

УДК 517.956.8:517.958.539(3)

СПЕКТР УПРУГИХ ПЧЕЛИНЫХ СОТ С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

С. А. Назаров

Аннотация. В низкочастотном диапазоне спектра изотропного волновода в форме толстого слоя тонкостенных пчелиных сот с полностью закрепленной поверхностью обнаружено множество раскрытых широких лагун между узкими спектральными сегментами (соответственно зоны торможения и прохождения волн). Упругие волны концентрируются около и осциллируют вдоль ребер сотовых ячеек. Результаты получены посредством построения асимптотики собственных пар модельной задачи на ячейке периодичности, зависящей от параметра Флоке. Основную роль играет явление пограничного слоя, описываемого решениями двух — плоской векторной и антиплоской скалярной — задач теории упругости в симметричной двумерной треноге, составленной из единичных полуполос. Решающее наблюдение: единственное собственное число из дискретного спектра скалярной задачи лежит строго ниже спектра векторной. Обоснование асимптотики проведено при помощи классической леммы о «почти собственных» числах и векторах, а также проверки сходимости атрибутов собственных вектор-функций.

DOI 10.33048/smzh.2060.01.001

Ключевые слова: гексагональная решетка, слой упругих пчелиных сот, задача Дирихле для пространственной системы Ламе, асимптотика собственных чисел, спектральные лагуны.

1. Постановки задач. Пусть \boxtimes^0 — правильная гексагональная сетка (рис. 1,а) на плоскости $\mathbb{R}^2 \ni y = (y_1, y_2)$, т. е. бесконечный граф с единичными ребрами, встречающимися в вершинах под углом $2\pi/3$, а \boxtimes^h — $(h/2)$ -окрестность множества \boxtimes^0 , часто называемая «толстым» графом, и $h > 0$ — (безразмерный) малый параметр. Систему декартовых координат y зафиксируем так, чтобы ячейка периодичности \boxtimes^0 сетки располагалась в ромбе \diamond с вершинами $(\pm 3/2, 0)$, $(0, \pm\sqrt{3}/2)$ и состояла из двух симметричных «треног» Y_ℓ^0 и Y_\wp^0 (левая ℓ и правая \wp) с горизонтальными звеньями $I_{\ell 0}^0 = \{y : y_1 \in (-1/2, 0), y_2 = 0\}$ и $I_{\wp 0}^0 = \{y : y_1 \in (0, 1/2), y_2 = 0\}$. Остальные звенья $I_{\ell \pm}^0$ и $I_{\wp \pm}^0$ длиной $1/2$ наклонены под углом $\pm\pi/3$ к оси абсцисс y_1 , причем знак плюс отвечает тем из них, которые попали на верхнюю полуплоскость $\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R}_+ \times (0, +\infty)$. Плоская ячейка периодичности $\boxtimes^h = \boxtimes^h \cap \diamond$ (рис. 1,б) толстого графа (утолщенной сетки) образована шестью прямоугольниками $\mathbb{I}_{\ell/\wp, \alpha}^h$, $\alpha = 0, \pm$, размером $h \times (1 - h\sqrt{3})/2$ и двумя треугольниками $\Delta_{\ell/\wp}^h$ с равными сторонами длиной h и с центрами в точках $\mathcal{O}_{\ell/\wp}^h$ (рис. 1,б). Введем еще аппликату $z = x_3$ и пространственную декартову систему координат $x = (y, z) \in \mathbb{R}^3$, а также толстый (в вертикальном направлении) слой $\boxtimes_H^h = \boxtimes^h \times (0, H)$ гексагональной ячеистой

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 124041500009-8).

структуры: у всех геометрических объектов верхний индекс h указывает малую (нулевую при $h = 0$) толщину стенок, а нижний H — их высоту (ср. рис. 1, б и рис. 2, а).

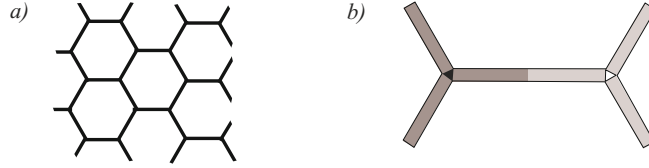


Рис. 1. Фрагмент плоской гексагональной сетки (а). Ячейка периодичности \boxtimes^h (б) утолщенной сетки \boxtimes^h : левая тренога Y_ℓ^h тонирована глубоко и ее узел Δ_ℓ^h зачернен, но узел Δ_φ^h правой треноги Y_φ^h высветлен.

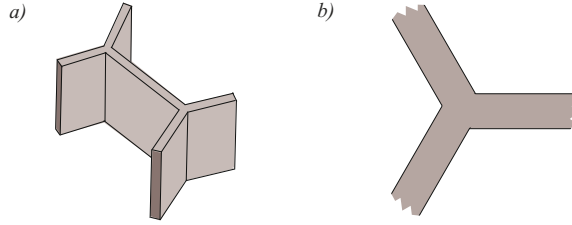


Рис. 2. Пространственная ячейка периодичности (а); прямоугольники, на которых ставятся условия квазипериодичности глубоко тонированы. Плоская бесконечная (левая) тренога (б).

Гармонические во времени с частотой ζ^h колебания изотропного и однородного (с постоянными Ламе $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$ и плотностью $\varrho > 0$) упругого волновода \boxtimes_H^h , ячейка периодичности \boxtimes_H^h которого схематично изображена на рис. 2, а, описываются системой трех уравнений в частных производных

$$L(\nabla_x)u^h(x) := -\mu\Delta_x u^h(x) - (\lambda + \mu)\nabla_x \nabla_x \cdot u^h(x) = \varrho(\zeta^h)^2 u^h(x), \quad x \in \boxtimes_H^h. \quad (1)$$

Здесь $\nabla_x = \text{grad}$, $\nabla_x \cdot = \text{div}$, а $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ — оператор Лапласа. Кроме того, u^h — вектор смещений и $u_j^h = e_{(j)} \cdot u^h$ — его проекции на оси x_j с ортами $e_{(j)}$. Поверхность волновода считаем фиксированной — жестко закрепленной, т. е. назначаем на ней условия Дирихле

$$u^h(x) = 0, \quad x \in \partial \boxtimes_H^h. \quad (2)$$

Как известно из теории Флоке — Блоха — Гельфанда (см. [1–5] и др.), спектр

$$\sigma^h = \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \Sigma^h(q) \quad (3)$$

