{\theta}^{\circ}, \hat{\theta}^{\circ}, \check{\theta}^{\bullet}, \hat{\theta}^{\bullet}\right\}.$$

г) Выбираем такое линейное преобразование L_3, чтобы вектор-функция L_3y имела вид

$$L_3y = \begin{pmatrix} e^{\gamma_1 t}\sin\omega_1 t \\ e^{\gamma_2 t}\cos\omega_2 t \end{pmatrix}, \quad \omega_1 < \omega_2,$$

и докажем для последовательности $t_k = \frac{\pi k}{\omega_1}$ равенство $\Theta(L_3y, t_{\omega_1 k}) = \pi k$.

В самом деле, воспользовавшись леммой 3 и учитывая периодичность тригонометрических функций $\sin\omega_1 t$, $\cos\omega_2 t$, при любом натуральном k будем иметь

$$\begin{aligned}|\Theta(L_3y, t_{\omega_1 k})| &= \left|\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\omega_1 k}(-1)^i\left(\operatorname{sgn}\left(e^{\gamma_2 t_i}\cos\omega_2 t_i\right) - \operatorname{sgn}\left(e^{\gamma_2 t_{i-1}}\cos\omega_2 t_{i-1}\right)\right)\right| \\ &= \left|\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\omega_1 k}(-1)^i\left(\operatorname{sgn}\cos\left(\frac{\omega_2\pi i}{\omega_1}\right) - \operatorname{sgn}\cos\left(\frac{\omega_2\pi(i-1)}{\omega_1}\right)\right)\right| \\ &= \left|\pi\sum_{i=1}^{\omega_1 k}(-1)^i\operatorname{sgn}\cos\left(\frac{\omega_2\pi i}{\omega_1}\right)\right| = \left|\pi\sum_{i=1}^{\omega_1 k}(-1)^i\operatorname{sgn}\cos\left(\frac{(\omega_1+2q)\pi i}{\omega_1}\right)\right| \\ &= \left|\pi\sum_{i=1}^{\omega_1 k}(-1)^i\operatorname{sgn}\cos\left(\pi i + \frac{2q\pi i}{\omega_1}\right)\right| = \left|\pi\sum_{i=1}^{\omega_1 k}\operatorname{sgn}\cos\left(\frac{2q\pi i}{\omega_1}\right)\right| = \pi k.\end{aligned}$$

Справедливость последнего равенства следует из того, что значения $\frac{2q\pi i}{\omega_1}$ на единичной окружности с центром в начале координат при $i = 1, 2, \ldots, \omega_1$ лежат на вершинах правильного ω_1-угольника с фиксированной вершиной $(1, 0)$, а при $i = \omega_1 + 1, \ldots, 2\omega_1$ предыдущие значения $\frac{2q\pi i}{\omega_1}$ последовательно повторяются. Аналогично и с оставшимися значениями i. В результате количества вершин многоугольника, распределенных по разные стороны от оси oy, будут отличаться ровно на единицу.

д) При любых допустимых значениях L на основании леммы 6 вектор-функция Ly имеет вид

$$Ly = \begin{pmatrix} e^{\gamma_3 t}\sqrt{P_5^2(t) + P_6^2(t)}\sin(\omega_3 t + \psi_1(t)) \\ e^{\gamma_4 t}\sqrt{P_7^2(t) + P_8^2(t)}\cos(\omega_4 t + \psi_2(t)) \end{pmatrix},$$

где $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ — вспомогательные углы при каждом $t \geqslant 0$, а $P_5(t)$, $P_6(t)$, $P_7(t)$, $P_8(t)$ — многочлены степени не выше $n/2$. Следовательно, справедлива оценка

$$|\Theta(Ly, t) - \Theta(u, t)| \leqslant 2\pi, \quad t \geqslant 0,$$

где

$$u = \begin{pmatrix} \sin\omega_3 t \\ \cos\omega_4 t \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при некоторых L значения ω_3 и ω_4 могут совпадать. Тогда инфимум в определении слабых показателей ориентированной вращаемости не будет реализован.

