

Спектр упругих пчелиных сот с закреплённой поверхностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2025-344 от 29.04.2025 в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН).

С. А. Назаров

Назаров Сергей Александрович (ORCID 0000-0002-8552-1264)
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН.
Набережная реки Фонтанки, Санкт-Петербург, 191011.

E-mail: srgnazarov108@gmail.com, serna108@mail.ru

Аннотация. В низкочастотном диапазоне спектра изотропного волновода в форме толстого слоя тонкостенных пчелиных сот с полностью закреплённой поверхностью обнаружено множество раскрытых широких лагун между узкими спектральными сегментами (соответственно зоны торможения и прохождения волн). Упругие волны концентрируются около и осциллируют вдоль рёбер сотовых ячеек. Результаты получены посредством построения асимптотики собственных пар модельной задачи на ячейке периодичности, зависящей от параметра Флоке. Основную роль играет явление пограничного слоя, описываемого решениями двух — плоской векторной и антиплоской скалярной — задач теории упругости в симметричной двумерной треноге, составленной из единичных полуполос. Решающее наблюдение: единственное собственное число из дискретного спектра скалярной задачи лежит строго ниже спектра векторной. Обоснование асимптотики проведено при помощи классической леммы о “почти собственных” числах и векторах, а также проверки сходимости атрибутов собственных вектор-функций.

Ключевые слова: гексагональная решётка, слой упругих пчелиных сот, задача Дирихле для пространственной системы Ламе, асимптотика собственных чисел, спектральные лагуны.

Sergei A. Nazarov.

The spectrum of an elastic honeycomb with a fixed surface.

Abstract. It is shown that in the low-frequency range of the spectrum of an isotropic waveguide of thick thin-walled honeycomb layer shape with fully fixed surface a plenty of gaps are opened between short spectral bands (respectively wave stopping and passing zones). Elastic waves concentrate near and oscillate along the honeycomb edges. The results are obtained by means of an asymptotic analysis of eigenpairs of the model problem in the periodicity cell dependent on the Floquet parameter. The main role is played by the boundary layer phenomenon described by solutions of two (plane vectorial and anti-plane scalar) problems in elasticity theory in a symmetric two-dimensional tripod composed from unit semi-strips. The decisive observation: the unique eigenvalue in the discrete spectrum of the scalar problem is situated below the spectrum of the vectorial problem. The justification of asymptotics is performed with the help of lemma about “almost eigenvalues and eigenvectors” and an assertion on convergence of attributes of vector eigenfunctions.

Key words: hexagonal lattice, a layer of elastic honeycomb, the Dirichlet problem for the spatial Lamé system, asymptotics of eigenvalues, spectral gaps.

1. Постановки задач. Пусть \boxtimes^0 — правильная гексагональная сетка (рис. 1, а) на плоскости $\mathbb{R}^2 \ni y = (y_1, y_2)$, т.е. бесконечный граф с единичными ребрами, встречающимися в вершинах под углом $2\pi/3$, а \boxtimes^h — $(h/2)$ -окрестность множества \boxtimes^0 , часто называемая “толстым” графом, и $h > 0$ — (безразмерный) малый параметр. Систему декартовых координат y зафиксируем так, чтобы ячейка периодичности \boxtimes^0 сетки располагалась в ромбе \diamond с вершинами $(\pm 3/2, 0)$, $(0, \pm\sqrt{3}/2)$ и состояла из двух симметричных “треног” Y_ℓ^0 и Y_\wp^0 (левая ℓ и правая \wp) с горизонтальными звеньями $I_{\ell 0}^0 = \{y : y_1 \in (-1/2, 0), y_2 = 0\}$ и $I_{\wp 0}^0 = \{y : y_1 \in (0, 1/2), y_2 = 0\}$. Остальные звенья $I_{\ell\pm}^0$ и $I_{\wp\pm}^0$ длиной $1/2$ наклонены под углом $\pm\pi/3$ к оси абсцисс y_1 , причём знак плюс отвечает тем из них, которые попали на верхнюю полуплоскость $\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$. Плоская ячейка периодичности $\boxtimes^h = \boxtimes^h \cap \diamond$ (рис. 1, б) толстого графа (утолщённой сетки) образована шестью прямоугольниками $\mathbb{I}_{\ell/\wp, \alpha}^h$, $\alpha = 0, \pm$, размером $h \times (1 - h\sqrt{3})/2$ и двумя треугольниками $\Delta_{\ell/\wp}^h$ с равными сторонами длиной h и с центрами в точках $\mathcal{O}_{\ell/\wp}^h$ (рис. 1, б). Введём ещё аппликату $z = x_3$ и пространственную декартову систему координат $x = (y, z) \in \mathbb{R}^3$, а также толстый (в вертикальном направлении) слой $\boxtimes_H^h = \boxtimes^h \times (0, H)$ гексагональной ячеистой структуры: у всех геометрических объектов верхний индекс h указывает малую (нулевую при $h = 0$) толщину стенок, а нижний H — их высоту (ср. рис. 1, б, и рис. 2, а).

Гармонические во времени с частотой ζ^h колебания изотропного и однородного (с постоянными Ламе $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$ и плотностью $\rho > 0$) упругого волновода \boxtimes_H^h , ячейка периодичности \boxtimes_H^h которого схематично изображена на рис. 2, а, описываются системой трёх уравнений в частных производных

$$L(\nabla_x)u^h(x) := -\mu\Delta_x u^h(x) - (\lambda + \mu)\nabla_x \nabla_x \cdot u^h(x) = \rho(\zeta^h)^2 u^h(x), \quad x \in \boxtimes_H^h. \quad (1)$$

Здесь $\nabla_x = \text{grad}$, $\nabla_x \cdot = \text{div}$, а $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ — оператор Лапласа. Кроме того, u^h — вектор смещений и $u_j^h = e_{(j)} \cdot u^h$ — его проекции на оси x_j с ортами $e_{(j)}$. Поверхность волновода считаем фиксированной — жёстко закреплённой, т.е. назначаем на ней условия Дирихле

$$u^h(x) = 0, \quad x \in \partial \boxtimes_H^h. \quad (2)$$

Как известно из теории Флоке–Блоха–Гельфанда (см. [1–5] и др.), спектр

$$\sigma^h = \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \Sigma^h(q), \quad (3)$$

задачи (1), (2) состоит из спектральных сегментов (зон прохождения волн)

$$\Sigma^h(q) = \{\Lambda_q^h(\theta) \mid \theta = (\theta_\ell, \theta_\wp) \in [0, 2\pi]^2\}, \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad (4)$$

между которыми могут располагаться раскрытые лакуны (зоны торможения волн). Сами сегменты (4) определяются по собственным числам

$$0 < \Lambda_1^h(\theta) \leq \Lambda_2^h(\theta) \leq \Lambda_3^h(\theta) \leq \dots \leq \Lambda_q^h(\theta) \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (5)$$

зависящей от параметра Флоке θ модельной задачи на ячейке периодичности

$$-\mu\Delta_x U^h(x; \theta) - (\lambda + \mu)\nabla_x \nabla_x \cdot U^h(x; \theta) = \Lambda^h(\theta)u^h(x; \theta), \quad x \in \boxtimes_H^h, \quad (6)$$

$$U^h(x; \theta) = 0, \quad x \in \partial \boxtimes_H^h \setminus \overline{\mathbb{I}_H^h}, \quad (7)$$

$$U^h(x; \theta)|_{\mathbb{I}_{H\ell/\wp}^{h+}} = e^{i\theta_{\ell/\wp}} U^h(x; \theta)|_{\mathbb{I}_{H\ell/\wp}^{h-}}, \quad \partial_n U^h(x; \theta)|_{\mathbb{I}_{H\ell/\wp}^{h+}} = -e^{i\theta_{\wp/\ell}} \partial_n U^h(x; \theta)|_{\mathbb{I}_{H\ell/\wp}^{h-}}. \quad (8)$$

Здесь \mathbb{I}_H^h — объединение прямоугольников $\mathbb{I}_{H\ell/\wp}^{h\pm} \subset \setminus \overline{\mathbb{I}_H^h}$ размером $h \times H$, попадающих на призматическую поверхность $\diamond \times (0, H)$ (тонированы на рис. 2, а) и называемых также торцами трёхмерной ячейки, а ∂_n — производная вдоль внешней нормали.

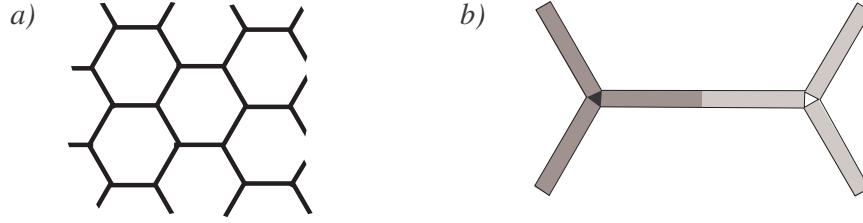


Рис. 1: Фрагмент плоской гексагональной сетки (а). Ячейка периодичности \boxtimes^h (b) утолщённой сетки \boxtimes^h : левая тренога Y_ℓ^h тонирована глубоко и её узел Δ_ℓ^h зачернён, но узел Δ_φ^h правой треноги Y_φ^h высветлен.

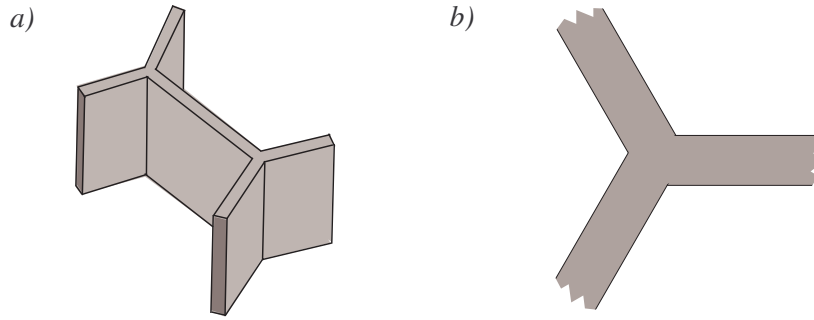


Рис. 2: Пространственная ячейка периодичности (а); прямоугольники, на которых ставятся условия квазипериодичности глубоко тонированы. Плоская бесконечная (левая) тренога (b).

Спектр (3) задачи (6)–(8) дискретный, а функции $[0, 2\pi]^2 \ni \theta \mapsto \Lambda_k^h(\theta)$ непрерывны и 2π -периодичны (см. любой из цитированных источников). Собственные вектор-функции $U_{(k)}^h(\cdot; \theta) \in H_{0,\theta}^1(\boxtimes_H^h)^3$ подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$(U_{(k)}^h(\cdot; \theta), U_{(j)}^h(\cdot; \theta))_{\boxtimes_H^h} = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Здесь $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера, $(\cdot, \cdot)_{\boxtimes_H^h}$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\boxtimes_H^h)$, $H_{0,\theta}^1(\boxtimes_H^h)^3$ — пространство Соболева вектор-функций, удовлетворяющих условию Дирихле (7) и первому условию квазипериодичности (8), а верхний индекс 3 указывает количество компонент вектор-функций, но он отсутствует в обозначениях скалярных произведений и норм.

Основная цель работы — построение и обоснование асимптотики собственных пар $\{\Lambda_k^h(\theta); U_{(k)}^h(\cdot; \theta)\}$ задачи (6)–(8) и, как следствие, выяснение лакунарного строения спектра (3) задачи (1), (2). Тело \boxtimes_H^h можно интерпретировать как восковое гнездо пчелиных сот, однако с некоторой натяжкой: условия Дирихле подразумевают, что пласт сот зажат между абсолютно жёсткими фланцами, а содержащейся в них мёд полностью затвердел. Распространение волн в сотовой вошине \boxtimes_H^h оказывается необычным, поскольку в главном они концентрируются около рёбер ячеек и являются продольными, т.е. колебания происходят в вертикальном направлении.

Публикации [6, 7] и другие, содержащие описание замечательных свойств графена, и особенно присуждение авторам Нобелевской премии привели к большому количеству физических и математических статей, в которых предлагались и изучались разнообразные модели этих незаурядных объектов. Упомянем лишь два исследования, имеющие прямое отношение к тематике

данной работы и выявляющих лакунарное строение спектров задач Неймана¹ [13] и Дирихле [14] для оператора Лапласа на тонких плоских гексагональных решётках.

Оставив в стороне физическую природу упругой структуры, подчеркнём, что проведенный далее анализ задачи теории упругости (1), (2) отличается от предшествующих разработок многими аспектами, так как рассматривается не скалярная и плоская, а векторная и пространственная задача. Проверенная далее локализация собственных вектор-функций модельной задачи (6)–(8) подсказывает, что в асимптотических формулах на первый план выходит явление пограничного слоя, который описывается при помощи решений двух, плоской и антиплоской — векторной и скалярной (см., например, [15]), задач в двумерной симметричной бесконечной “треноге” \mathbb{Y} (рис. 2, b), образованной тремя ($\alpha = 0, \pm$) полуполосами Π_α единичной толщины со средними линиями, исходящими из начала \mathcal{O} декартовой системы координат $\eta \in \mathbb{R}^2$ под углом $2\pi/3$ одна к другой, причём

$$\Pi_0 = \{\eta = (\eta_1, \eta_2) : \eta_1 > 0, |\eta_2| < 1/2\}. \quad (10)$$

Если дискретный спектр скалярной задачи полностью известен (см. публикацию [16]), то об изолированных собственных числах векторной задачи нет вообще никакой информации. На помощь приходит теорема 2, показывающая, что в низкочастотном диапазоне спектра (5) пограничный слой порождён именно собственной функцией антиплоской задачи.