задачи (1), (2) состоит из спектральных сегментов (зон прохождения волн)

$$\Sigma^h(q) = \{\Lambda_q^h(\theta) \mid \theta = (\theta_\ell, \theta_\varphi) \in [0, 2\pi]^2\}, \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad (4)$$

между которыми могут располагаться раскрытые лакуны (зоны торможения волн). Сами сегменты (4) определяются по собственным числам

$$0 < \Lambda_1^h(\theta) \leq \Lambda_2^h(\theta) \leq \Lambda_3^h(\theta) \leq \dots \leq \Lambda_q^h(\theta) \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (5)$$

зависящей от параметра Флоке θ модельной задачи на ячейке периодичности

$$-\mu\Delta_x U^h(x; \theta) - (\lambda + \mu)\nabla_x \nabla_x \cdot U^h(x; \theta) = \Lambda^h(\theta)u^h(x; \theta), \quad x \in \boxtimes_H^h, \quad (6)$$

$$U^h(x; \theta) = 0, \quad x \in \partial \boxtimes_H^h \setminus \overline{\mathbb{I}_H^h}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} U^h(x; \theta)|_{\mathbb{I}_{H/\varphi}^{h+}} &= e^{i\theta \ell/\varphi} U^h(x; \theta)|_{\mathbb{I}_{H/\varphi}^{h-}}, \\ \partial_n U^h(x; \theta)|_{\mathbb{I}_{H/\varphi}^{h+}} &= -e^{i\theta \varpi/\varphi} \partial_n U^h(x; \theta)|_{\mathbb{I}_{H/\varphi}^{h-}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь \mathbb{I}_H^h — объединение прямоугольников $\mathbb{I}_{H/\varphi}^{h\pm} \subset \overline{\mathbb{I}_H^h}$ размером $h \times H$, попадающих на призматическую поверхность $\diamond \times (0, H)$ (тонированы на рис. 2,а) и называемых также торцами трехмерной ячейки, а ∂_n — производная вдоль внешней нормали.

Спектр (3) задачи (6)–(8) дискретный, а функции $[0, 2\pi]^2 \ni \theta \mapsto \Lambda_k^h(\theta)$ непрерывны и 2π -периодичны (см. любой из цитированных источников). Собственные вектор-функции $U_{(k)}^h(\cdot; \theta) \in H_{0,\theta}^1(\boxtimes_H^h)^3$ подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$(U_{(k)}^h(\cdot; \theta), U_{(j)}^h(\cdot; \theta))_{\boxtimes_H^h} = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Здесь $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера, $(\cdot, \cdot)_{\boxtimes_H^h}$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\boxtimes_H^h)$, $H_{0,\theta}^1(\boxtimes_H^h)^3$ — пространство Соболева вектор-функций, удовлетворяющих условию Дирихле (7) и первому условию квазипериодичности (8), а верхний индекс 3 указывает количество компонент вектор-функций, но он отсутствует в обозначениях скалярных произведений и норм.

Основная цель работы — построение и обоснование асимптотики собственных пар $\{\Lambda_k^h(\theta); U_{(k)}^h(\cdot; \theta)\}$ задачи (6)–(8) и как следствие выяснение лакунарного строения спектра (3) задачи (1), (2). Тело \boxtimes_H^h можно интерпретировать как восковое гнездо пчелиных сот, однако с некоторой натяжкой: условия Дирихле подразумевают, что пласт сот зажат между абсолютно жесткими фланцами, а содержащийся в них мед полностью затвердел. Распространение волн в сотовой вошине \boxtimes_H^h оказывается необычным, поскольку в главном они концентрируются около ребер ячеек и являются продольными, т. е. колебания происходят в вертикальном направлении.

Публикации [6, 7] и другие, содержащие описание замечательных свойств графена, и особенно присуждение авторам Нобелевской премии привели к большому количеству физических и математических статей, в которых предлагались и изучались разнообразные модели этих незаурядных объектов. Упомянем лишь два исследования, имеющие прямое отношение к тематике данной работы и выявляющих лакунарное строение спектров задач Неймана¹ [13] и Дирихле [14] для оператора Лапласа на тонких плоских гексагональных решетках.

Оставив в стороне физическую природу упругой структуры, подчеркнем, что проведенный далее анализ задачи теории упругости (1), (2) отличается от предшествующих разработок многими аспектами, так как рассматривается не скалярная и плоская, а векторная и пространственная задача. Проверенная далее локализация собственных вектор-функций модельной задачи (6)–(8) подсказывает, что в асимптотических формулах на первый план выходит явление

¹В этой работе применяется одномерная модель Полинга [8], но общие результаты (см. [9–12] и др.) устанавливают близость спектров задач на обычном и «толстом» графах.

пограничного слоя, который описывается при помощи решений двух, плоской и антиплоской — векторной и скалярной (см., например, [15]), задач в двумерной симметричной бесконечной «треноге» \mathbb{Y} (рис. 2, b), образованной тремя ($\alpha = 0, \pm$) полуполосами Π_α единичной толщины со средними линиями, исходящими из начала \mathcal{O} декартовой системы координат $\eta \in \mathbb{R}^2$ под углом $2\pi/3$ одна к другой, причем

$$\Pi_0 = \{\eta = (\eta_1, \eta_2) : \eta_1 > 0, |\eta_2| < 1/2\}. \quad (10)$$

Если дискретный спектр скалярной задачи полностью известен (см. публикацию [16]), то об изолированных собственных числах векторной задачи нет вообще никакой информации. На помощь приходит теорема 2, показывающая, что в низкочастотном диапазоне спектра (5) пограничный слой порожден именно собственной функцией антиплоской задачи.