е) Из последних двух подпунктов следует, что

$$\begin{aligned}\theta^\circ(y) &= \lim_{t\to+\infty}\inf_{L\in\operatorname{End}_2\mathbb{R}^n}\frac{1}{t}|\Theta(Ly, t)| = \lim_{k\to+\infty}\inf_{L\in\operatorname{End}_2\mathbb{R}^n}\frac{1}{t_{\omega_1 k}}|\Theta(Ly, t_{\omega_1 k})| \\ &= \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{t_{\omega_1 k}}|\Theta(L_3y, t_{\omega_1 k})| = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\pi k}|\Theta(L_3y, \pi k)| = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\pi k}\cdot\pi k = 1.\end{aligned}$$

Откуда, с учетом определений сильных показателей ориентированной вращаемости, получим

$$1=\theta^\circ(y)\leqslant\theta^\bullet(y)\leqslant\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{t_{\omega_1 k}}|\Theta(L_3y,t_{\omega_1 k})|=1.$$

Таким образом, для выбранного решения (10) установили справедливость равенств $\check{\theta}^\circ(x)=\hat{\theta}^\circ(x)=\check{\theta}^\bullet(x)=\hat{\theta}^\bullet(x)=\alpha$. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 2. Фиксируем матрицу $A\in\mathscr{C}^n$.

1. Последнее равенство в цепочке (5) автоматически следует из (4).

2. Пусть равны модули всех собственных значений матрицы A. Тогда из пунктов 3 и 4 доказательства теоремы 1 следует равенство всех главных значений показателей ориентированной вращаемости.

3. Если хотя бы одно из собственных значений матрицы A является действительным, то для любого $x\in\operatorname{span}\{x^1,x^2,\dots,x^{n-1}\}$ выполнены равенства (11), а с ними и $\omega_{\overline{n-1}}(A)=0$. Откуда на основании соотношений (2) и (3) следует

$$\omega_1(A)=\omega_{\underline{2}}(A)=\omega_{\overline{2}}(A)=\dots=\omega_{\underline{n-1}}(A)=\omega_{\overline{n-1}}(A)=0. \tag{14}$$

4. Условия пунктов 5 и 6 доказательства теоремы 1 для всех собственных значений матрицы A также приводят к равенству (14). Поскольку в каждом из этих случаев найдется $n-1$-мерное подпространство пространства $\mathscr{S}(A)$, все решения которого обладают свойством (11).

5. Пусть среди модулей всех мнимых частей $\beta_1,\dots,\beta_r$ (расположенных в порядке возрастания) собственных значений матрицы A любая пара является рационально соизмеримой и множество $\left\{\frac{\beta_1}{\alpha},\dots,\frac{\beta_r}{\alpha}\right\}$ состоит из нечетных натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен единице. При этом значение α — наибольшее. Тогда из определения функции $\gcd^*$ следуют соотношения

$$\gcd{}^*\{\beta_1,\dots,\beta_{k-1},\beta_k,\beta_{k+1},\dots,\beta_r\}=\alpha,$$
$$\beta_1\geqslant\alpha\leqslant\gcd{}^*\{\beta_1,\dots,\beta_{k-1},\beta_{k+1},\dots,\beta_r\}.$$

Откуда, с одной стороны, вытекает $\omega_1(A)=\alpha$, а с другой стороны — $\omega_{\overline{n-1}}(A)=\alpha$. Действительно, последнее равенство реализуется на подпространстве $V=\operatorname{span}\{x^1,x^2,\dots,x^{n-1}\}$, так как $x\in V$ выполнено $\check{\theta}^\circ(x)=\hat{\theta}^\circ(x)=\check{\theta}^\bullet(x)=\hat{\theta}^\bullet(x)=\alpha$. Таким образом, на основании соотношений (2) и (3) будем иметь

$$\alpha=\omega_1(A)=\omega_{\underline{2}}(A)=\omega_{\overline{2}}(A)=\dots=\omega_{\underline{n-1}}(A)=\omega_{\overline{n-1}}(A)<\omega_n(A)=\beta_r.\ \rhd$$

Благодарность. Автор выражает глубокую благодарность профессору И. Н. Сергееву за внимание, проявленное к работе.