Основной техникой приём — замена обычного функционала упругой энергии (см., например, [15]) квазиэнергией

$$E(U^h, U^h; \boxtimes_H^h) = \mu \|\nabla_x U^h; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 + (\lambda + \mu) \|\nabla_x \cdot U^h; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2. \quad (11)$$

Такая возможность появилась благодаря постановке условий Дирихле, а именно, умножив систему (6) скалярно на пробную вектор-функцию $\Psi^h(\cdot; \theta) \in H_{0,\theta}^1(\boxtimes_H^h)^3$ и проинтегрировав по частям при учёте условия (7) и первого условия (8) для Ψ^h , а также второго условия (8) для $U^h(\cdot; \theta)$ приходим к интегральному тождеству (см. [17–19] и др.)

$$E(U^h(\cdot; \theta), \Psi^h(\cdot; \theta); \boxtimes_H^h) = \Lambda^h(\theta) (U^h(\cdot; \theta), \Psi^h(\cdot; \theta))_{\boxtimes_H^h} \quad \forall \Psi^h \in H_{0,\theta}^1(\boxtimes_H^h)^3. \quad (12)$$

Билинейная форма $E(\Phi, \Psi; \boxtimes_H^h) = \frac{1}{4} (E(\Phi + \Psi, \Phi + \Psi; \boxtimes_H^h) + E(\Phi - \Psi, \Phi - \Psi; \boxtimes_H^h))$ положительно определённа, симметрична и замкнута в пространстве $H_{0,\theta}^1(\boxtimes_H^h)^3$, что и обеспечивает все упомянутые свойства спектра задачи (12) (или (6)–(8) в дифференциальной форме).

Кратко опишем строение статьи. В теореме 1 из разд. 2 доказана локализация собственных вектор-функций $U_{(k)}^h(\cdot; \theta)$ около рёбер $\Delta_{\ell/\varphi}^h \times (0, H)$ ячейки \boxtimes_H^h и экспоненциальное затухания при удалении от них. В разд. 3 приведена информация о спектрах двух, плоской (18) и антиплоской (19), задач теории упругости в бесконечной треноге \mathbb{Y} (центральный результат — теорема 2), а порождённая захваченной волной во второй, скалярной, задаче асимптотика собственных пар задачи (6)–(8) построена в разд. 4. В разд. 5 исследовано явление пространственного пограничного слоя. Найденные асимптотические конструкции обоснованы в разд. 6 и 7, а выводы о лакунарном строении спектра (3) приведены в разд. 8 (соответственно теоремы 5 и 6). Наконец, в разд. 9 перечислено несколько открытых вопросов.

2. Концентрация собственных функций около рёбер решётки. Введём непрерывную кусочно-гладкую экспоненциальную весовую функцию

$$\mathcal{R}_\beta^h(x) = e^{\beta r(y)/h} \text{ при } r(y) := \text{dist}(y, \Delta^h) \leq 1/4 \quad \text{и} \quad \mathcal{R}_\beta^h(x) = e^{\beta/4h} \text{ при } r(y) \geq 1/4, \quad (12)$$

где $\Delta^h = \Delta_\ell^h \cup \Delta_\varphi^h$ — объединение треугольных узлов плоской ячейки \boxtimes^h .

¹В этой работе применяется одномерная модель Полинга [8], но общие результаты (см. [9–12] и др.) устанавливают близость спектров задач на обычном и “толстом” графе.

Теорема 1. Пусть для некоторых $p \in \mathbb{N}$, $\theta \in [0, 2\pi]^2$ и $d > 0$ собственное число $\Lambda_p^h(\theta)$ подчинено соотношению

$$\Lambda_p^h(\theta) \leq h^{-2} \mu(\pi^2 - d). \quad (14)$$

Тогда найдутся такие не зависящие от θ и p положительные величины h_d , β_d и c_d , что при $h \in (0, h_d]$ нормированная в пространстве $L^2(\bowtie_H^h)^3$ собственная вектор-функция $U_{(p)}^h(\cdot; \theta)$ задачи (6)–(8), удовлетворяет весовой оценке

$$h^2 \|\mathcal{R}_{\beta_d}^h \nabla_x U_{(p)}^h(\cdot; \theta); L^2(\bowtie_H^h)\|^2 + \|\mathcal{R}_{\beta_d}^h U_{(p)}^h(\cdot; \theta); L^2(\bowtie_H^h)\|^2 \leq c_d. \quad (15)$$

Доказательство. Индексы d , p и по-возможности аргумент θ не пишем. Подставим в интегральное тождество (12) пробную вектор-функцию $\Psi^h = \mathcal{R}_\beta^h \Phi^h$, где $\Phi^h := \mathcal{R}_\beta^h U^h \in H_{0,\theta}^1(\bowtie_H^h)^3$, а первое условие квазипериодичности (8) сохранено потому, что вес (13) постоянен около прямоугольников $\mathbb{I}_{H\ell/\varphi}^{h\pm}$. Двукратное коммутирование градиент-оператора ∇_x и множителя $\mathcal{R}_\beta^h(y)$ превращает названное тождество в равенство

$$\begin{aligned} & \mu(\|\nabla_x \Phi^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 - (\Phi^h \mathcal{R}_{-\beta}^h \nabla_x \mathcal{R}_\beta^h, \nabla_x \Phi^h)_{\bowtie_H^h} + (\nabla_x \Phi^h, \Phi^h \mathcal{R}_{-\beta}^h \nabla_x \mathcal{R}_\beta^h)_{\bowtie_H^h} - \\ & - \|\Phi^h \mathcal{R}_{-\beta}^h \nabla_x \mathcal{R}_\beta^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2) + (\lambda + \mu)(\|\nabla_x \cdot \Phi^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 - (\mathcal{R}_{-\beta}^h \Phi^h \cdot \nabla_x \mathcal{R}_\beta^h, \nabla_x \cdot \Phi^h)_{\bowtie_H^h} + \\ & + (\nabla_x \cdot \Phi^h, \mathcal{R}_{-\beta}^h \Phi^h \cdot \nabla_x \mathcal{R}_\beta^h)_{\bowtie_H^h} - \|\mathcal{R}_{-\beta}^h \Phi^h \cdot \nabla_x \mathcal{R}_\beta^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2) = \Lambda^h \|\Phi^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2. \end{aligned} \quad (16)$$

После выделения вещественных частей все скалярные произведения в левой части взаимно уничтожаются и в результате остаются только квадраты норм.

Теперь заметим, что $\mathcal{R}_\beta^h = 1$, $\nabla_x \mathcal{R}_\beta^h = 0$ и $\Phi^h = U^h$ на треугольниках $\Delta_{\ell/\varphi}^h$ и

$$\mathcal{R}_{-\beta}^h(y) \left| \frac{\partial \mathcal{R}_\beta^h}{\partial y_j}(y) \right| \leq \frac{\beta}{h} \text{ при } y \in \bowtie^h \setminus \Delta^h, j = 1, 2. \quad (17)$$

Кроме того, одномерное неравенство Фридрихса на интервале $(-h/2, h/2)$, условие Дирихле (7) и геометрическое строение сечения ячейки обеспечивают оценку

$$\|\nabla_x \Phi^h; L^2(\bowtie_H^h \setminus \Delta_H^h)\|^2 \geq \pi^2 h^{-2} \|\Phi^h; L^2(\bowtie_H^h \setminus \Delta_H^h)\|^2.$$

При помощи перечисленных соотношений придаём равенству (16), из которого удалим ненужные слагаемые, следующий вид:

$$\begin{aligned} & \sigma \mu \|\nabla_x \Phi^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 \leq (\sigma - 1) \mu \|\nabla_x \Phi^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 + (\mu + 2(\lambda + \mu)) \|\Phi^h \mathcal{R}_{-\beta}^h \nabla_x \mathcal{R}_\beta^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 + \\ & + \Lambda^h \|\Phi^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 \leq h^{-2} (\pi^2 (\sigma - 1) \mu + \beta^2 (2\lambda + 3\mu) + h^2 \Lambda^h) \|\Phi^h; L^2(\bowtie_H^h \setminus \Delta_H^h)\|^2 + \Lambda^h \|\Phi^h; L^2(\Delta_H^h)\|^2. \end{aligned}$$

При учёте ограничения (14) зафиксируем величины $\sigma \in (0, 1)$ и $\beta > 0$ так, чтобы множитель при $\|\Phi^h; L^2(\bowtie_H^h \setminus \Delta_H^h)\|^2$ стал меньше $-h^{-2}d/2$ (знак минус). К тому же в силу нормировки (9) и равенства $\Phi^h = U^h$ на $\Delta_H^h := (\Delta_\ell^h \cup \Delta_\varphi^h) \times (0, H)$ последнее слагаемое не превосходит $\mu \pi^2 h^{-2}$. В итоге, сократив общий множитель μ , выводим, что

$$h^2 \sigma \|\nabla_x \Phi^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 + \frac{d}{2} \|\Phi^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 \leq \pi^2.$$

Оценка второй нормы из левой части (15) уже получена, а для оценки первой нужно ещё раз применить коммутирование и учесть формулу (17). Теорема доказана.

3. Задачи о двумерном пограничном слое. Растяжение продольных координат $y \mapsto \eta^\ell = h^{-1}(y - \mathcal{O}_\ell)$ и $y \mapsto \eta^\varphi = -h^{-1}(y - \mathcal{O}_\varphi)$ относительно центров треугольников Δ_ℓ^h и Δ_φ^h , но

сохранение масштаба для аппликаты z с последующим формальным переходом к $h = 0$ трансформирует область \bowtie_H^h в прямое произведение $\mathbb{Y} \times (0, H) \ni (\eta, z)$. Обратим внимание на знак минус в формуле для η^\wp (зеркальное отражение треноги \mathbb{Y}_\wp^0 , требующее также преобразование вектора смещений $u^h \mapsto (u_1^h, u_3^h, u_2^h)$), но далее индексы ℓ и \wp у координат η не пишем. Указанные действия расщепляют оператор Ламе $L(\nabla_\eta, 0)$ на блочно-диагональную матрицу с двумерным оператором Ламе $L'(\nabla_\eta) = -\mu\Delta_\eta - (\lambda + \mu)\nabla_\eta\nabla_\eta \cdot$ и оператором $-\mu\Delta_\eta$ на главной диагонали. В итоге возникают две задачи, а именно, плоская задача теории упругости

$$-\mu\Delta_\eta w'(\eta) - (\lambda + \mu)\nabla_\eta\nabla_\eta \cdot w'(\eta) = M'w'(\eta), \quad \eta \in \mathbb{Y}, \quad w'(\eta) = 0, \quad \eta \in \partial\mathbb{Y}, \quad (18)$$

для вектора продольных смещений $w' = (w_1, w_2)$ и антиплоская задача для депланации $w^\odot := w_3$ (символ \odot — обычное обозначение на плоскости для перпендикулярной ей оси аппликат)

$$-\mu\Delta_\eta w^\odot(\eta) = M^\odot w^\odot(\eta), \quad \eta \in \mathbb{Y}, \quad w^\odot(\eta) = 0, \quad \eta \in \partial\mathbb{Y}. \quad (19)$$

По этим задачам выстраиваются симметричные, положительно определённые, замкнутые соответственно в $H^1(\mathbb{Y})^2$ и $H^1(\mathbb{Y})$ квадратичные формы

$$E'(w', w'; \mathbb{Y}) = \mu(\nabla_\eta w', \nabla_\eta w')_{\mathbb{Y}} + (\lambda + \mu)(\nabla_\eta \cdot w', \nabla_\eta \cdot w')_{\mathbb{Y}} \quad \text{и} \quad \mu(\nabla_\eta w^\odot, \nabla_\eta w^\odot)_{\mathbb{Y}}, \quad (20)$$

а значит, согласно [20; гл. 10] и неограниченные самосопряжённые положительно определённые операторы A' и A^\odot в гильбертовых пространствах $L^2(\mathbb{Y})^2$ и $L^2(\mathbb{Y})$. Непрерывные спектры \wp'_c и \wp_c^\odot этих операторов совпадают и занимают луч $[M_\dagger, +\infty)$ с точкой отсечки $M_\dagger = \mu\pi^2$ (см., например, статью [21] по поводу плоской задачи, а для антиплоской результат очевиден).