Основной технической прием — замена обычного функционала упругой энергии (см., например, [15]) квазиэнергией

$$E(U^h, U^h; \boxtimes_H^h) = \mu \|\nabla_x U^h; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 + (\lambda + \mu) \|\nabla_x \cdot U^h; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2. \quad (11)$$

Такая возможность появилась благодаря постановке условий Дирихле, а именно, умножив (6) скалярно на пробную вектор-функцию $\Psi^h(\cdot; \theta) \in H_{0,\theta}^1(\boxtimes_H^h)^3$ и проинтегрировав по частям при учете условия (7) и первого условия (8) для Ψ^h , а также второго условия (8) для $U^h(\cdot; \theta)$ приходим к интегральному тождеству (см. [17–19] и др.)

$$E(U^h(\cdot; \theta), \Psi^h(\cdot; \theta); \boxtimes_H^h) = \Lambda^h(\theta)(U^h(\cdot; \theta), \Psi^h(\cdot; \theta))_{\boxtimes_H^h} \quad \forall \Psi^h \in H_{0,\theta}^1(\boxtimes_H^h)^3. \quad (12)$$

Полуторалинейная форма

$$E(\Phi, \Psi; \boxtimes_H^h) = \mu(\nabla_x \Phi, \nabla_x \Psi)_{\boxtimes_H^h} + (\lambda + \mu)(\nabla_x \cdot \Phi, \nabla_x \cdot \Psi)_{\boxtimes_H^h}$$

положительно определена, симметрична и замкнута в $H_{0,\theta}^1(\boxtimes_H^h)^3$, что и обеспечивает все упомянутые свойства спектра задачи (12) (или (6)–(8) в дифференциальной форме).

Кратко опишем строение статьи. В теореме 1 из разд. 2 доказана локализация собственных вектор-функций $U_{(k)}^h(\cdot; \theta)$ около ребер $\Delta_{\ell/\varphi}^h \times (0, H)$ ячейки \boxtimes_H^h и экспоненциальное затухания при удалении от них. В разд. 3 приведена информация о спектрах двух, плоской (18) и антиплоской (19), задач теории упругости в бесконечной треноге \mathbb{Y} (центральный результат — теорема 2), а порожденная захваченной волной во второй, скалярной, задаче асимптотика собственных пар задачи (6)–(8) построена в разд. 4. В разд. 5 исследовано явление пространственного пограничного слоя. Найденные асимптотические конструкции обоснованы в разд. 6 и 7, а выводы о лакунарном строении спектра (3) приведены в разд. 8 (соответственно теоремы 5 и 6). Наконец, в разд. 9 перечислено несколько открытых вопросов.

2. Концентрация собственных функций около ребер решетки.

Введем непрерывную кусочно-гладкую экспоненциальную весовую функцию

$$\mathcal{R}_\beta^h(x) = \begin{cases} e^{\beta r(y)/h} & \text{при } r(y) := \text{dist}(y, \Delta^h) \leq 1/4, \\ e^{\beta/4h} & \text{при } r(y) \geq 1/4, \end{cases} \quad (13)$$

где $\Delta^h = \Delta_\ell^h \cup \Delta_\varphi^h$ — объединение треугольных узлов плоской ячейки \boxtimes^h .

Теорема 1. Пусть для некоторых $p \in \mathbb{N}$, $\theta \in [0, 2\pi]^2$ и $d > 0$ собственное число $\Lambda_p^h(\theta)$ подчинено соотношению

$$\Lambda_p^h(\theta) \leq h^{-2}\mu(\pi^2 - d). \quad (14)$$

Тогда найдутся такие не зависящие от θ и p положительные величины h_d , β_d и c_d , что при $h \in (0, h_d]$ нормированная в пространстве $L^2(\bowtie_H^h)^3$ собственная вектор-функция $U_{(p)}^h(\cdot; \theta)$ задачи (6)–(8), удовлетворяет весовой оценке

$$h^2 \|\mathcal{R}_{\beta_d}^h \nabla_x U_{(p)}^h(\cdot; \theta); L^2(\bowtie_H^h)\|^2 + \|\mathcal{R}_{\beta_d}^h U_{(p)}^h(\cdot; \theta); L^2(\bowtie_H^h)\|^2 \leq c_d. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индексы d , p и по-возможности аргумент θ не пишем. Подставим в интегральное тождество (12) пробную вектор-функцию $\Psi^h = \mathcal{R}_{\beta}^h \Phi^h$, где $\Phi^h := \mathcal{R}_{\beta}^h U^h \in H_{0,\theta}^1(\bowtie_H^h)^3$, а первое условие квазипериодичности (8) сохранено потому, что вес (13) постоянен около прямоугольников $\mathbb{I}_{H\ell/\varphi}^{h\pm}$. Двукратное коммутирование градиент-оператора ∇_x и множителя $\mathcal{R}_{\beta}^h(y)$ превращает названное тождество в равенство

$$\begin{aligned} & \mu(\|\nabla_x \Phi^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 - (\Phi^h \mathcal{R}_{-\beta}^h \nabla_x \mathcal{R}_{\beta}^h, \nabla_x \Phi^h)_{\bowtie_H^h}) \\ & \quad + (\nabla_x \Phi^h, \Phi^h \mathcal{R}_{-\beta}^h \nabla_x \mathcal{R}_{\beta}^h)_{\bowtie_H^h} - \|\Phi^h \mathcal{R}_{-\beta}^h \nabla_x \mathcal{R}_{\beta}^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 \\ & \quad + (\lambda + \mu)(\|\nabla_x \cdot \Phi^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 - (\mathcal{R}_{-\beta}^h \Phi^h \cdot \nabla_x \mathcal{R}_{\beta}^h, \nabla_x \cdot \Phi^h)_{\bowtie_H^h}) \\ & \quad + (\nabla_x \cdot \Phi^h, \mathcal{R}_{-\beta}^h \Phi^h \cdot \nabla_x \mathcal{R}_{\beta}^h)_{\bowtie_H^h} - \|\mathcal{R}_{-\beta}^h \Phi^h \cdot \nabla_x \mathcal{R}_{\beta}^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 \\ & \quad = \Lambda^h \|\Phi^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2. \end{aligned} \quad (16)$$

После выделения вещественных частей все скалярные произведения в левой части взаимно уничтожаются и в результате остаются только квадраты норм.