Литература

1. *Сергеев И. Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. мат.—2012.—Т. 76, № 1.—С. 149–172. DOI: 10.4213/im5035.
2. *Сергеев И. Н.* Определение характеристических частот линейного уравнения // Диф. уравнения.—2004.—Т. 40, № 11.—С. 1573.
3. *Сергеев И. Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И. Г. Петровского.—М.: Изд-во Московского ун-та, 2006.—Вып. 25.—С. 249–294.
4. *Сергеев И. Н.* Свойства характеристических частот линейных уравнений произвольного порядка // Тр. сем. им. И. Г. Петровского.—М.: Изд-во Московского ун-та, 2013.—Вып. 29.—С. 414–442.
5. *Барабанов Е. А., Войделевич А. С.* К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I // Диф. уравнения.—2016.—Т. 52, № 10.—С. 1302–1320. DOI: 10.1134/S0374064116100034.

6. *Сергеев И. Н.* Определение полных частот решений линейного уравнения // Диф. уравнения.—2008.—Т. 44, № 11.—С. 1577.
7. *Сергеев И. Н.* Определение полных частот решений линейной системы // Диф. уравнения.—2009.—Т. 45, № 6.—С. 908.
8. *Сергеев И. Н.* Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. сб.—2013.—Т. 204, № 1.—С. 119–138. DOI: 10.4213/sm7928.
9. *Сергеев И. Н.* Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. заметки.—2016.—Т. 99, № 5.—С. 732–751. DOI: 10.4213/mzm10555.
10. *Сергеев И. Н.* Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И. Г. Петровского.—М.: Изд-во Московского ун-та, 2016.—Вып. 31.—С. 177–219.
11. *Сергеев И. Н.* Определение характеристик вращаемости решений дифференциальных систем и уравнений // Диф. уравнения.—2013.—Т. 49, № 11.—С. 1501–1503.
12. *Сергеев И. Н.* Вопросы о спектрах показателей вращаемости и блуждаемости автономных систем // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 6.—С. 844–845.
13. *Бурлаков Д. С.* Спектры показателей вращения и вращаемости автономных систем с простыми чисто мнимыми собственными числами // Диф. уравнения.—2013.—Т. 49, № 6.—С. 845.
14. *Бурлаков Д. С., Цой С. В.* Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Тр. сем. им. И. Г. Петровского.—М.: Изд-во Московского ун-та, 2014.—Вып. 30.— С. 75–93.
15. *Тыртышников Е. Е.* Матричный анализ и линейная алгебра: Учеб. пособие.—М.: Физматлит, 2007.—480 с.
16. *Сташ А. Х.* Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.—2019.—Т. 29, вып. 4.—С. 558–568. DOI: 10.20537/vm190407.
17. *Козлов В. В.* Весовые средние, строгая эргодичность и равномерное распределение // Мат. заметки.—2005.—Т. 78, № 3.—С. 358–367.

Статья поступила 16 августа 2021 г.

Сташ Айдамир Хазретович
Кавказский математический центр АГУ,
декан факультета математики и компьютерных наук
РОССИЯ, 385000, Майкоп, ул. Первомайская, 208
E-mail: aidamir.stash@gmail.com

Vladikavkaz Mathematical Journal
, Volume , Issue , P. 120–132

ORIENTED ROTATABILITY EXPONENTS OF SOLUTION OF AUTONOMOUS DIFFERENTIAL SYSTEMS

Stash, A. Kh.[1]

[1] Caucasus Mathematical Center, Adyghe State University,
208 Pervomayskaya St., Maikop 385000, Russia
E-mail: aidamir.stash@gmail.com

Abstract. In this paper, the exponents of oriented rotatability of solutions of linear homogeneous autonomous differential systems are fully studied. It is found that for any solution of an autonomous system of differential equations, its strong exponents of oriented rotatability coincide with weak ones. It is also shown that the spectrum of this exponent (i. e., the set of values on nonzero solutions) is naturally determined by the number-theoretic properties of the set of imaginary parts of the eigenvalues of the matrix of the system. This set can contain (unlike the oscillation and wandering exponents) values other than zero and from the imaginary parts of the eigenvalues of the system matrix, moreover, the power of this spectrum can be exponentially large in comparison with the dimension of the space. As a consequence, it is deduced that the spectra of all indicators of the oriented rotatability of autonomous systems with a symmetric matrix consist of a single zero value. In addition, on a set of autonomous systems, relationships were established between the main values of the studied exponents. The obtained results allow us to conclude that the exponents of oriented rotatability, despite its simple and natural definitions, is not an analogs of the Lyapunov exponent in the theory of oscillations.

Key words: differential equations, autonomous system, exponents of oriented rotatability, exponents of oscillation.