В работе [16] доказано, что дискретный спектр \wp'_d оператора A^\odot состоит из единственного собственного числа $M_1^\odot \in (0, \mu\pi^2)$. Соответствующая собственная функция $w_1^\odot \in H_0^1(\mathbb{Y})$, положительная в области \mathbb{Y} и нормированная в $L^2(\mathbb{Y})$, обладает вращательной симметрией на угол $2\pi/3$ относительно начала координат \mathcal{O} и допускает в полуполосе (10) представление

$$w_1^\odot(\eta) = K_1^\odot e^{-\eta_1 \sqrt{\pi^2 - \mu^{-1} M_1^\odot}} \cos(\pi\eta_2) + O(e^{-|\eta| \sqrt{4\pi^2 - \mu^{-1} M_1^\odot}}) \quad \text{при} \quad \eta_1 \rightarrow +\infty. \quad (21)$$

В каждой из трёх ($\alpha = 0, \pm$) угловых точек раствором $4\pi/3$ на границе $\partial\mathbb{Y}$ (вершин \mathcal{O}^α узла Δ — равностороннего треугольника с единичной стороной) справедливо разложение

$$w_1^\odot(\eta) = C_1^\odot \rho_\alpha^{3/4} \sin\left(\frac{3\varphi_\alpha}{4}\right) + O(\rho_\alpha^{3/2}), \quad \rho \rightarrow +0, \quad (22)$$

где $(\rho_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times (0, 4\pi/3)$ — система полярных координат с центром в вершине \mathcal{O}^α . Коэффициенты K_1^\odot и C_1^\odot положительны, так как положительная функция w_1^\odot раскладывается в сходящиеся ряды Фурье на полуполосе и секторе, но среди членов рядов только отделённые в формулах (21) и (22) не меняют знак.

Автор не знает, пустым или нет является дискретный спектр \wp'_d оператора A' плоской задачи теории упругости (18). Следующее утверждение, компенсирующее недостаток информации, понадобится при построении асимптотики собственных пар задачи (6)–(8).

Теорема 2. *Полуинтервал $(0, M_1^\odot]$ свободен от дискретного спектра \wp'_d оператора A' .*

Доказательство. Допустим, что существует собственная пара $\{M'_1; w'_{(1)}\} \in (0, M_1^\odot) \times H_0^1(\mathbb{Y})^2$. В силу минимального принципа (см., например, [20; теорема 10.2.2]) первое (наименьшее) собственное число находится по формуле

$$M'_1 = \min_{\psi' \in H_0^1(\mathbb{Y}^2) \setminus \{0\}} \frac{E'(\psi', \psi'; \mathbb{Y})}{\|\psi'; L^2(\mathbb{Y})\|^2} = \frac{E'(w'_{(1)}, w'_{(1)}; \mathbb{Y})}{\|w'_{(1)}; L^2(\mathbb{Y})\|^2}. \quad (23)$$

Согласно левому определению (20) имеем

$$M'_1 \geq \min_{\psi' \in H_0^1(\mathbb{Y})^2 \setminus \{0\}} \frac{\mu \|\nabla_\eta \psi_1; L^2(\mathbb{Y})\|^2 + \mu \|\nabla_\eta \psi_2; L^2(\mathbb{Y})\|^2}{\|\psi_1; L^2(\mathbb{Y})\|^2 + \|\psi_2; L^2(\mathbb{Y})\|^2} = \mu \min_{\psi^\circ \in H_0^1(\mathbb{Y}) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla_\eta \psi^\circ; L^2(\mathbb{Y})\|^2}{\|\psi^\circ; L^2(\mathbb{Y})\|^2} = M_1^\circ. \quad (24)$$

Первое неравенство в цепочке (24) можно считать строгим, так как минимум в формуле (23) можно вычислять по конусу $\mathfrak{Y}_\delta := \{\psi' \in H_0^1(\mathbb{Y})^2 : \|\nabla_\eta \cdot \psi'; L^2(\mathbb{Y})\| \geq \delta \|\psi'; L^2(\mathbb{Y})\|\}$. Число $\delta > 0$ нужно выбрать так, чтобы в \mathfrak{Y}_δ попали и нормированный в $L^2(\mathbb{Y})^2$ вектор $w'_{(1)}$, на котором реализуется минимум (23), и вектор $2^{-1/2}(w_1^\circ, w_1^\circ)$ включающий дважды собственную функцию задачи (19). Это возможно потому, что $\|\nabla_\eta \cdot w'_{(1)}; L^2(\mathbb{Y})\| > 0$ и $\|\partial_{\eta_1} w_1^\circ + \partial_{\eta_2} w_1^\circ; L^2(\mathbb{Y})\| > 0$. В самом деле, если $\nabla_\eta \cdot w'_{(1)} = 0$, то каждая ($j = 1, 2$) из компонент $w'_{(1)j}$ удовлетворяет задаче

$$-\mu \Delta_\eta w'_{(1)j}(\eta) = M'_1 w'_{(1)j}(\eta), \quad \eta \in \mathbb{Y}, \quad w'_{(1)j}(\eta) = 0, \quad \eta \in \partial \mathbb{Y}.$$

При учёте соотношения (24) видим, что $M'_1 = M_1^\circ$ и в силу простоты собственного числа M_1° вектор-функция $w'_{(1)}(\eta)$ совпадает с $C w_1^\circ(\eta)$ при некотором столбце $C \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, а значит,

$$C_1 \frac{\partial w_1^\circ}{\partial \eta_1}(\eta) + C_2 \frac{\partial w_1^\circ}{\partial \eta_2}(\eta) = 0, \quad \eta \in \mathbb{Y}.$$

Последнее равенство невозможно, так как нетривиальное решение задачи (19), зависящее только от одной переменной $C_2 \eta_1 - C_1 \eta_2$, — нонсенс. Теорема доказана.

Сама собственная пара $\{M_1^\circ; w_1^\circ\}$ и её свойства будут использованы в разд. 4. Перечисленные факты означают, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \mu \|\nabla_\eta w_3; L^2(\mathbb{Y})\|^2 &\geq M_1^\circ \|w_3; L^2(\mathbb{Y})\|^2 \quad \forall w_3 \in H_0^1(\mathbb{Y}), \\ \mu \|\nabla_\eta w_3; L^2(\mathbb{Y})\|^2 &\geq \mu \pi^2 \|w_3; L^2(\mathbb{Y})\|^2 \quad \forall w_3 \in H_0^1(\mathbb{Y}) \text{ в случае } (w_3, w_1^\circ)_\mathbb{Y} = 0, \\ E'(w', w'; \mathbb{Y}) &\geq (M_1^\circ + d_\mathbb{Y}) \|w'; L^2(\mathbb{Y})\|^2 \quad \forall w' \in H_0^1(\mathbb{Y})^2 \text{ при некотором } d_\mathbb{Y} > 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Замечание 1. Если какая-либо часть поверхности упругого волновода свободна от внешних воздействий (условия Неймана в напряжениях) и вместо квазиэнергии приходится пользоваться истинной упругой энергией, то теорема 2 перестаёт быть верной. Контрпримером служат задачи теории упругости в полуполосе (10) с условиями Дирихле на боковых сторонах и Неймана на торце: дискретный спектр скалярной задачи пуст из-за возможности разделить переменные, но у векторной задачи собственное число на интервале $(0, M_1^\circ)$ есть (см. [21–23] и др.).

4. Формальная асимптотика. На плоской ячейке \bowtie^h введём гладкие срезающие функции $\chi_{\ell/\varphi}^h$, служащие для локализации асимптотических конструкций на левую Y_ℓ^h и правую Y_φ^h треноги,

$$\chi_{\ell/\varphi}(y) = 1 \text{ при } |y - \mathcal{O}_{\ell/\varphi}| \leq \gamma \text{ и } \chi_{\ell/\varphi}(y) = 0 \text{ при } |y - \mathcal{O}_{\ell/\varphi}| \geq (2\gamma + 1)/4. \quad (26)$$

Параметр $\gamma \in (0, 1/2)$ выбирается произвольно (см. разд. 9, 1°).

В соответствии с теоремой 1 о локализации собственных вектор-функций и теоремой 2 о пограничном слое примем следующие асимптотические анзацы для двух (ℓ и φ) собственных пар $\{\Lambda_{k_{\ell/\varphi}}^h(\theta); U_{(k_{\ell/\varphi})}^h(\cdot; \theta)\}$ задачи (6)–(8) при каком-нибудь параметре Флоке θ :

$$\Lambda^h = h^{-2} M_1^\circ + \kappa + \dots, \quad (27)$$

$$U^h(x) = \chi_{\ell/\varphi}(y) (e_{(3)} w_1^\circ(\eta^{\ell/\varphi}) v(z) + h W(\eta^{\ell/\varphi}) \partial_z v(z) + h^2 V(\eta^{\ell/\varphi}, z)) + \dots \quad (28)$$

Индекс $k_{\ell/\varphi}$ и аргумент θ для краткости не указываем, многоточие замещает младшие асимптотические члены, растянутые координаты $\eta^{\ell/\varphi} \in \mathbb{R}^2$ и спектральная пара $\{M_1^\circ; w_1^\circ\}$ задачи (19) введены в разд. 3, а вектор-функции W, V и число κ подлежат определению.

Подставим анзацы (27) и (28) в систему уравнений (6) и соберём множители при одинаковых степенях малого параметра. Учитывая расщепление оператора Ламе $L(\nabla_x)$, вызванное растяжением продольных координат y , но сохранением масштаба для z (см. начало разд. 3), получаем для вектора $W' = (W_1, W_2)$ и скаляра V_3 (остальные компоненты у W и V нулевые) задачи теории упругости, плоскую

$$L'(\nabla_\eta)W'(\eta) - M_1^\circ W'(\eta) = (\lambda + \mu)\nabla_\eta w_1^\circ(\eta), \quad \eta \in \mathbb{Y}, \quad W'(\eta) = 0, \quad \eta \in \partial\mathbb{Y}, \quad (29)$$

и антиплоскую

$$-\mu\Delta_\eta V_3(\eta; z) - M_1^\circ V_3(\eta; z) = F_3(\eta, z) := \kappa w_1^\circ(\eta) + (\lambda + 2\mu)w_1^\circ(\eta)\partial_z^2 v(z) + (\lambda + \mu)\nabla_\eta \cdot W'(\eta)\partial_z^2 v(z), \quad \eta \in \mathbb{Y}, \quad V_3(\eta; z) = 0, \quad \eta \in \partial\mathbb{Y}, \quad (30)$$

Условия Дирихле на границе треноги унаследованы от условий (7) на поверхности $\partial\mathbb{D}_H^h \setminus \mathbb{I}_H^h$.

В силу упомянутых и доказанных фактов из разд. 3 задача (29) с двумерным оператором Ламе $L'(\nabla_\eta)$ однозначно разрешима в классе Соболева $H_0^1(\mathbb{Y})^2$, а у задачи (30) есть одно условие разрешимости в классе экспоненциально затухающих функций — ортогональность правой части F_3 собственной функции w_1 . Оно принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения

$$-b\partial_z^2 v(z) = \kappa v(z), \quad z \in (0, H), \quad (31)$$

которую, отталкиваясь от условия Дирихле (7), снабдим краевыми условиями

$$v(0) = 0 \quad \text{и} \quad v_{Hk}(H) = 0. \quad (32)$$

Теорема 3. *Для коэффициента в уравнении (31) выполнено соотношение*

$$b = \int_{\mathbb{Y}} w_1^\circ(\eta) ((\lambda + 2\mu)w_1^\circ(\eta) + (\lambda + \mu)\nabla_\eta \cdot W'(\eta)) d\eta > \mu. \quad (33)$$

Доказательство. Интегрируя по частям, находим, что

$$\begin{aligned} b &= \lambda + 2\mu + 2(\lambda + \mu) \int_{\mathbb{Y}} w_1^\circ(\eta) \nabla_\eta \cdot W'(\eta) d\eta + (\lambda + \mu) \int_{\mathbb{Y}} \nabla_\eta w_1^\circ(\eta) \cdot W'(\eta) d\eta = \\ &= \mu + (\lambda + \mu) \|w_1^\circ + \nabla_\eta \cdot W'; L^2(\mathbb{Y})\|^2 + (\mu \|\nabla_\eta W'; L^2(\mathbb{Y})\|^2 - M_1 \|W'; L^2(\mathbb{Y})\|^2). \end{aligned} \quad (34)$$

Второе слагаемое в правой части неотрицательно, а последняя разность положительна благодаря первому неравенству (25) и невозможности формулы $W' = Cw_1^\circ$ со столбцом $C \in \mathbb{R}^2$. Теорема доказана.