Теперь заметим, что $\mathcal{R}_{\beta}^h = 1$, $\nabla_x \mathcal{R}_{\beta}^h = 0$ и $\Phi^h = U^h$ на треугольниках $\Delta_{\ell/\varphi}^h$ и

$$\mathcal{R}_{-\beta}^h(y) \left| \frac{\partial \mathcal{R}_{\beta}^h}{\partial y_j}(y) \right| \leq \frac{\beta}{h} \quad \text{при } y \in \bowtie^h \setminus \Delta^h, \quad j = 1, 2. \quad (17)$$

Кроме того, одномерное неравенство Фридрикса на интервале $(-h/2, h/2)$, условие Дирихле (7) и геометрическое строение сечения ячейки обеспечивают оценку

$$\|\nabla_x \Phi^h; L^2(\bowtie_H^h \setminus \Delta_H^h)\|^2 \geq \pi^2 h^{-2} \|\Phi^h; L^2(\bowtie_H^h \setminus \Delta_H^h)\|^2.$$

При помощи перечисленных соотношений придаем равенству (16), из которого удалим ненужные слагаемые, следующий вид:

$$\begin{aligned} & \sigma \mu \|\nabla_x \Phi^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 \leq (\sigma - 1) \mu \|\nabla_x \Phi^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 \\ & \quad + (\mu + 2(\lambda + \mu)) \|\Phi^h \mathcal{R}_{-\beta}^h \nabla_x \mathcal{R}_{\beta}^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 + \Lambda^h \|\Phi^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 \\ & \leq h^{-2} (\pi^2 (\sigma - 1) \mu + \beta^2 (2\lambda + 3\mu) + h^2 \Lambda^h) \|\Phi^h; L^2(\bowtie_H^h \setminus \Delta_H^h)\|^2 + \Lambda^h \|\Phi^h; L^2(\Delta_H^h)\|^2. \end{aligned}$$

При учете ограничения (14) фиксируем величины $\sigma \in (0, 1)$ и $\beta > 0$ так, чтобы множитель при $\|\Phi^h; L^2(\bowtie_H^h \setminus \Delta_H^h)\|^2$ стал меньше $-h^{-2}d/2$ (знак минус). К тому же в силу нормировки (9) и равенства $\Phi^h = U^h$ на $\Delta_H^h := (\Delta_{\ell}^h \cup \Delta_{\varphi}^h) \times (0, H)$

последнее слагаемое не превосходит $\mu\pi^2 h^{-2}$. В итоге, сократив общий множитель μ , выводим, что

$$h^2 \sigma \|\nabla_x \Phi^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 + \frac{d}{2} \|\Phi^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 \leq \pi^2.$$

Оценка второй нормы из левой части (15) уже получена, а для оценки первой нужно еще раз применить коммутирование и учесть формулу (17). Теорема доказана.

3. Задачи о двумерном пограничном слое. Растяжение продольных координат $y \mapsto \eta^\ell = h^{-1}(y - \mathcal{O}_\ell)$ и $y \mapsto \eta^\wp = -h^{-1}(y - \mathcal{O}_\wp)$ относительно центров треугольников Δ_ℓ^h и Δ_\wp^h , но сохранение масштаба для аппликаты z с последующим формальным переходом к $h = 0$ трансформирует область \bowtie_H^h в прямое произведение $\mathbb{Y} \times (0, H) \ni (\eta, z)$. Обратим внимание на знак минус в формуле для η^\wp (зеркальное отражение треноги \mathbb{Y}_\wp^0 , требующее также преобразование вектора смещений $u^h \mapsto (u_1^h, u_3^h, u_2^h)$), но далее индексы ℓ и \wp у координат η не пишем. Указанные действия расщепляют оператор Ламе $L(\nabla_\eta, 0)$ на блочно-диагональную матрицу с двумерным оператором Ламе $L'(\nabla_\eta) = -\mu\Delta_\eta - (\lambda + \mu)\nabla_\eta \nabla_\eta \cdot$ и оператором $-\mu\Delta_\eta$ на главной диагонали. В итоге возникают две задачи, а именно плоская задача теории упругости

$$-\mu\Delta_\eta w'(\eta) - (\lambda + \mu)\nabla_\eta \nabla_\eta \cdot w'(\eta) = M' w'(\eta), \quad \eta \in \mathbb{Y}, \quad w'(\eta) = 0, \quad \eta \in \partial\mathbb{Y}, \quad (18)$$

для вектора продольных смещений $w' = (w_1, w_2)$ и антиплоская задача для депланации $w^\odot := w_3$ (символ \odot — обычное обозначение на плоскости для перпендикулярной ей оси аппликат)

$$-\mu\Delta_\eta w^\odot(\eta) = M^\odot w^\odot(\eta), \quad \eta \in \mathbb{Y}, \quad w^\odot(\eta) = 0, \quad \eta \in \partial\mathbb{Y}. \quad (19)$$

По этим задачам выстраиваются симметричные, положительно определенные, замкнутые соответственно в $H^1(\mathbb{Y})^2$ и $H^1(\mathbb{Y})$ квадратичные формы

$$E'(w', w'; \mathbb{Y}) = \mu(\nabla_\eta w', \nabla_\eta w')_{\mathbb{Y}} + (\lambda + \mu)(\nabla_\eta \cdot w', \nabla_\eta \cdot w')_{\mathbb{Y}} + \mu(\nabla_\eta w^\odot, \nabla_\eta w^\odot)_{\mathbb{Y}}, \quad (20)$$

а значит, согласно [20, гл. 10] и неограниченные самосопряженные положительно определенные операторы A' и A^\odot в гильбертовых пространствах $L^2(\mathbb{Y})^2$ и $L^2(\mathbb{Y})$. Непрерывные спектры φ'_c и φ_c^\odot этих операторов совпадают и занимают луч $[M_\dagger, +\infty)$ с точкой отсечки $M_\dagger = \mu\pi^2$ (см., например, статью [21] по поводу плоской задачи, а для антиплоской результат очевиден).