AMS Subject Classification: 34C10, 34D05, 34D08.

For citation: *Stash, A. Kh.* Oriented Rotatability Exponents of Solution of Autonomous Differential Systems, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 3, pp. 120–132 (in Russian). DOI: 10.46698/a8125-0078-5238-y.

References

1. *Sergeev, I. N.* Oscillation and Wandering Characteristics of Solutions of a Linear Differential Systems, *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 139–162. DOI: 10.1070/IM2012v076n01ABEH002578.
2. *Sergeev, I. N.* Definition of Characteristic Frequencies of a Linear Equation, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 2004, vol. 40, no. 11, pp. 1573 (in Russian).
3. *Sergeev, I. N.* Definition and Properties of Characteristic Frequencies of a Linear Equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 135, no. 1, pp. 2764–2793. DOI: 10.1007/s10958-006-0142-6.
4. *Sergeev, I. N.* Properties of Characteristic Frequencies of Linear Equations of Arbitrary Order, *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 197, no. 3, pp. 410–426. DOI: 10.1007/s10958-014-1723-4.
5. *Barabanov, E. A. and Voidelevich, A. S.* Remark on the Theory of Sergeev Frequencies of Zeros, Signs and Roots for Solution of Linear Differential Equation. I, *Differential Equation*, 2016, vol. 52, no. 1, pp. 1249–1267. DOI: 10.1134/S0012266116100013.
6. *Sergeev, I. N.* Definition of Full Frequencies of Solutions of the Linear Equation, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equation], 2008, vol. 44, no. 11, p. 1577 (in Russian).
7. *Sergeev, I. N.* Definition of Full Frequencies of Solutions of the Linear System, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equation], 2009, vol. 45, no. 6, p. 908. (in Russian)
8. *Sergeev, I. N.* The Remarkable Agreement Between the Oscillation and Wandering Characteristics of Solutions of Differential Systems, *Sbornik: Mathematics*, 2013, vol. 204, no. 1, pp. 114–132. DOI: 10.1070/SM2013v204n01ABEH004293.
9. *Sergeev, I. N.* Oscillation, Rotation, and Wandering Exponents of Solutions of Differential Systems, *Mathematical Notes*, 2016, vol. 99, no. 5, pp. 729–746. DOI: 10.1134/S0001434616050114.
10. *Sergeev, I. N.* Lyapunov Characteristics of Oscillation, Rotation, and Wandering of Solutions of Differential Systems, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 234, no. 4, pp. 497–522. DOI: 10.1007/s10958-018-4025-4.
11. *Sergeev, I. N.* Definition of Rotational Characteristic of Solutions of Differential Systems and Equation, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equation], 2013, vol. 49, no. 11, pp. 1501–1503 (in Russian).
12. *Sergeev, I. N.* Questions about the Spectra of Exponents of Rotatability and Wandering of Autonomous Systems, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equation], 2014, vol. 50, no. 6, pp. 844–845 (in Russian).
13. *Burlakov, D. S.* Spectra of Rotation and Rotatability Exponents of Autonomous Systems with Simple Purely Imaginary Eigenvalues, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equation], 2014, vol. 50, no. 6, p. 845 (in Russian).
14. *Burlakov, D. S. and Tsoii, S. V.* Coincidence of Complete and Vector Frequencies of Solutions of a Linear Autonomous System, *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 210, no. 2, pp. 155–167. DOI: 10.1007/s10958-015-2554-7.
15. *Tyrtyshnikov, E. E. Matrichnyi analiz i lineinaya algebra* [Matrix Analysis and Linear Algebra], Moscow, Fizmatlit, 2007, 480 p. (in Russian).
16. *Stash, A. Kh.* Properties of Exponents of Oscillation of Linear Autonomous Differential System Solutions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 558–568 (in Russian).
17. *Kozlov, V. V.* Weighted Means, Strict Ergodicity, and Uniform Distributions, *Mathematical Notes*, 2005, vol. 78, no. 3, pp. 329–337.

Received August 16, 2021

Aydamir Kh. Stash
Caucasus Mathematical Center, Adyghe State University,
208 Pervomayskaya St., Maikop 385000, Russia,
Dean of the Faculty of Mathematics and Computer Science
E-mail: `aidamir.stash@gmail.com`