Наконец, упомянем, что собственные пары задачи (31), (32) имеют вид

$$\kappa_m = \pi^2 H^{-2} m^2, \quad v_m(z) = (2H)^{-1/2} \sin(\pi m z / H), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (35)$$

5. Трёхмерный пограничный слой. В силу формул (35) второй член анзаца (28), принятого на начальном этапе асимптотического анализа, не удовлетворяет условиям Дирихле (7) на основаниях ячейки \mathbb{D}_H^h . Согласно общим принципам построения асимптотик (см., например, монографии [24, 25]) компенсация возникающих невязок производится при помощи

построения трёхмерных пограничных слоёв около треугольников $\Delta_{\ell/\wp}^h \times \{0\}$ и $\Delta_{\ell/\wp}^h \times \{H\}$ на основаниях ячейки. Вблизи одного из них, например, $\Delta_{\ell}^h \times \{0\}$ производим растяжение координат $x \mapsto \xi_{\ell}^0 = (h^{-1}(y - \mathcal{O}_{\ell}^h, h^{-1}z))$ и перейдём формально к $h = 0$. В результате получим следующую задачу Дирихле в неограниченной области $\Xi_+ = \mathbb{Y} \times \mathbb{R}_+$:

$$L(\nabla_{\xi})Z_{\ell}^0(\xi) - M_1^{\circ}Z_{\ell}^0(\xi) = 0, \quad \xi \in \Xi_+,$$

$$Z_{\ell}^0(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\mathbb{Y} \times \mathbb{R}_+, \quad Z_{\ell}^0(\eta, 0) = G(\eta, 0), \quad \eta \in \partial\mathbb{Y}. \quad (36)$$

Такие же задачи возникают около трёх других треугольников после подходящих поворотов систем координат. Ограничимся рассмотрением указанного треугольника, но не будем писать символы 0 и ℓ . В силу первого соотношения (25) и следствия одномерного неравенства Харди

$$\|(1 + \zeta)^{-1}\Psi; L^2(\xi)\|^2 \leq 4\|\nabla_{\xi}\Psi; L^2(\xi)\|^2 \quad \forall \Psi \in C_c^{\infty}(\Xi_+), \quad (37)$$

а также определения (11) выводим оценку первой нормы в правой части

$$(E(Z, Z; \Xi_+) - M_1^{\circ}\|Z; L^2(\Xi_+)\|^2)^{1/2} \geq c_{\Xi} \left(\left\| \frac{Z}{1 + \zeta}; L^2(\Xi_+) \right\|^2 + \left\| \frac{\nabla_{\xi}Z}{1 + \zeta}; L^2(\Xi_+) \right\|^2 \right)^{1/2} \quad (38)$$

с множителем $c_{\Xi} > 0$, не зависящим от $Z \in C_c^{\infty}(\Xi_+)$. Оценка второй нормы требует разбиения множества Ξ на ячейки v_n , $n \in \mathbb{N}$, двух типов: единичные кубы и призмы с основаниями Δ единичной высоты, на которых верны подлежащие суммированию соотношения

$$\mu \left\| \frac{\nabla_{\xi}Z}{1 + \zeta}; L^2(v_n) \right\|^2 \leq \frac{\max\{1 + \zeta \mid \xi \in v_n\}}{\min\{1 + \zeta \mid \xi \in v_n\}} \left(\frac{E(Z, Z; v_n) - M_1^{\circ}\|Z; L^2(v_n)\|^2}{\max\{1 + \zeta \mid \xi \in v_n\}} + C \left\| \frac{Z}{1 + \zeta}; L^2(v_n) \right\|^2 \right),$$

где общий множитель не превосходит двух, а максимум в знаменателе дроби больше единицы.

Через $\mathbf{H}_0^1(\Xi_+)^3$ обозначим пополнение линейного множества $C_c^{\infty}(\Xi_+)^3$ (бесконечно дифференциальные вектор-функции с компактными носителями) по норме $\|Z; \mathbf{H}_0^1(\Xi)\|$ из левой части неравенства (38), которое означает, что пространство состоит из вектор-функций $Z \in H_{0,loc}^1(\overline{\Xi_+})^3$, для которых конечна названная норма. Теорема Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве обеспечивает очередное утверждение.

Лемма 1. *При любом функционале $\mathbf{F} \in (\mathbf{H}_0^1(\Xi_+)^3)^*$ интегральное тождество*

$$E(Z^{\sharp}, \Psi; \Xi_+) - M_1^{\circ}(Z^{\sharp}, \Psi)_{\Xi_+} = \mathbf{F}(\Psi) \quad \forall \Psi \in \mathbf{H}_0^1(\Xi_+)^3 \quad (39)$$

имеет единственное решение $Z^{\sharp} \in \mathbf{H}_0^1(\Xi_+)^3$ и верна оценка $\|Z^{\sharp}; \mathbf{H}_0^1(\Xi_+)\| \leq C_{\Xi}\|\mathbf{F}; (\mathbf{H}_0^1(\Xi_+)^3)^*\|$.

Под обобщённым решением $Z \in \mathbf{H}_0^1(\Xi; \partial\mathbb{Y} \times \mathbb{R}_+)^3$ (норма сохранена, но нет обращения в нуль на основании полуцилиндра Ξ_+) задачи (36), в которой правая часть — след вектор-функции $G \in \mathbf{H}_0^1(\Xi; \partial\mathbb{Y} \times \mathbb{R}_+)^3$, понимаем сумму $Z = Z^{\sharp} + G$, где $Z^{\sharp} \in \mathbf{H}_0^1(\Xi_+)^3$ — решение задачи (39) при

$$\mathbf{F}(\Psi) = E(G, \Psi; \Xi_+) - M_1^{\circ}(G, \Psi)_{\Xi_+}. \quad (40)$$

Теперь применим теорию Кондратьева [26] (см. также [27; гл. 3, § 1], [28; § 3] и др.). Именно, рассмотрим интегральное тождество на бесконечном в обе стороны цилиндре $\Xi = \mathbb{Y} \times \mathbb{R}$

$$E(Z, \Psi; \Xi) - M_1^{\circ}(Z, \Psi)_{\Xi} = \mathbf{F}(\Psi) \quad \forall \Psi \in C_c^{\infty}(\Xi)^3 \quad (41)$$

с подходящим (см. ниже) функционалом \mathbf{F} в правой части. Применим преобразование Фурье $\mathcal{F}_{\zeta \rightarrow \mathfrak{z}}$ вдоль прямой $\{\mathfrak{z} \in \mathbb{C} : \text{Im } \mathfrak{z} = t\}$, $t \neq 0$ и придём к интегральному тождеству

$$\widehat{E}_{\mathfrak{z}}(\widehat{Z}, \widehat{\Psi}; \mathbb{Y}) - M_1^{\circ}(\widehat{Z}, \widehat{\Psi})_{\mathbb{Y}} = \widehat{\mathbf{F}}(\widehat{\Psi}) \quad \forall \widehat{\Psi} \in H_0^1(\mathbb{Y})^3, \quad (42)$$

где образы Фурье снабжены значком $\widehat{}$, а полуторалинейная форма имеет вид

$$\widehat{E}_3(\widehat{Z}, \widehat{\Psi}; \mathbb{Y}) = \mu(\nabla_\eta \widehat{Z}, \nabla_\eta \widehat{\Psi})_{\mathbb{Y}} + \mu \mathfrak{z}^2(\widehat{Z}, \widehat{\Psi})_{\mathbb{Y}} + (\lambda + \mu)(\nabla_\eta \widehat{Z}' + i\mathfrak{z}\widehat{Z}_3, \nabla_\eta \widehat{\Psi}' + i\mathfrak{z}\widehat{\Psi}_3)_{\mathbb{Y}}, \quad (43)$$

причём i — мнимая единица и черта указывает на комплексное сопряжение. Интегральное тождество (12) порождает полиномиальный пучок

$$\mathbb{C} \ni \mathfrak{z} \mapsto (\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) : H_0^1(\mathbb{Y})^3 \rightarrow (H_0^1(\mathbb{Y})^3)^*). \quad (44)$$

К сожалению по причине отсутствия компактности вложения $H^1(\mathbb{Y}) \subset L^2(\mathbb{Y})$ (область \mathbb{Y} неограниченна) невозможно применить привычную схему исследования эллиптических краевых задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность, использующую оценки [29] решений в соболевских нормах, зависящих от параметра, и аналитическую альтернативу Фредгольма [20; гл. 1, теорема 5.1]. Впрочем для конкретной задачи (42) без особого труда находим следующие их заменители.

1°. При $\mathfrak{z} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ обратим, так как форма (43) положительно определена.

2°. Существует такое $\mathfrak{k} > 0$, что при $\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + i\eta$ и $|\eta| < \mathfrak{k}|\mathfrak{x}|$ оператор $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ обратим, так как оказывается малым возмущением оператора $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$.

3°. В силу вычислений из разд. 4 (центральные моменты — теорема 3) у пучка (44) в точке $\mathfrak{z} = 0$ есть одна (непродолжимая) жорданова цепочка длиной два, состоящая из собственного $\mathbf{u}^0 = e_{(3)}w_1^\circ$ и присоединённого $\mathbf{u}^1 = -iW$ векторов. Кроме того, в силу абстрактных результатов [31] и [32; гл. 9] существует такой радиус $\mathfrak{r} > 0$, что проколота окрестность $\{\mathfrak{z} \in \mathbb{C} : 0 < |\mathfrak{z}| < \mathfrak{r}\}$ свободна от спектра пучка $\mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{A}(\mathfrak{z})$.

В итоге находим такую величину $\mathfrak{h} > 0$, что в полосе $\varpi(\mathfrak{h}) = \{\mathfrak{z} \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \mathfrak{z}| < \mathfrak{h}\}$ резольвента $\mathfrak{A}(\cdot)^{-1}$ — абстрактная голоморфная функция с единственным полюсом в точке $\mathfrak{z} = 0$ (второго порядка). Теперь повторим буквально все рассуждения теории Кондратьева. Именно, предположим, что правая часть \mathbf{F} интегрального тождества (41) — функционал на обоих пространствах $\mathfrak{W}_{0,\pm\mathfrak{h}}^1(\Xi)^3$, полученных пополнением линейала $C_c^\infty(\mathbb{Y} \times \mathbb{R})^3$ по экспоненциальным весовым соболевским нормам

$$\|\Psi; \mathfrak{W}_{0,\pm\mathfrak{h}}^1(\Xi)\| = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\pm 2\mathfrak{h}\zeta} (\|\Psi(\cdot, \zeta); H^1(\mathbb{Y})\|^2 + \|\partial_\zeta \Psi(\cdot, \zeta); L^2(\mathbb{Y})\|^2) d\zeta \right)^{1/2}.$$

Тогда преобразование Фурье задаёт аналитическую функцию $\widehat{\mathbf{F}}$ в полосе $\varpi(\mathfrak{h})$. Зафиксируем весовой показатель $\mathfrak{b} \in (0, \mathfrak{h})$. Обратные преобразования Фурье функции $\mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{A}(\mathfrak{x})^{-1}\widehat{\mathbf{F}}(\cdot; \mathfrak{z})$ вдоль прямых $\mathfrak{L}_{\pm\mathfrak{b}} = \{\mathfrak{z} \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \mathfrak{z} = \pm\mathfrak{b}\}$ предоставляет два решения $Z^\pm \in \mathfrak{W}_{0,\pm\mathfrak{h}}^1(\Xi)^3$ задачи (41), а теорема Коши о вычетах — их связь

$$Z^-(\xi) = C_0 e_{(3)}w_1^\circ(\eta) + C_1(\zeta e_{(3)}w_1^\circ(\eta) + W(\eta)) + Z^+(\xi). \quad (45)$$

Вернёмся к рассмотрению задачи (39) на полуцилиндре Ξ_+ с правой частью (40), порождённой вектор-функцией G , равной нулю при $\zeta > 1$ — это свойство достигается разрешённым умножением на срезку $\chi_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$, для которой $\chi_1(\zeta) = 1$ при $\zeta < 1/2$ и $\chi_1(\zeta) = 0$ при $\zeta > 1$. Теперь умножим само решение $Z^\sharp \in \mathbf{H}_0^1(\Xi)^3$ на $1 - \chi_1$ и придём к интегральному тождеству (41) с функционалом \mathbf{F} , имеющим носитель на множестве $\overline{\mathbb{Y}} \times [0, 1]$. Вектор-функция $Z^- = (1 - \chi_1)Z^\sharp$, продолженная нулём на $\Xi_- = \mathbb{Y} \times (-\infty, 0)$, принадлежит пространству $\mathfrak{W}_{0,-\mathfrak{b}}^1(\Xi)^3$ (заменили степенной вес $(1 + \zeta)^{-1}$ экспоненциальным $e^{-\mathfrak{b}\zeta}$) и допускает представление (45), которое сузим на полуцилиндр Ξ_+ . Слагаемое $C_0 e_{(3)}w_1^\circ$ попадает в пространство $\mathbf{H}_0^1(\Xi_+; \partial\mathbb{Y} \times \mathbb{R}_+)^3$, а слагаемое $C_1(\zeta e_{(3)}w_1^\circ + W)$ — только при $C_1 = 0$. Уточним полученный результат.

Теорема 4. Существует такой показатель $\beta > 0$, что в случае $e^{\beta(1+|\eta|^2)^{1/2}}G \in H_0^1(\mathbb{Y})^3$ решение $Z \in \mathbf{H}_0^1(\Xi_+; \partial\mathbb{Y} \times \mathbb{R}_+)^3$ задачи (36) допускает представление

$$Z(\xi) = C(G)e_{(3)}w_1^\odot(\eta) + \tilde{Z}(\xi),$$

причём модуль коэффициента $C(G) \in \mathbb{R}$ и норма $\|e^{\beta(1+|\xi|^2)^{1/2}}\tilde{Z}; H^1(\mathbb{Z}_+)\|$ остатка $\tilde{Z}(\xi)$, исчезающего на бесконечности с экспоненциальной скоростью, не превосходят $c\|e^{\beta(1+|\eta|^2)^{1/2}}G; H^1(\mathbb{Y})\|$.

Доказательство. Осталось убедиться в экспоненциальном затухании остатка $\tilde{Z}(\eta, \zeta)$ при $|\eta| \rightarrow +\infty$. Для этого достаточно заметить, что компоненты w_1^\odot и W_1, W_2 собственного и присоединённого векторов принадлежат пространству $\mathfrak{W}_{\vartheta,0}^1(\mathbb{Y})$ с весовой нормой $\|\Psi; \mathfrak{W}_{\vartheta,0}^1(\mathbb{Y})\| = \|e^{\vartheta(1+|\eta|^2)^{1/2}}\Psi; H^1(\mathbb{Y})\|$. Таким образом, в определении пучка (44) пространство Соболева $H_0^1(\mathbb{Y})$ можно заменить пространством Кондратьева $\mathfrak{W}_{\vartheta,0}^1(\mathbb{Y})$ при сохранении основных свойств пучка. При этом задачу следует интерпретировать как обыкновенное дифференциальное уравнение с операторными коэффициентами в банаховом или гильбертовом пространстве (см. [33–35] и др.). Теорема 4 доказана.