В работе [16] доказано, что дискретный спектр φ_d^\odot оператора A^\odot состоит из единственного собственного числа $M_1^\odot \in (0, \mu\pi^2)$. Соответствующая собственная функция $w_1^\odot \in H_0^1(\mathbb{Y})$, положительная в области \mathbb{Y} и нормированная в $L^2(\mathbb{Y})$, обладает вращательной симметрией на угол $2\pi/3$ относительно начала координат \mathcal{O} и допускает в полуполосе (10) представление

$$w_1^\odot(\eta) = K_1^\odot e^{-\eta_1 \sqrt{\pi^2 - \mu^{-1} M_1^\odot}} \cos(\pi\eta_2) + O(e^{-|\eta| \sqrt{4\pi^2 - \mu^{-1} M_1^\odot}}) \quad \text{при } \eta_1 \rightarrow +\infty. \quad (21)$$

В каждой из трех ($\alpha = 0, \pm$) угловых точек раствором $4\pi/3$ на границе $\partial\mathbb{Y}$ (вершин \mathcal{O}^α узла Δ — равностороннего треугольника с единичной стороной) справедливо разложение

$$w_1^\odot(\eta) = C_1^\odot \rho_\alpha^{3/4} \sin\left(\frac{3\varphi_\alpha}{4}\right) + O(\rho_\alpha^{3/2}), \quad \rho \rightarrow +0, \quad (22)$$

где $(\rho_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times (0, 4\pi/3)$ — система полярных координат с центром в вершине \mathcal{O}^α . Коэффициенты K_1^\odot и C_1^\odot положительны, так как положительная функция w_1^\odot раскладывается в сходящиеся ряды Фурье на полуполосе и секторе, но среди членов рядов только отделенные в формулах (21) и (22) не меняют знак.

Автор не знает, пустым или нет является дискретный спектр \wp'_d оператора A' плоской задачи теории упругости (18). Следующее утверждение, компенсирующее недостаток информации, понадобится при построении асимптотики собственных пар задачи (6)–(8).

Теорема 2. *Полуинтервал $(0, M_1^\odot]$ свободен от дискретного спектра \wp'_d оператора A' .*

Доказательство. Допустим, что существует собственная пара $\{M'_1; w'_{(1)}\} \in (0, M_1^\odot] \times H_0^1(\mathbb{Y})^2$. В силу минимального принципа (см., например, [20; теорема 10.2.2]) первое (наименьшее) собственное число находится по формуле

$$M'_1 = \min_{\psi' \in H_0^1(\mathbb{Y}^2) \setminus \{0\}} \frac{E'(\psi', \psi'; \mathbb{Y})}{\|\psi'; L^2(\mathbb{Y})\|^2} = \frac{E'(w'_{(1)}, w'_{(1)}; \mathbb{Y})}{\|w'_{(1)}; L^2(\mathbb{Y})\|^2}. \quad (23)$$

Согласно левому определению (20) имеем

$$\begin{aligned} M'_1 &\geq \min_{\psi' \in H_0^1(\mathbb{Y}^2) \setminus \{0\}} \frac{\mu \|\nabla_\eta \psi_1; L^2(\mathbb{Y})\|^2 + \mu \|\nabla_\eta \psi_2; L^2(\mathbb{Y})\|^2}{\|\psi_1; L^2(\mathbb{Y})\|^2 + \|\psi_2; L^2(\mathbb{Y})\|^2} \\ &= \mu \min_{\psi^\odot \in H_0^1(\mathbb{Y}) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla_\eta \psi^\odot; L^2(\mathbb{Y})\|^2}{\|\psi^\odot; L^2(\mathbb{Y})\|^2} = M_1^\odot. \end{aligned} \quad (24)$$

Первое неравенство в цепочке (24) можно считать строгим, так как минимум в формуле (23) можно вычислять по конусу

$$\mathfrak{Y}_\delta := \{\psi' \in H_0^1(\mathbb{Y})^2 : \|\nabla_\eta \cdot \psi'; L^2(\mathbb{Y})\| \geq \delta \|\psi'; L^2(\mathbb{Y})\|\}.$$

Число $\delta > 0$ нужно выбрать так, чтобы в \mathfrak{Y}_δ попали и нормированный в $L^2(\mathbb{Y})^2$ вектор $w'_{(1)}$, на котором реализуется минимум (23), и вектор $2^{-1/2}(w_1^\odot, w_1^\odot)$, включающий дважды собственную функцию задачи (19). Это возможно потому, что $\|\nabla_\eta \cdot w'_{(1)}; L^2(\mathbb{Y})\| > 0$ и $\|\partial_{\eta_1} w_1^\odot + \partial_{\eta_2} w_1^\odot; L^2(\mathbb{Y})\| > 0$. В самом деле, если $\nabla_\eta \cdot w'_{(1)} = 0$, то каждая ($j = 1, 2$) из компонент $w'_{(1)j}$ удовлетворяет задаче

$$-\mu \Delta_\eta w'_{(1)j}(\eta) = M'_1 w'_{(1)j}(\eta), \quad \eta \in \mathbb{Y}, \quad w'_{(1)j}(\eta) = 0, \quad \eta \in \partial \mathbb{Y}.$$

При учете соотношения (24) видим, что $M'_1 = M_1^\odot$ и в силу простоты собственного числа M_1^\odot вектор-функция $w'_{(1)}(\eta)$ совпадает с $C w_1^\odot(\eta)$ при некотором столбце $C \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, а значит,

$$C_1 \frac{\partial w_1^\odot}{\partial \eta_1}(\eta) + C_2 \frac{\partial w_1^\odot}{\partial \eta_2}(\eta) = 0, \quad \eta \in \mathbb{Y}.$$

Последнее равенство невозможно, так как нетривиальное решение задачи (19), зависящее только от одной переменной $C_2 \eta_1 - C_1 \eta_2$, — нонсенс. Теорема доказана.