В разд. 6 будет использовано следствие теоремы 4: существует постоянная $C_W \in \mathbb{R}$, при которой решение $Z^W(\xi)$ задачи (36) с правой частью $G(\eta, 0) = W(\eta) - C_W e_{(3)}w_1^\odot(\eta)$ исчезает на бесконечности с экспоненциальной скоростью.

6. Обоснование асимптотики некоторых собственных чисел. В пространстве Соболева $\mathcal{H}^h(\theta) = H_{0,\theta}^1(\mathbb{X}_H^h)^3$ введём новое скалярное произведение

$$\langle U^h(\cdot; \theta), \Psi^h(\cdot; \theta) \rangle = E(U^h(\cdot; \theta), \Psi^h(\cdot; \theta); \mathbb{X}_H^h) \quad (46)$$

и определим положительно определённый, непрерывный и симметричный, а значит, самосопряжённый оператор $\mathcal{T}^h(\theta)$ при помощи тождества

$$\langle \mathcal{T}^h(\theta)U^h(\cdot; \theta), \Psi^h(\cdot; \theta) \rangle = (U^h(\cdot; \theta), \Psi^h(\cdot; \theta))_{\mathbb{X}_H^h} \quad \forall U^h(\cdot; \theta), \Psi^h(\cdot; \theta) \in \mathcal{H}^h(\theta). \quad (47)$$

Поскольку ячейка \mathbb{X}_H^h ограничена, этот оператор компактный, т.е. согласно общим результатам [20; теоремы 10.1.5 и 10.2.2] его существенный спектр состоит из единственной точки $\tau = 0$, а дискретный спектр образует монотонную положительную бесконечно малую последовательность (нормальных) собственных чисел, составленную при учёте их (конечных) кратностей,

$$\tau_1^h(\theta) \geq \tau_2^h(\theta) \geq \tau_3^h(\theta) \geq \dots \geq \tau_k^h(\theta) \geq \dots \rightarrow +0. \quad (48)$$

При этом вариационная задача (12) превращается в абстрактное уравнение $\mathcal{T}^h(\theta)\mathcal{U}^h(\theta) = \tau^h\mathcal{U}^h(\theta) \in \mathcal{H}^h(\theta)$ с новым спектральным параметром

$$\tau^h(\theta) = \Lambda^h(\theta)^{-1}. \quad (49)$$

Связь (49) переделывает последовательность (48) в последовательность (5).

Следующее утверждение известно как лемма о “почти собственных” числах и векторах (см. первоисточник [36]) и основано на спектральном разложении резольвенты оператора $\mathcal{T}^h(\theta)$ (см., например, монографию [20; гл. 6]).

Лемма 2. Зафиксируем какой-нибудь параметр Флоке $\theta \in [0, 2\pi]^2$. Пусть $\mathbf{U}^h(\theta) \in \mathcal{H}^h(\theta)$ и $\mathbf{t}^h(\theta) \in \mathbb{R}_+$ таковы, что

$$\|\mathbf{U}^h(\theta); \mathcal{H}^h(\theta)\| = 1, \quad \|\mathcal{T}^h(\theta)\mathbf{U}^h(\theta) - \mathbf{t}^h(\theta)\mathbf{U}^h(\theta); \mathcal{H}^h(\theta)\| =: \delta^h(\theta) \in (0, \mathbf{t}^h(\theta)). \quad (50)$$

Тогда есть собственное число $\tau_{\mathbf{n}^h(\theta)}^h$ оператора $\mathcal{T}^h(\theta)$, подчинённое оценке $|\tau_{\mathbf{n}^h(\theta)}^h - \mathbf{t}^h(\theta)| \leq \delta^h(\theta)$.

Более того, при любом $\delta_*^h(\theta) \in (\delta^h(\theta), \mathbf{t}^h(\theta))$ найдётся столбец коэффициентов $\mathbf{c}^h(\theta) = (\mathbf{c}_{\mathcal{N}^h(\theta)}^h, \dots, \mathbf{c}_{\mathcal{N}^h(\theta)+\mathcal{X}^h(\theta)-1}^h) \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}^h(\theta)}$, для которого

$$\left\| \mathbf{U}^h(\theta) - \sum_{j=\mathcal{N}^h(\theta)}^{\mathcal{N}^h(\theta)+\mathcal{X}^h(\theta)-1} \mathbf{c}_j^h(\theta) \mathcal{U}_j^h(\theta); \mathcal{H}^h(\theta) \right\| \leq 2 \frac{\delta^h(\theta)}{\delta_*^h(\theta)}, \quad \sum_{j=\mathcal{N}^h(\theta)}^{\mathcal{N}^h(\theta)+\mathcal{X}^h(\theta)-1} |\mathbf{c}_j^h(\theta)|^2 = 1. \quad (51)$$

Здесь $\tau_{\mathcal{N}^h(\theta)}^h, \dots, \tau_{\mathcal{N}^h(\theta)+\mathcal{X}^h(\theta)-1}^h$ — набор всех собственных чисел оператора $\mathcal{T}^h(\theta)$ из замкнутого сегмента $[\mathbf{t}^h(\theta) - \delta_*^h(\theta), \mathbf{t}^h(\theta) + \delta_*^h(\theta)]$, а соответствующие собственные векторы $\mathcal{U}_{\mathcal{N}^h(\theta)}^h(\theta), \dots, \mathcal{U}_{\mathcal{N}^h(\theta)+\mathcal{X}^h(\theta)-1}^h(\theta)$ удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки

$$\langle \mathcal{U}_j^h(\theta), \mathcal{U}_k^h(\theta) \rangle = \delta_{j,k}. \quad (52)$$

В согласии с асимптотическим анализом из разд. 4 соорудим по собственной паре (35) предельной задачи (31), (32) следующие “почти собственные” число и вектор оператора $\mathcal{T}^h(\theta)$:

$$\mathbf{t}_{n\ell/\wp}^h = h^2(M_1 + h^2\kappa_n)^{-1}, \quad (53)$$

$$\mathbf{U}_{n\ell/\wp}^h(x) = \|\mathbf{v}_{n\ell/\wp}^h; \mathcal{H}^h(\theta)\|^{-1} \mathbf{v}_{n\ell/\wp}^h(x). \quad (54)$$

Отметим, что каждому индексу $n \in \mathbb{N}$ отвечают два (ℓ и \wp) не зависящих от параметра Флоке экземпляра числа (53), а вектор-функции

$$\mathbf{v}_{n\ell/\wp}^h(x) = \chi_{\ell/\wp}^h(y) \left(e_{(3)} w_1(\eta^{\ell/\wp}) v_n(z) + hW(\eta^{\ell/\wp}) \partial_z v_n(z) + h^2 e_{(3)} V_3(\eta^{\ell/\wp}) v_n(z) + \right.$$

$$\left. + h(e_{(3)} w_1(\eta^{\ell/\wp}) \mathbf{v}_n(z) + hW(\eta^{\ell/\wp}) \partial_z \mathbf{v}_n(z) - \chi_H(z) \partial_z v_n(0) Z^W(\xi_{\ell/\wp}^0) - \chi_H(H-z) \partial_z v_n(H) Z^W(\xi_{\ell/\wp}^H) \right)$$

локализованы на треногах $\mathbf{Y}_{H\ell}^h$ и $\mathbf{Y}_{H\wp}^h$ благодаря определению срезов (26). Кроме того, $\{M_1; w_1\}$ — собственная пара задачи (19), вектор $W = (W', 0)$ включает решение задачи (29), а компонента $V_3(\eta^{\ell/\wp}) v_n(z)$ находится в результате решения задачи (30), из правой части которой при помощи уравнения (31) устранена вторая производная $\partial_z^2 v_n(z)$. Наконец, $\xi_{\ell/\wp}^{0/H}$ и Z^W — растянутые координаты и специальное решение задачи (36), введённые в начале и конце разд. 5, а \mathbf{v}_n — любая гладкая функция,

$$\mathbf{v}_n(z) = -\partial_z v_n(0) \text{ при } z \in (0, H/3) \text{ и } \mathbf{v}_n(z) = -\partial_z v_n(H) \text{ при } z \in (2H/3, H).$$

Согласно краевым условиям для Z^W и v_n , введению срезки $\chi_H \in C_c^\infty[0, H)$, для которой $\chi_H(z) = 1$ вблизи точки $z = 0$. а также равенствам $\partial_z \mathbf{v}_n(0) = \partial_z \mathbf{v}_n(H) = 0$ и конструкциям из разд. 4 вектор-функция $\mathbf{v}_{n\ell/\wp}^h$ удовлетворяет условию Дирихле (7), а значит, ввиду присутствия срезки $\chi_{\ell/\wp}^h$ выполнено включение $\mathbf{v}_{n\ell/\wp}^h \in \mathcal{H}^h(\theta)$ при любом $\theta \in [0, 2\pi]$.

Обработаем величину $\delta_{n\ell/\wp}^h(\theta)$ из формулы (50), найденную по паре (53), (54). Из определений (46) и (47) вытекает цепочка равенств

$$\begin{aligned} \delta_{n\ell/\wp}^h(\theta) &= \sup \left| \langle \mathcal{T}^h(\theta) \mathbf{U}_{n\ell/\wp}^h - \mathbf{t}_{n\ell/\wp}^h \mathbf{U}_{n\ell/\wp}^h, \psi^h(\cdot; \theta) \rangle \right| = \\ &= \|\mathbf{v}_{n\ell/\wp}^h; \mathcal{H}^h(\theta)\|^{-1} \mathbf{t}_{n\ell/\wp}^h \sup \left| E(\mathbf{v}_{n\ell/\wp}^h, \psi^h(\cdot; \theta); \boxtimes_H^h) - (h^{-2}M_1 + \kappa_n) (\mathbf{v}_{n\ell/\wp}^h, \psi^h(\cdot; \theta))_{\boxtimes_H^h} \right| = \\ &= \|\mathbf{v}_{n\ell/\wp}^h; \mathcal{H}^h(\theta)\|^{-1} \mathbf{t}_{n\ell/\wp}^h \sup \left| ((L(\nabla_x) - h^{-2}M_1 - \kappa_n) \mathbf{v}_{n\ell/\wp}^h, \psi^h(\cdot; \theta))_{\boxtimes_H^h} \right|. \end{aligned} \quad (55)$$

Супремум вычисляется по единичному шару в пространстве $\mathcal{H}^h(\theta)$, т.е. в силу неравенства Фридрихса на тонкостенной конструкции \boxtimes_H^h выполнено соотношение

$$1 \geq \|\psi^h(\cdot; \theta); \mathcal{H}^h(\theta)\|^2 \geq \mu \|\nabla_x \psi^h(\cdot; \theta); L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 \geq c_\infty \mu h^{-2} \|\psi^h(\cdot; \theta); L^2(\boxtimes_H^h)\|^2, \quad c_\infty > 0. \quad (56)$$

Для укорочения формул индексы n , ℓ/φ и аргумент θ не пишем. Имеем

$$\begin{aligned}
& (L(\nabla_x) - h^{-2}M_1 - \kappa)\mathbf{v}^h = [L(\nabla_x), \chi](e_{(3)}w_1v + hW\partial_zv + h^2e_{(3)}V_3v) - \\
& -h^{-2}\chi ve_{(3)}(\mu\Delta_\eta + M_1)w_1 + h^{-1}\chi\partial_zv((L'(\nabla_\eta) - M_1)W' - (\lambda + \mu)\nabla_\eta w_1, 0) + \\
& -h^0\chi e_{(3)}((\mu\Delta_\eta + M_1)V_3v + \kappa w_1v + (\lambda + 2\mu)w_1\partial_z^2v + (\lambda + \mu)\nabla_\eta \cdot W'\partial_z^2v) - \\
& -h^1\chi(\mu W'\partial_z^3v + \kappa W'\partial_zv + (\lambda + \mu)\nabla_\eta V_3\partial_zv, 0) - h^2\chi e_{(3)}((\lambda + 2\mu)V_3\partial_z^2v + \kappa V_3v) + \\
& + h(L(\nabla_x) - h^{-2}M_1 - \kappa)(e_{(3)}w_1\mathbf{v} + hW)\partial_z\mathbf{v} - \\
& -h \sum_{G=0,H} \partial_zv(G)(L(\nabla_x) - h^{-2}M_1 - \kappa)(\chi_H(\cdot^G)Z^W(\cdot^G)) =: \sum_{l=0}^8 I_l^h.
\end{aligned} \tag{57}$$

Напомним, что у векторных множителей при степенях параметра h с чётными показателями равна нулю третья компонента, а с нечётными показателями — первые две. Построения из разд. 4 показывают, что $I_2^h = I_3^h = I_4^h = 0$. Кроме того,

$$|(I_1^h, \psi^h)_{\boxtimes_H^h}| \leq c_1 h^{-q} e^{-\gamma\sqrt{\pi^2 - \mu^{-1}M_1}/h}.$$

Здесь учтено неравенство (56) для пробной функции ψ^h , экспоненциальное затухание функций w_1 , W_j и V_3 на бесконечности в треноге \mathbb{Y} , а также расположение носителей производных срезки (26). Аналогичные соображения обеспечивают при $p = 5, 6$ оценки

$$|(I_p^h, \psi^h)_{\boxtimes_H^h}| \leq c_p h \left(\int_{\boxtimes_H^h} \left\{ 1 + |\eta|^4 + \sum_{\alpha=0,\pm} \rho_\alpha^{2(\phi-1)} \right\} e^{-2\sqrt{\pi^2 - \mu^{-1}M_1}|\eta|} dx \right)^{1/2} \|\psi^h; L^2(\boxtimes_H^h)\| \leq C_p h^3.$$

Дополнительный весовой множитель, выделенный фигурными скобками, возник по причине искажения представлений (21) и (22) для функций W_1 , W_2 и V_3 на бесконечности, упомянутого в разд. 3 перед теоремой 2. Он, разумеется, не влияет на сходимость интеграла по ячейке \boxtimes_H^h , который приобретает порядок h^2 ввиду быстрого экспоненциального затухания подынтегрального выражения. Наконец, верны оценки

$$|(I_7^h, \psi^h)_{\boxtimes_H^h}| \leq c_p h^3 \quad \text{и} \quad |(I_8^h, \psi^h)_{\boxtimes_H^h}| \leq c_p h^{7/2}.$$

Первая выполнена согласно построениям из разд. 4, в силу которых после применения оператора $L(\nabla_x) - M_1^\circledast$ остаётся вектор-функция, зависящая полиномиально от h и гладко от z , а также исчезающая с экспоненциальной скоростью при $|\eta| \rightarrow +\infty$, а вторая — по причине экспоненциального затухания на бесконечности решения Z^W задачи (36) в трёхмерной области Ξ : коммутирование со срезкой χ_H даёт вклад $O(h e^{-\beta H/3h})$, а умножение на κ — вклад $O(hh^3/2h)$.