Сама собственная пара $\{M_1^\odot; w_1^\odot\}$ и ее свойства будут использованы в разд. 4. Перечисленные факты означают, что справедливы неравенства

$$\mu \|\nabla_\eta w_3; L^2(\mathbb{Y})\|^2 \geq M_1^\odot \|w_3; L^2(\mathbb{Y})\|^2 \quad \forall w_3 \in H_0^1(\mathbb{Y}),$$

$$\begin{aligned} \mu \|\nabla_\eta w_3; L^2(\mathbb{Y})\|^2 &\geq \mu \pi^2 \|w_3; L^2(\mathbb{Y})\|^2 \quad \forall w_3 \in H_0^1(\mathbb{Y}) \text{ в случае } (w_3, w_1^\circ)_\mathbb{Y} = 0, \quad (25) \\ E'(w', w'; \mathbb{Y}) &\geq (M_1^\circ + d_\mathbb{Y}) \|w'; L^2(\mathbb{Y})\|^2 \quad \forall w' \in H_0^1(\mathbb{Y})^2 \text{ при некотором } d_\mathbb{Y} > 0. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если какая-либо часть поверхности упругого волновода свободна от внешних воздействий (условия Неймана в напряжениях) и вместо квазиэнергии приходится пользоваться истинной упругой энергией, то теорема 2 перестает быть верной. Контрпримером служат задачи теории упругости в полуполосе (10) с условиями Дирихле на боковых сторонах и Неймана на торце: дискретный спектр скалярной задачи пуст из-за возможности разделить переменные, но у векторной задачи собственное число на интервале $(0, M_\dagger)$ есть (см. [21–23] и др.).

4. Формальная асимптотика. На плоской ячейке \bowtie^h введем гладкие срезающие функции $\chi_{\ell/\varphi}^h$, служащие для локализации асимптотических конструкций на левую \mathbb{Y}_ℓ^h и правую \mathbb{Y}_φ^h треноги,

$$\chi_{\ell/\varphi}(y) = 1 \text{ при } |y - \mathcal{O}_{\ell/\varphi}| \leq \gamma \text{ и } \chi_{\ell/\varphi}(y) = 0 \text{ при } |y - \mathcal{O}_{\ell/\varphi}| \geq (2\gamma + 1)/4. \quad (26)$$

Параметр $\gamma \in (0, 1/2)$ выбирается произвольно (см. разд. 9, 1°).

В соответствии с теоремой 1 о локализации собственных вектор-функций и теоремой 2 о пограничном слое примем следующие асимптотические анзацы для двух (ℓ) и (φ) собственных пар $\{\Lambda_{k_{\ell/\varphi}}^h(\theta); U_{(k_{\ell/\varphi})}^h(\cdot; \theta)\}$ задачи (6)–(8) при каком-нибудь параметре Флоке θ :

$$\Lambda^h = h^{-2} M_1^\circ + \kappa + \dots, \quad (27)$$

$$U^h(x) = \chi_{\ell/\varphi}(y) (e_{(3)} w_1^\circ(\eta^{\ell/\varphi}) v(z) + hW(\eta^{\ell/\varphi}) \partial_z v(z) + h^2 V(\eta^{\ell/\varphi}, z)) + \dots \quad (28)$$

Индекс $k_{\ell/\varphi}$ и аргумент θ для краткости не указываем, многоточие замечает младшие асимптотические члены, растянутые координаты $\eta^{\ell/\varphi} \in \mathbb{R}^2$ и спектральная пара $\{M_1^\circ; w_1^\circ\}$ задачи (19) введены в разд. 3, а вектор-функции W , V и число κ подлежат определению.

Подставим анзацы (27) и (28) в систему уравнений (6) и соберем множители при одинаковых степенях малого параметра. Учитывая расщепление оператора Ламе $L(\nabla_x)$, вызванное растяжением продольных координат y , но сохранением масштаба для z (см. начало разд. 3), получаем для вектора $W' = (W_1, W_2)$ и скаляра V_3 (остальные компоненты у W и V нулевые) задачи теории упругости, плоскую

$$L'(\nabla_\eta) W'(\eta) - M_1^\circ W'(\eta) = (\lambda + \mu) \nabla_\eta w_1^\circ(\eta), \quad \eta \in \mathbb{Y}, \quad W'(\eta) = 0, \quad \eta \in \partial\mathbb{Y}, \quad (29)$$

и антиплоскую

$$\begin{aligned} -\mu \Delta_\eta V_3(\eta; z) - M_1^\circ V_3(\eta; z) &= F_3(\eta, z) := \kappa w_1^\circ(\eta) + (\lambda + 2\mu) w_1^\circ(\eta) \partial_z^2 v(z) \\ &+ (\lambda + \mu) \nabla_\eta \cdot W'(\eta) \partial_z^2 v(z), \quad \eta \in \mathbb{Y}, \quad V_3(\eta; z) = 0, \quad \eta \in \partial\mathbb{Y}. \quad (30) \end{aligned}$$

Условия Дирихле на границе треноги унаследованы от условий (7) на поверхности $\partial \bowtie_H^h \setminus \mathbb{I}_H^h$.

В силу упомянутых и доказанных фактов из разд. 3 задача (29) с двумерным оператором Ламе $L'(\nabla_\eta)$ однозначно разрешима в классе Соболева $H_0^1(\mathbb{Y})^2$, а у задачи (30) есть одно условие разрешимости в классе экспоненциально затухающих функций — ортогональность правой части F_3 собственной функции w_1 . Оно принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения

$$-b \partial_z^2 v(z) = \kappa v(z), \quad z \in (0, H), \quad (31)$$

которое, отталкиваясь от условия Дирихле (7), снабдим краевыми условиями

$$v(0) = 0 \quad \text{и} \quad v_{H\kappa}(H) = 0. \quad (32)$$

Теорема 3. Для коэффициента в уравнении (31) выполнено соотношение

$$b = \int_{\mathbb{Y}} w_1^\circ(\eta) ((\lambda + 2\mu)w_1^\circ(\eta) + (\lambda + \mu)\nabla_\eta \cdot W'(\eta)) d\eta > \mu. \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя по частям, находим, что

$$\begin{aligned} b &= \lambda + 2\mu + 2(\lambda + \mu) \int_{\mathbb{Y}} w_1^\circ(\eta) \nabla_\eta \cdot W'(\eta) d\eta + (\lambda + \mu) \int_{\mathbb{Y}} \nabla_\eta w_1^\circ(\eta) \cdot W'(\eta) d\eta \\ &= \mu + (\lambda + \mu) \|w_1^\circ + \nabla_\eta \cdot W'; L^2(\mathbb{Y})\|^2 \\ &\quad + (\mu \|\nabla_\eta W'; L^2(\mathbb{Y})\|^2 - M_1 \|W'; L^2(\mathbb{Y})\|^2). \end{aligned} \quad (34)$$

Второе слагаемое в правой части неотрицательно, а последняя разность положительна благодаря первому неравенству (25) и невозможности формулы $W' = Cw_1^\circ$ со столбцом $C \in \mathbb{R}^2$. Теорема доказана.

Наконец, упомянем, что собственные пары задачи (31), (32) имеют вид

$$\kappa_m = \pi^2 H^{-2} m^2, \quad v_m(z) = (2H)^{-1/2} \sin(\pi m z / H), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (35)$$

5. Трехмерный пограничный слой. В силу формул (35) второй член анзаца (28), принятого на начальном этапе асимптотического анализа, не удовлетворяет условиям Дирихле (7) на основаниях ячейки \bowtie_H^h . Согласно общим принципам построения асимптотик (см., например, монографии [24, 25]) компенсация возникающих невязок производится при помощи построения трехмерных пограничных слоев около треугольников $\Delta_{\ell/\varphi}^h \times \{0\}$ и $\Delta_{\ell/\varphi}^h \times \{H\}$ на основаниях ячейки. Вблизи одного из них, например $\Delta_\ell^h \times \{0\}$, производим растяжение координат $x \mapsto \xi_\ell^0 = (h^{-1}(y - \mathcal{O}_\ell^h), h^{-1}z)$ и перейдем формально к $h = 0$. В результате получим следующую задачу Дирихле в неограниченной области $\Xi_+ = \mathbb{Y} \times \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} L(\nabla_\xi) Z_\ell^0(\xi) - M_1^\circ Z_\ell^0(\xi) &= 0, \quad \xi \in \Xi_+, \\ Z_\ell^0(\xi) &= 0, \quad \xi \in \partial\mathbb{Y} \times \mathbb{R}_+, \quad Z_\ell^0(\eta, 0) = G(\eta, 0), \quad \eta \in \partial\mathbb{Y}. \end{aligned} \quad (36)$$

Такие же задачи возникают около трех других треугольников после подходящих поворотов систем координат. Ограничимся рассмотрением указанного треугольника, но не будем писать символы 0 и ℓ . В силу первого соотношения (25) и следствия одномерного неравенства Харди

$$\|(1 + \zeta)^{-1} \Psi; L^2(\xi)\|^2 \leq 4 \|\nabla_\xi \Psi; L^2(\xi)\|^2 \quad \forall \Psi \in C_c^\infty(\Xi_+), \quad (37)$$

а также определения (11) выводим оценку первой нормы в правой части

$$\begin{aligned} (E(Z, Z; \Xi_+) - M_1^\circ \|Z; L^2(\Xi_+)\|^2)^{1/2} \\ \geq c_\Xi \left(\left\| \frac{Z}{1 + \zeta}; L^2(\Xi_+) \right\|^2 + \left\| \frac{\nabla_\xi Z}{1 + \zeta}; L^2(\Xi_+) \right\|^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (38)$$

с множителем $c_\Xi > 0$, не зависящим от $Z \in C_c^\infty(\Xi_+)$. Оценка второй нормы требует разбиения множества Ξ на ячейки v_n , $n \in \mathbb{N}$, двух типов: единичные кубы

и призмы с основаниями Δ единичной высоты, на которых верны подлежащие суммированию соотношения

$$\mu \left\| \frac{\nabla_{\xi} Z}{1 + \zeta}; L^2(v_n) \right\|^2 \leq \frac{\max\{1 + \zeta \mid \xi \in v_n\}}{\min\{1 + \zeta \mid \xi \in v_n\}} \times \left(\frac{E(Z, Z; v_n) - M_1^{\circ} \|Z; L^2(v_n)\|^2}{\max\{1 + \zeta \mid \xi \in v_n\}} + C \left\| \frac{Z}{1 + \zeta}; L^2(v_n) \right\|^2 \right),$$

где общий множитель не превосходит двух, а максимум в знаменателе дроби больше единицы.

Через $\mathbf{H}_0^1(\Xi_+)^3$ обозначим пополнение линейного множества $C_c^{\infty}(\Xi_+)^3$ (бесконечно дифференцируемые вектор-функции с компактными носителями) по норме $\|Z; \mathbf{H}_0^1(\Xi)\|$ из левой части неравенства (38), которое означает, что пространство состоит из вектор-функций $Z \in H_{0,\text{loc}}^1(\overline{\Xi_+})^3$, для которых конечна названная норма. Теорема Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве обеспечивает очередное утверждение.

Лемма 1. *При любом функционале $\mathbf{F} \in (\mathbf{H}_0^1(\Xi_+)^3)^*$ интегральное тождество*

$$E(Z^{\sharp}, \Psi; \Xi_+) - M_1^{\circ}(Z^{\sharp}, \Psi)_{\Xi_+} = \mathbf{F}(\Psi) \quad \forall \Psi \in \mathbf{H}_0^1(\Xi_+)^3 \quad (39)$$

имеет единственное решение $Z^{\sharp} \in \mathbf{H}_0^1(\Xi_+)^3$ и верна оценка

$$\|Z^{\sharp}; \mathbf{H}_0^1(\Xi_+)\| \leq C_{\Xi} \|\mathbf{F}; (\mathbf{H}_0^1(\Xi_+)^3)^*\|.$$

Под *обобщенным решением* $Z \in \mathbf{H}_0^1(\Xi; \partial\mathbb{Y} \times \mathbb{R}_+)^3$ (норма сохранена, но нет обращения в нуль на основании полуцилиндра Ξ_+) задачи (36), в которой правая часть — след вектор-функции $G \in \mathbf{H}_0^1(\Xi; \partial\mathbb{Y} \times \mathbb{R}_+)^3$, понимаем сумму $Z = Z^{\sharp} + G$, где $Z^{\sharp} \in \mathbf{H}_0^1(\Xi_+)^3$ — решение задачи (39) при

$$\mathbf{F}(\Psi) = E(G, \Psi; \Xi_+) - M_1^{\circ}(G, \Psi)_{\Xi_+}. \quad (40)$$