При учёте нормировок собственных функций w_1 и v_n выводим ещё и соотношение

$$\|\mathbf{v}^h; \mathcal{H}^h\|^2 = \|\nabla_\eta w_1; L^2(\mathbb{Y})\|^2 \|v_n; L^2(0, H)\|^2 + O(h) = M_1 + O(h).$$

Таким образом, $\|\mathbf{v}^h; \mathcal{H}^h\| \geq M_1^{1/2}/2$ при малом h . Вспомним порядок h^2 ещё одного сомножителя (53) в последнем выражении для величина (55). В итоге обнаруживаем, что эта величина удовлетворяет неравенству

$$\delta_{n\ell/\varphi}^h(\theta) \leq c_n h^5.$$

Теперь лемма 2 предоставляет собственные числа $\tau_{N_{n,\ell/\varphi}^h(\theta)}^h(\theta)$ оператора $\mathcal{T}^h(\theta)$ и $\Lambda_{N_{n,\ell/\varphi}^h(\theta)}^h(\theta) = \tau_{N_{n,\ell/\varphi}^h(\theta)}^h(\theta)^{-1}$ задачи (6)–(8), подчинённые неравенствам

$$|\tau_{N_{n,\ell/\varphi}^h(\theta)}^h(\theta) - \mathbf{t}_{n,\ell/\varphi}^h(\theta)| \leq c_n h^5 \Rightarrow |\Lambda_{N_{n,\ell/\varphi}^h(\theta)}^h(\theta) - h^{-2}M_1 - \kappa_n| \leq c_n h^3 (M_1 + h^2 \kappa_n) \Lambda_{N_{n,\ell/\varphi}^h(\theta)}^h(\theta). \tag{58}$$

Последняя оценка гарантирует, что $\frac{1}{2}\Lambda_{N_{n,\ell/\varphi}^h}^h(\theta) \leq h^{-2}M_1 + \kappa_n$ при $c_n h^3(M_1 + h^2\kappa_n) \leq \frac{1}{2}$. В результате превращаем неравенство (58) в такое:

$$|\Lambda_{N_{n,\ell/\varphi}^h}^h(\theta) - h^{-2}M_1 - \kappa_n| \leq 2c_n h(M_1 + h^2\kappa_n)^2. \quad (59)$$

Сформулируем финальное утверждение, доказательство которого будет закончено в очередном разделе.

Теорема 5. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ найдутся такие положительные величины h_k и C_k , что при $h \in (0, h_k]$ и любом $\theta \in [0, 2\pi]^2$ для членов $\Lambda_{2k-1}^h(\theta)$ и $\Lambda_{2k}^h(\theta)$ последовательности (5) собственных чисел задачи (6)–(8) выполнено неравенство*

$$|\Lambda_q^h(\theta) - h^{-2}M_1 - \kappa_k| \leq C_k h \quad \text{при } q = 2k - 1, 2k. \quad (60)$$

7. Утверждение о сходимости и доказательство теоремы 5. Сначала убедимся в том, что найдётся два (ℓ и φ) разных собственных числа, удовлетворяющих соотношению (59) — воспользуемся второй частью леммы 2. Введём какой-либо множитель $\varrho > 1$ в формулу

$$\delta_{*n\ell/\varphi}^h(\theta) = \varrho \delta_{n\ell/\varphi}^h(\theta). \quad (61)$$

Через $\mathbf{c}_{(n\ell/\varphi)}^h \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}_n^h(\theta)}$ и $\mathbf{S}_{n\ell/\varphi}^h \in \mathcal{H}^h(\theta)$ обозначим пары столбцов и линейных комбинаций собственных векторов оператора $\mathcal{T}^h(\theta)$, предоставленные формулой (51). Условия ортогональности и нормировки (52) показывают, что

$$\begin{aligned} |(\mathbf{c}_{(n\ell)}^h, \mathbf{c}_{(n\varphi)}^h)_{\mathbb{R}^{\mathcal{X}_n^h(\theta)}}| &= |\langle \mathbf{S}_{n\ell}^h, \mathbf{S}_{n\varphi}^h \rangle| \leq |\langle \mathbf{S}_{n\ell}^h - \mathbf{U}_{n\ell}^h, \mathbf{S}_{n\varphi}^h \rangle_\varepsilon| + \\ &+ |\langle \mathbf{U}_{n\ell}^h, \mathbf{S}_{n\varphi}^h - \mathbf{U}_{n\varphi}^h \rangle| + |\langle \mathbf{U}_{n\ell}^h, \mathbf{U}_{n\varphi}^h \rangle| \leq 2\rho^{-1} + 2\rho^{-1} + 0. \end{aligned}$$

Последний нуль возник потому, что носители вектор-функций $\mathbf{U}_{n\ell}^h$ и $\mathbf{U}_{n\varphi}^h$ не пересекаются (см. определение срезов (26)). При большом ϱ столбцы $\mathbf{c}_{(n\ell)}^h$ и $\mathbf{c}_{(n\varphi)}^h$ “почти ортогональны”, что возможно только в случае $\mathcal{X}_n^h(\theta) \geq 2$. Зафиксируем подходящий множитель ϱ в формуле (61).

Итак, оценка (59) с увеличенной в ϱ раз мажорантой (несущественное её изменение) выполнена по крайней мере для двух членов последовательности (5). Теперь проверим, что такой оценке удовлетворяют только собственные числа $\Lambda_{2n-1}^h(\theta)$ и $\Lambda_{2n}^h(\theta)$.

Заметим, что по доказанному к настоящему моменту верны неравенства

$$\Lambda_{2n-1}^h(\theta) \leq \Lambda_{2n}^h(\theta) \leq \max_{\ell, \varphi} \{\Lambda_{N_{n\ell/\varphi}^h}^h(\theta)\} \leq h^{-2}M_1 + \kappa_n + 2\varrho c_n h(M_1 + h^2\kappa_n)^2 \leq h^{-2}M_1 + C_n. \quad (62)$$

Таким образом, для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $\theta \in [0, 2\pi]^2$ найдётся положительная бесконечно малая последовательность $\{h_m^{(n)}(\theta)\}_{m \in \mathbb{N}}$, вдоль которой имеют место сходимости (индекс n и аргумент θ по обычаю не пишем)

$$\Lambda_q^h - h^{-2}M_1 \rightarrow \widehat{\kappa}_q \quad \text{при } h \rightarrow +0, \quad \text{где } q = 2n - 1, 2n. \quad (63)$$

Определим следующие функции переменной $z \in (0, H)$ и вектор-функции переменных $(\eta^{\ell/\varphi}, z) \in \mathbb{Y} \times (0, H)$:

$$W_{q3}^{h\ell/\varphi}(z; \theta) = h \int_{\mathbb{Y}} w_1(\eta) \chi_{\ell/\varphi}(y) U_{(q)3}^h(y^{\ell/\varphi} \pm h\eta^{\ell/\varphi}, z) d\eta^{\ell/\varphi}, \quad (64)$$

$$W_{(q)\perp}^{h\ell/\varphi}(\eta^{\ell/\varphi}, z; \theta) = h \chi_{\ell/\varphi}(y) U_{(q)}^h(y^{\ell/\varphi} \pm h\eta^{\ell/\varphi}, z; \theta) - e_{(3)} w_1(\eta^{\ell/\varphi}) W_{q3}^{h\ell/\varphi}(z; \theta). \quad (65)$$

Здесь $\chi_{\ell/\wp}$ — срезки (26), $U_{(q)}^h$ — нормированная в пространстве $L^2(\boxtimes^h \times (0, H))^3$ собственная вектор-функция задачи (6)–(8), а знаки плюс и минус отвечают индексам ℓ и \wp соответственно. Далее аргумент θ не пишем. Понятно, что выполнены краевые условия

$$W_{q3}^{h\ell/\wp}(0) = W_{q3}^{h\ell/\wp}(H) = 0. \quad (66)$$

Благодаря весовой оценке (15) и ограничению (26) несложные преобразования, порождающие экспоненциально малые погрешности, превращают интегральное тождество (12), в котором фигурируют пара $\{\Lambda_q^h; U_{(q)}^h\}$ и пробная вектор-функция $\Psi^h = \chi_{\ell/\wp}^2 U_{(q)}^h$, в соотношение

$$\begin{aligned} \mu \|\partial_z(\chi_{\ell/\wp} U_{(q)}^h); L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 &\leq \Lambda_q^h \|\chi_{\ell/\wp} U_{(q)}^h; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 - \mu \|\nabla_y(\chi_{\ell/\wp} U_{(q)}^h); L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 + c_q e^{-\beta_q/h} \leq (67) \\ &\leq (\Lambda_q^h - M_1 h^{-2}) \|\chi_{\ell/\wp} U_{(q)}^h; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 + c_q e^{-\beta_q/h} \leq C_q \|U_{(q)}^h; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 + c_q e^{-\beta_q/h} \leq \mathbf{C}_q. \end{aligned}$$

Величины $c_q e^{-\beta_q/h}$ учитывают невязки, возникающие вследствие коммутирования градиент-оператора ∇_x со срезками $\chi_{\ell/\wp}$, неотрицательное слагаемое $(\lambda + \mu) \|\nabla_y \cdot (\chi_{\ell/\wp} U_{(q)}^h); L^2(\boxtimes_H^h)\|^2$ из квазиэнергии (11) отброшено за ненадобностью, а в конце цепочки использовано первое неравенство в списке (25).

Вектор-функция (65) при всех $z \in (0, H)$ удовлетворяет условию ортогональности

$$(W_{(q)\perp 3}^{h\ell/\wp}, w_1)_{\mathbb{Y}} = 0, \quad (68)$$

а значит, из второго и третьего неравенств (25) вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_0^H \|\nabla_\eta W_{(q)\perp 3}^{h\ell/\wp}(\cdot; z); L^2(\mathbb{Y})\|^2 dz &\geq \pi^2 \int_0^H \|\nabla_\eta W_{(q)\perp 3}^{h\ell/\wp}(\cdot; z); L^2(\mathbb{Y})\|^2 dz, \\ \int_0^H (\mu \|\nabla_\eta W_{(q)\perp}^{h\ell/\wp'}(\cdot; z); L^2(\mathbb{Y})\|^2 + (\lambda + \mu) \|\nabla_\eta \cdot W_{(q)\perp}^{h\ell/\wp'}(\cdot; z); L^2(\mathbb{Y})\|^2) dz &\geq (69) \\ &\geq (M_1 + d_{\mathbb{Y}}) \int_0^H \|W_{(q)\perp}^{h\ell/\wp'}(\cdot; z); L^2(\mathbb{Y})\|^2 dz. \end{aligned}$$

Напомним, что $d_{\mathbb{Y}} > 0$. По той же причине (68) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\boxtimes_H^h} |\chi_{\ell/\wp}(y) U_{(q)}^h(x)|^2 dx &= h^2 \int_0^H \int_{\mathbb{Y}} |\chi_{\ell/\wp}(y) U_{(q)}^h(x)|^2 d\eta dz = \\ &= \int_0^H |W_{q3}^{h\ell/\wp}(z)|^2 dz + \int_0^H \|W_{(q)\perp}^{h\ell/\wp}(\cdot; z); L^2(\mathbb{Y})\|^2 dz, \\ \mu h^2 \int_0^H \int_{\mathbb{Y}} |\chi_{\ell/\wp}(y) \partial_z U_{(q)}^h(x)|^2 d\eta dz &= \mu \int_0^H |\partial_z W_{q3}^{h\ell/\wp}(z)|^2 dz + \mu \int_0^H \|\partial_z W_{(q)\perp}^{h\ell/\wp}(\cdot; z); L^2(\mathbb{Y})\|^2 dz, \quad (70) \\ \mu h^2 \int_0^H \int_{\mathbb{Y}} |\nabla_y(\chi_{\ell/\wp}(y) U_{(q)3}^h(x))|^2 d\eta dz &= \mu \int_{\mathbb{Y}} |\nabla_\eta w_1(\eta)|^2 d\eta \int_0^H |W_{q3}^{h\ell/\wp}(z)|^2 dz + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\mu \int_0^H \int_{\mathbb{Y}} |\nabla_\eta W_{(q)\perp 3}^{h\ell/\varphi}(\eta, z)|^2 d\eta dz + 2\mu \int_0^H \int_{\mathbb{Y}} W_{q3}^{h\ell/\varphi}(z) \nabla_\eta w_1(\eta) \cdot \nabla_\eta W_{(q)\perp 3}^{h\ell/\varphi}(\eta, z) d\eta dz = \\
& = M_1 \|W_{q3}^{h\ell/\varphi}; L^2(0, H)\|^2 + \|\nabla_\eta W_{(q)\perp 3}^{h\ell/\varphi}; L^2(\mathbb{Y} \times (0, H))\|^2.
\end{aligned}$$

Последний интеграл обратили в нуль при помощи интегрирования по частям, формулы $-\Delta_\eta w_1 = M_1 w_1$ и условия ортогональности (68).

Из неравенств (70), (67) и соотношений (9), (66) вытекает, что вдоль разреженной последовательности $\{h_m^{(n)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ (сохраняем то же обозначение, что и в (63)) имеет место сходимость

$$W_{q3}^{h\ell/\varphi} \rightarrow \widehat{v}_q^{\ell/\varphi} \text{ слабо в } H_0^1(0, H) \text{ и сильно в } L^2(0, H). \quad (71)$$

С целью проверить предельный переход для вектор-функции (65)

$$W_{(q)\perp}^{h\ell/\varphi} \rightarrow 0 \text{ сильно в } L^2(\mathbb{Y} \times (0, H))^3, \quad (72)$$

придадим уже использованному в формуле (67) интегральному тождеству такой вид:

$$\begin{aligned}
& \mu \|\nabla_y (\chi_{\ell/\varphi} U_{(q)}^{h'}); L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 + (\lambda + \mu) \|\nabla_y \cdot (\chi_{\ell/\varphi} U_{(q)}^{h'}) + \chi_{\ell/\varphi} \partial_z U_{(q)3}^h; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 - \\
& - \Lambda_q^h \|\chi_{\ell/\varphi} U_{(q)}^{h'}; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 + \mu \|\nabla_y (\chi_{\ell/\varphi} U_{(q)3}^h); L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 - \Lambda_q^h \|\chi_{\ell/\varphi} U_{(q)3}^h; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 \leq \\
& \leq -\mu \|\chi_{\ell/\varphi} \partial_z U_{(q)}^h; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 + c_q e^{-\beta_q/h} \leq c_q.
\end{aligned}$$

В силу простого алгебраического соотношения $(a+b)^2 \geq (1-\varepsilon)a^2 - (\varepsilon^{-1}-1)b^2$ с произвольным $\varepsilon > 0$, неравенств (69) и первой формулы (70) выводим, что левая часть превосходит величину

$$\begin{aligned}
& 0 \geq \mu \|\nabla_y (\chi_{\ell/\varphi} U_{(q)}^{h'}); L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 + (1-\varepsilon)(\lambda + \mu) \|\nabla_y \cdot (\chi_{\ell/\varphi} U_{(q)}^{h'}) + \chi_{\ell/\varphi} \partial_z U_{(q)3}^h; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 - \\
& - \Lambda_q^h \|\chi_{\ell/\varphi} U_{(q)}^{h'}; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 - (\varepsilon^{-1}-1)(\lambda + \mu) \|\chi_{\ell/\varphi} \partial_z U_{(q)3}^h; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 + \\
& + (M_1 h^{-2} - \Lambda_q^h) \|W_{(q)3}^{h\ell/\varphi}; L^2(0, H)\|^2 + (\mu \pi^2 h^{-2} - \Lambda_q^h) \|W_{(q)\perp 3}^{h\ell/\varphi}; L^2(\mathbb{Y} \times (0, H))\|^2 \geq \\
& \geq \frac{1-\varepsilon}{h^2} \int_0^H E'(W_{(q)\perp}^{h\ell/\varphi'}(\cdot, z), W_{(q)\perp}^{h\ell/\varphi'}(\cdot, z); \mathbb{Y}) dz - \Lambda_q^h \int_0^H \|W_{(q)\perp}^{h\ell/\varphi'}(\cdot, z); L^2(\mathbb{Y})\|^2 dz - \\
& - C_q \|W_{(q)3}^{h\ell/\varphi}; L^2(0, H)\|^2 + \left(\frac{\mu \pi^2 - M_1}{h^2} - C_q \right) \|W_{(q)\perp 3}^{h\ell/\varphi}; L^2(\mathbb{Y} \times (0, H))\|^2 - \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) (\lambda + \mu) \mathbf{C}_q \geq \\
& \geq \frac{1}{h^2} \int_0^H \left(\{ (M_1 + d_{\mathbb{Y}})(1-\varepsilon) - h^2 \Lambda_q^h \} \|W_{(q)\perp}^{h\ell/\varphi'}(\cdot, z); L^2(\mathbb{Y})\|^2 + \right. \\
& \left. + \{ \mu \pi^2 - M_1 - C_q h^2 \} \|W_{(q)\perp 3}^{h\ell/\varphi'}(\cdot, z); L^2(\mathbb{Y})\|^2 \right) dz - C_q - (\varepsilon^{-1}-1)(\lambda + \mu) \mathbf{C}_q.
\end{aligned}$$

В силу ограничения (62) число $\varepsilon > 0$ можно выбрать так, чтобы первый коэффициент, выделенный фигурными скобками, стал больше $c_{\mathbb{Y}} > 0$ при $h \in (0, h_{\mathbb{Y}}]$ и некотором $h_{\mathbb{Y}} > 0$. Второй такой коэффициент положителен, поскольку $M_1 < \mu \pi^2$ (см. разд. 3). Следовательно, выполнено неравенство $\|W_{(q)\perp}^{h\ell/\varphi}; L^2(\mathbb{Y} \times (0, H))\|^2 \leq c'_q h^2$, влекущее за собой сходимость (72), причём предельный переход (71) и условие нормировки (9) собственной вектор-функции $U_{(q)}^h$ показывают, что

$$\|\widehat{v}_q^{\ell/\varphi}; L^2(0, H)\|^2 = 1. \quad (73)$$

Теперь возьмём какую-либо функцию $\varphi \in C_c^\infty(0, H)$ и в интегральное тождество (12) для пары $\{\Lambda_q^h; U_{(q)}^h\}$ подставим имитирующую асимптотический анзац (28) пробную вектор-функцию

$$\Psi^h(x) = h\chi_{\ell/\varphi}(y)(e_{(3)}w_1(\eta^{\ell/\varphi})\varphi(z) + hW(\eta^{\ell/\varphi})\partial_z\varphi(z) + h^2V(\eta^{\ell/\varphi}, z)),$$

В отличие от разд. 4 компонента V_3 последнего члена находится из задачи

$$-\mu\Delta_\eta V_3(\eta; z) - M_1V_3(\eta; z) = (\lambda + \mu)\nabla_\eta \cdot W'(\eta)\partial_z^2\varphi(z) + w_1(\eta)(\lambda + 2\mu - b)\partial_z^2\varphi(z), \quad \eta \in \mathbb{Y},$$

$$V_3(\eta; z) = 0, \quad \eta \in \partial\mathbb{Y},$$

В силу формулы (33) для коэффициента b такая задача имеет решение, но модификация анзаца имеет следующее последствие: в соответствии с проведенными в разд. 4 вычислениями упомянутое интегральное тождество переписывается в виде

$$\begin{aligned} 0 &= h(U_{(q)}^h, (L(\nabla_x) - \Lambda_q^h)(\chi_{\ell/\varphi}(e_{(3)}w_1\varphi + hW\partial_z\varphi + h^2V)))_{\boxtimes_H^h} = \\ &= h^{-1}(\chi_{\ell/\varphi}U_q^h, w_1(\partial_z^2\varphi + (\Lambda_q^h - h^{-2}M_1)\varphi))_{\boxtimes_H^h} + O(1). \end{aligned} \quad (74)$$

Согласно сходимостям (63) и (71), (72) предельный переход $h \rightarrow +0$ в формуле (74) превращает её в соотношение

$$(\widehat{v}_q^{\ell/\varphi}, b\partial_z^2\varphi + \widehat{\beta}_q\varphi)_{(0,H)} = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, H)$$

Отсюда при учёте равенства (73) выводим нужное утверждение.

Лемма 3. *При ограничении (62) предельные переходы (63) и (71) дают собственную пару хотя бы одного из двух (ℓ и φ) экземпляров задачи (31), (32).*

Теперь можно завершить проверку теоремы 5. Соотношение ((62)) обеспечивает неравенство $\max\{N_{n\ell/\varphi}^h(\theta)\} \geq 2n$. Если случилось, что один из индексов $N_{n\ell/\varphi}^h(\theta)$ строго больше $2n$ при каких-нибудь $\theta \in [0, 2\pi]^2$ и последовательности $\{h_n(\theta)\}_{n \in \mathbb{N}}$, стремящейся к $+0$, то на сегменте $\mathcal{J}_n^{h_n(\theta)} := [0, h_n(\theta)^{-2}M_1 + k_n + C_k h_n(\theta)]$ найдётся собственное число $\Lambda_{\#}^{h_n(\theta)}$ (как обычно, индекс n и аргумент θ далее не пишем), у которого собственная вектор-функция $U_{(\#)}^h$ ортогональна в $L^2(\boxtimes_H^h)$ ³ не менее $2n$ собственным вектор-функциям той же задачи (6)–(8), отличающимся от $U_{(\#)}^h$, но отвечающим собственным числам из сегмента \mathcal{J}^h . Предельные переходы (63) и (71) предоставляют спектральную пару $\{\kappa_{\#}; v_{\#}\} \in [0, \kappa_n] \times H_0^1(0, H)$ предельной задачи (31), (32), причём сильные L^2 -сходимости (71) и (72) гарантируют, что $v_{\#}$ ортогональна функциям v_1, \dots, v_n из списка (35). Это, разумеется невозможно, т.е. теорема 5 доказана в полном объёме.

8. Лакунарное строение спектра. Теорема 5 показывает, что спектральные сегменты $\Sigma_{2k-1}^h = \Sigma_{2k}^h$ располагаются около точек

$$h^{-2}M_1 + \pi^2 H^{-2}k^2 + O(h), \quad (75)$$

однако она даёт неправильную — степенную — оценку для их длин. Следующее утверждение, опирающееся на теорему 1, показывает, в частности, что эти длины экспоненциально малы.

Теорема 6. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ найдутся такие положительные h_k и C_k , что при $h \in (0, h_k]$ длины \mathcal{L}_k^h сегментов $\Sigma_{2k-1}^h = \Sigma_{2k}^h$ удовлетворяют неравенству*

$$\mathcal{L}_k^h \leq 2C_k h^{-2} e^{-\beta/h}, \quad (76)$$

где $\beta = \beta_d > 0$ — показатель, предоставленный теоремой 1, например, при $d = (\mu\pi^2 - M_1)/2$.

Доказательство. В условиях теоремы 1 для собственных чисел (5) проверим оценку

$$|\Lambda_k^h(\theta) - \Lambda_k^h(0)| \leq C_k h^{-2} e^{-\beta/h}, \quad (77)$$

из которой сразу же вытекает искомая формула (76). Подчеркнём, что в силу асимптотической формулы (60) при малом h ограничение (14) выполнено при любом $d \in (0, \mu\pi^2 - M_1)$.

Применим максиминимальный принцип (см., например, [20; теорема 10.2.2]) для оператора задачи (6)–(8)

$$\Lambda_p^h(\theta) = \max_{\mathcal{E}_p(\theta)} \inf_{\Psi^h(\cdot; \theta) \in \mathcal{E}_p(\theta) \setminus \{0\}} \frac{E(\Psi^h(\cdot; \theta), \Psi^h(\cdot; \theta); \boxtimes_H^h)}{\|\Psi^h(\cdot; \theta); L^2(\boxtimes_H^h)\|^2},$$

в котором $\mathcal{E}_p(\theta)$ — любое подпространство в $H_{0,\theta}^1(\boxtimes_H^h)^3$ с коразмерностью $p - 1$.

Зафиксируем два параметра Флоке θ^1 и θ^2 в квадрате $[0, 2\pi]^2$. Произведения $Z_{(j)}^h(x; \theta^1) = \chi(y)U_{(j)}^h(x; \theta^1)$, $j = 1, \dots, p$, собственных вектор-функций $U_j^h(\cdot; \theta^1)$ и суммы $\chi = \chi_\ell + \chi_\varphi$ срезов (26) аннулируются около торцов $\mathbb{I}_{H\ell/\varphi}^{h\pm}$ ячейки и потому попадают в пространство $H_{0,\theta}^1(\boxtimes_H^h)^3$ при любом параметре Флоке θ . Более того, в силу экспоненциальной весовой оценки (15) они подчинены неравенствам

$$|(Z_{(j)}^h(\cdot; \theta^1), Z_{(m)}^h(\cdot; \theta^1))_{\boxtimes_H^h} - \delta_{j,m}| \leq c_p^0 e^{-\beta/h},$$

$$|E(Z_{(j)}^h(\cdot; \theta^1), Z_{(m)}^h(\cdot; \theta^1); \boxtimes_H^h) - \delta_{j,m} \Lambda_j^h(\theta^1)| \leq c_p^1 h^{-2} e^{-\beta/h}, \quad j, m = 1, \dots, p,$$

и сохраняют линейную независимость. Таким образом, в любом подпространстве $\mathcal{E}_p^h(\theta^2)$ (сменили параметр Флоке), имеющем коразмерность $p - 1$, находим линейную комбинацию

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{E}_p^h(\theta^2)}^h(x) = \sum_{j=1}^p C_j^h(\theta^2) Z_{(j)}^h(x), \quad \text{причём} \quad \sum_{j=1}^p |C_j^h(\theta^2)|^2 = 1.$$

В силу приведенных формул дробь Рэля удовлетворяет соотношению

$$\frac{E(\mathcal{Z}_{\mathcal{E}_p^h(\theta^2)}^h, \mathcal{Z}_{\mathcal{E}_p^h(\theta^2)}^h; \boxtimes_H^h)}{\|\mathcal{Z}_{\mathcal{E}_p^h(\theta^2)}^h; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2} \leq \frac{\sum_{j=1}^p |C_j^h(\theta^2)|^2 \Lambda_j^h(\theta^1) + c_p^1 p^2 h^{-2} e^{-\beta/h}}{\sum_{j=1}^p |C_j^h(\theta^2)|^2 - c_p^0 p^2 e^{-\beta/h}} \leq \Lambda_p^h(\theta^1) + C_p h^{-2} e^{-\beta/h}. \quad (78)$$

Для проверки оценки (77), а вместе с ней и оценки (76) нужно в неравенстве (78) поменять местами параметры θ^1 и θ^2 , а затем положить $\theta^1 = \theta$ и $\theta^2 = 0$. Теорема 6 доказана.

Установленные асимптотические формулы означают, что в низкочастотном диапазоне спектра (3) зоны прохождения волн (4) располагаются около точек (75), но имеют экспоненциально малые длины, а между парами $\Sigma_{2k-1}^h = \Sigma_{2k}^h$ и $\Sigma_{2k+1}^h = \Sigma_{2k+2}^h$ спектральных сегментов раскрыта лакуна шириной $\pi^2 H^{-2}(2k + 1)$. При этом зоны торможения волн оказываются значительно более широкими, что в значительной степени препятствует распространению упругих волн в тонкостенной сотовой конструкции \boxtimes_H^h .

9. Разное. 1°. *Размеры спектральных сегментов.* Теорема 5 с приемлемой точностью $O(h)$ устанавливает положение сегментов (4), однако такая точность не даёт правильного представления об их длинах. В принципе продолжение процедура построения асимптотики из разд. 4 позволяет построить разложение собственных чисел в ряды по степеням малого параметра h , что всё-таки не позволяет вычислить экспоненциально малую величину \mathcal{L}_k^h (см. теорему 6). Таким образом, построение асимптотики длин спектральных сегментов остаётся открытым вопросом. Кроме того, из-за присутствия в сумме (57) членов степенного порядка малости безразличен выбор величины $\gamma \in (0, 1/2)$ в формуле (26) для срезов $\chi_{\ell/\varphi}$, вообще говоря, влияющий на экспоненциальную точность использованных асимптотических приближений.

2°. *Постановка краевых условий в предельной задаче.* Краевые условия (32) были назначены в концах отрезка $(0, H) \ni z$ по причине условий Дирихле (7) на основаниях $\boxtimes^h \times \{0\}$ и $\boxtimes^h \times \{H\}$ ячейки \boxtimes_H^h , но также подтверждены предельным переходом (71) в равенствах (68). Вместе с

тем асимптотический анализ многих задач в тонких областях связывает краевые условия в предельной задаче с явлением порогового резонанса [37, 11, 28] в задаче (36) о пограничном слое около торцов призмы $\Upsilon_{H\ell/\varphi}^h := \Delta_{\ell/\varphi}^h \times (0, H)$. Говоря приблизительно, пороговый резонанс возникает при наличии у названной задачи нетривиального ограниченного решения, причём в этом случае предельное уравнение (31) следует снабдить краевыми условиями Неймана. Однако классический приём [39], приспособленный к задаче Дирихле для системы Ламе (см. [40, 22, 23] и др.), доказывает отсутствие у задачи (36) не только порогового резонанса, но и точечного спектра. В итоге постановка условий Дирихле (32) приобретает и обсуждаемый способ обоснования.

3°. *Условия свободного края.* Как упоминалось в замечании 1, смена типа краевых условий на боковой поверхности $\partial\mathfrak{D}^h \times (0, H)$ ячейки периодичности коренным образом изменяет свойства пограничного слоя и, как следствие, требует полной перестройки асимптотических анзацев для собственных пар $\{\Lambda^h(\theta); U^h(\cdot; \theta)\}$. Вместе с тем вполне разумна сужение условий Дирихле в смещениях (2) на объединение боковых поверхностей ячеек $\{x \in \partial\mathfrak{D}_H^h : z \in (0, H)\}$ и постановка на основаниях сотового слоя условий Неймана в напряжениях (см., например, [15]):

$$2\mu \frac{\partial u_3^h}{\partial z}(y, z) + \lambda \nabla_x \cdot u^h(y, z) = 0, \quad \mu \left(\frac{\partial u_j^h}{\partial z}(y, z) + \frac{\partial u_3^h}{\partial y_j}(y, z) \right) = 0, \quad j = 1, 2, \quad y \in \mathfrak{D}^h, \quad z = 0, H.$$

В этом случае задачи (18) и (19) для пограничного слоя около рёбер $\Upsilon_{H\ell/\varphi}^h$ ячейки \mathfrak{D}_H^h сохраняются полностью, а асимптотический анализ из разд. 4 предоставляет обыкновенное дифференциальное уравнение (31) на отрезке $(0, H) \ni z$. Вместе с тем краевые условия на границе полубесконечной призмы Ξ_+ также становятся смешанными, но никакой информации о спектре подобных задач теории упругости в слоевидных областях до сих пор нет. Поэтому вид краевых условий для уравнения (31) пока остаётся неизвестным. Более того, при наличии дискретного спектра в задаче на Ξ возникает явление околорезонансной локализации собственных (вектор)-функций (см. [41, 42] и др.), т.е. асимптотические анзацы для собственных пар становятся совершенно другими.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 124041500009-8).

Список литературы

- [?Gel1?](#) [1] *Гельфанд И.М.* Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами // Доклады АН СССР. 1950. Т. 73. С. 1117–1120.
- [?SiRe?](#) [2] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982.
- [?KuchUMN?](#) [3] *Кучмент П.А.* Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных // Успехи матем. наук. 1982. Т. 37, №4. С. 3–52.
- [?Skri?](#) [4] *Скриганов М.М.* Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 171. С. 1–122.
- [?Kuchbook?](#) [5] *Kuchment P.* Floquet theory for partial differential equations. Basel: Birkhäuser, 1993.
- [?Geim1?](#) [6] *Geim A.K., Novoselov K.S.* The rise of graphene // Nature materials. 2007. V. 6, №3. P. 183–191.

- ?Geim2? [7] *Geim A.K.* Graphene: status and prospects // *Science*. 2009. V. 324, №5934. P. 1530—1534.
- ?Pau? [8] *Pauling L.* The diamagnetic anisotropy of aromatic molecules // *J. Chem. Phys.* 1936. V. 4. P. 673—677.
- ?China? [9] *Kuchment P.A., Zeng H.* Convergence of spectra of mesoscopic systems collapsing onto a graph // *J. Math. Anal. Appl.* 2001. V. 258. P. 671—700.
- ?ExPo? [10] *Exner P., Post O.* Convergence of spectra of graph-like thin manifolds // *J. Geom. and Phys.* 2005. V. 54, №1. P. .
- ?Gri? [11] *Grieser D.* Spectra of graph neighborhoods and scattering // *Proc. London Math. Soc.* 2008. V. 97, №3. P. 718—752.
- ?Postbook? [12] *Post O.* Spectral analysis on graph-like spaces // *Lecture Notes in Mathematics*, 2039. Heidelberg: Springer, 2012.
- ?KuPo? [13] *Kuchment P.A., Post O.* On the spectra of carbon nano-structure // *Commun. Math. Phys.* 2007. V. 275, №3. P. 805—826.
- ?na578? [14] *Nazarov S.A., Ruotsalainen K., Usitalo P.* Asymptotics of the spectrum of the Dirichlet Laplacian on a thin carbon nano-structure // *C. R. Mecanique*. 2015. V. 343. P. 360—364.
- ?Rab? [15] *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
- ?na563? [16] *Nazarov S.A., Ruotsalainen K., Usitalo P.* The Y-junction of quantum waveguides // *Z. Angew. Math. Mech.* 2014. V. 94, №6. P. 477—486.
- ?Lad? [17] *Ладженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
- ?Fich? [18] *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
- ?LiMa? [19] *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
- ?BiSo? [20] *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: изд-во Ленингр.ун-та, 1980.
- ?na259? [21] *Камоцкий И.В., Назаров С.А.* О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области // *Проблемы матем. анализа*. Вып. 19. Новосибирск: Научн. книга, 1999. С. 105—148.
- ?na753? [22] *Назаров С.А.* Упругие волны, захваченные полубесконечной полосой с заземленными боковыми сторонами и изломанным торцом // *Прикладная матем. и механика*. 2023. Т. 87, №2. С. 265—279.
- ?na758? [23] *Назаров С.А.* Собственные колебания упругой полуполосы при различном расположении участков фиксации ее краев // *Акустический журнал*. 2023. Т. 69, №4. С. 398—409.
- ?MaNaP1? [24] *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenevski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. 1 & 2 Berlin: Akademie-Verlag. 1991. (Английский перевод: *Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B.* Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. 1 & 2. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000)
- ?Ilin? [25] *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.

- ?Ko? [26] *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды Московск. матем. общества. 1963. Т. 16. С. 219–292.
- ?NaPl? [27] *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin, New York: Walter de Gruyter. 1994.
- ?na262? [28] *Назаров С.А.* Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи матем. наук. 1999. Т. 54, №5. С. 77–142.
- ?AgVi? [29] *Агранович М.С., Вишик М.И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи матем. наук. 1964. Т. 19, №3. С. 53–161.
- ?GoKr? [30] *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
- ?ViLu2? [31] *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I. // Успехи матем. наук. 1960. Т. 15, №3. С. 3–80.
- ?VaTr? [32] *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
- ?AgNi? [33] *Agmon S., Nirenberg L.* Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space // Comm. Pure. Appl. Math. 1963. V. 16. P. 121–239.
- ?Pazy? [34] *Pazy A.* Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space // Arch. Rational Mech. and Anal. 1967. V. 24. P. 193–218.
- ?MaPl1? [35] *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* Оценки в L_p и в классах Гёльдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе // Math. Nachr., 1978. Bd. 77, №1. S. 25–82.
- ?ViLu? [36] *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12, №5. С. 3–122.
- ?MoVa? [37] *Molchanov S., Vainberg B.* Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. 2007. V. 273, №2. P. 533–559.
- ?na706? [38] *Назаров С.А.* Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // Известия РАН. Серия матем. 2020. Т. 84, №6. С. 3–60.
- ?Rel? [39] *Rellich F.* Über das asymptotische Verhalten der Lösungen $\Delta u + \lambda u = 0$ von in unendlichen Gebieten // Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 1943. Bd. 53. Abt. 1. S. 57–65.
- ?na554? [40] *Назаров С.А.* Упругие волны, захваченные однородным анизотропным полуцилиндром // Матем. сборник. 2013. Т. 204, №11. С. 99–130.
- ?na756? [41] *Назаров С.А.* Лакуны в спектре тонкостенного прямоугольного бесконечного короба Дирихле с периодическим семейством перегородок // Матем. сборник. 2023. Т. 214, №7. С. 91–133.
- ?naUFA? [42] *Назаров С.А.* Разные типы локализации собственных функций скалярных смешанных краевых задач в тонких многогранниках // Уфимский математический журнал. 2025. Т. 17, №1. С. 25–61.

The spectrum of an elastic honeycomb with a fixed surface.

S.A.Nazarov.

It is shown that in the low-frequency range of the spectrum of an isotropic waveguide of thick thin-walled honeycomb layer shape with fully fixed surface a plenty of gaps are opened between short spectral bands (respectively wave stopping and passing zones). Elastic waves concentrate near and oscillate along the honeycomb edges. The results are obtained by means of an asymptotic analysis of eigenpairs of the model problem in the periodicity cell dependent on the Floquet parameter. The main role is played by the boundary layer phenomenon described by solutions of two (plane vectorial and anti-plane scalar) problems in elasticity theory in a symmetric two-dimensional tripod composed from unit semi-strips. The decisive observation: the unique eigenvalue in the discrete spectrum of the scalar problem is situated below the spectrum of the vectorial problem. The justification of asymptotics is performed with the help of lemma about “almost eigenvalues and eigenvectors” and an assertion on convergence of attributes of vector eigenfunctions.

Key words: hexagonal lattice, a layer of elastic honeycomb, the Diriclet problem for the spatial Lamé system, asymptotics of eigenvalues, spectral gaps.