Теперь применим теорию Кондратьева [26] (см. также [27, гл. 3, § 1; 28, § 3] и др.). Именно, рассмотрим интегральное тождество на бесконечном в обе стороны цилиндре $\Xi = \mathbb{Y} \times \mathbb{R}$:

$$E(Z, \Psi; \Xi) - M_1^{\circ}(Z, \Psi)_{\Xi} = \mathbf{F}(\Psi) \quad \forall \Psi \in C_c^{\infty}(\Xi)^3 \quad (41)$$

с подходящим (см. ниже) функционалом \mathbf{F} в правой части. Применим преобразование Фурье $\mathcal{F}_{\zeta \rightarrow \mathfrak{z}}$ вдоль прямой $\{\mathfrak{z} \in \mathbb{C} : \text{Im } \mathfrak{z} = t\}$, $t \neq 0$, и придем к интегральному тождеству

$$\widehat{E}_{\mathfrak{z}}(\widehat{Z}, \widehat{\Psi}; \mathbb{Y}) - M_1^{\circ}(\widehat{Z}, \widehat{\Psi})_{\mathbb{Y}} = \widehat{\mathbf{F}}(\widehat{\Psi}) \quad \forall \widehat{\Psi} \in H_0^1(\mathbb{Y})^3, \quad (42)$$

где образы Фурье снабжены значком $\widehat{}$, а полуторалинейная форма имеет вид

$$\widehat{E}_{\mathfrak{z}}(\widehat{Z}, \widehat{\Psi}; \mathbb{Y}) = \mu(\nabla_{\eta} \widehat{Z}, \nabla_{\eta} \widehat{\Psi})_{\mathbb{Y}} + \mu \mathfrak{z}^2 (\widehat{Z}, \widehat{\Psi})_{\mathbb{Y}} + (\lambda + \mu)(\nabla_{\eta} \widehat{Z}', + i \mathfrak{z} \widehat{Z}_3, \nabla_{\eta} \widehat{\Psi}' + i \mathfrak{z} \widehat{\Psi}_3)_{\mathbb{Y}}, \quad (43)$$

причем i — мнимая единица и черта указывает на комплексное сопряжение. Интегральное тождество (12) порождает полиномиальный пучок

$$\mathbb{C} \ni \mathfrak{z} \mapsto (\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) : H_0^1(\mathbb{Y})^3 \rightarrow (H_0^1(\mathbb{Y})^3)^*). \quad (44)$$

К сожалению, по причине отсутствия компактности вложения $H^1(\mathbb{Y}) \subset L^2(\mathbb{Y})$ (область \mathbb{Y} неограниченна) невозможно применить привычную схему исследования эллиптических краевых задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность, использующую оценки [29] решений в соболевских

нормах, зависящих от параметра, и аналитическую альтернативу Фредгольма [20, гл. 1, теорема 5.1]. Впрочем, для конкретной задачи (42) без особого труда находим следующие их заменители.

1°. При $\mathfrak{z} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ обратим, так как форма (43) положительно определена.

2°. Существует такое $\mathfrak{k} > 0$, что при $\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ и $|\mathfrak{y}| < \mathfrak{k}|\mathfrak{x}|$ оператор $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ обратим, так как оказывается малым возмущением оператора $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$.

3°. В силу вычислений из разд. 4 (центральные момент — теорема 3) у пучка (44) в точке $\mathfrak{z} = 0$ есть одна (непродолжимая) жорданова цепочка длиной два, состоящая из собственного $\mathbf{u}^0 = e_{(3)}w_1^\circ$ и присоединенного $\mathbf{u}^1 = -iW$ векторов. Кроме того, в силу абстрактных результатов [31] и [32, гл. 9] существует такой радиус $\mathfrak{r} > 0$, что проколота окрестность $\{\mathfrak{z} \in \mathbb{C} : 0 < |\mathfrak{z}| < \mathfrak{r}\}$ свободна от спектра пучка $\mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{A}(\mathfrak{z})$.

В итоге находим такую величину $\mathfrak{h} > 0$, что в полосе $\varpi(\mathfrak{h}) = \{\mathfrak{z} \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \mathfrak{z}| < \mathfrak{h}\}$ резольвента $\mathfrak{A}(\cdot)^{-1}$ — абстрактная голоморфная функция с единственным полюсом в точке $\mathfrak{z} = 0$ (второго порядка). Теперь повторим буквально все рассуждения теории Кондратьева. Именно, предположим, что правая часть \mathbf{F} интегрального тождества (41) — функционал на обоих пространствах $\mathfrak{W}_{0,\pm\mathfrak{h}}^1(\Xi)^3$, полученных пополнением линейала $C_c^\infty(\mathbb{Y} \times \mathbb{R})^3$ по экспоненциальным весовым соболевским нормам

$$\|\Psi; \mathfrak{W}_{0,\pm\mathfrak{h}}^1(\Xi)\| = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\pm 2b\zeta} (\|\Psi(\cdot, \zeta); H^1(\mathbb{Y})\|^2 + \|\partial_\zeta \Psi(\cdot, \zeta); L^2(\mathbb{Y})\|^2) d\zeta \right)^{1/2}.$$

Тогда преобразование Фурье задает аналитическую функцию $\widehat{\mathbf{F}}$ в полосе $\varpi(\mathfrak{h})$. Зафиксируем весовой показатель $\mathfrak{b} \in (0, \mathfrak{h})$. Обратные преобразования Фурье функции $\mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{A}(\mathfrak{z})^{-1} \widehat{\mathbf{F}}(\cdot; \mathfrak{z})$ вдоль прямых $\mathfrak{L}_{\pm\mathfrak{b}} = \{\mathfrak{z} \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \mathfrak{z} = \pm\mathfrak{b}\}$ предоставляет два решения $Z^\pm \in \mathfrak{W}_{0,\pm\mathfrak{h}}^1(\Xi)^3$ задачи (41), а теорема Коши о вычетах — их связь

$$Z^-(\xi) = C_0 e_{(3)} w_1^\circ(\eta) + C_1 (\zeta e_{(3)} w_1^\circ(\eta) + W(\eta)) + Z^+(\xi). \quad (45)$$

Вернемся к рассмотрению задачи (39) на полуцилиндре Ξ_+ с правой частью (40), порожденной вектор-функцией G , равной нулю при $\zeta > 1$, — это свойство достигается разрешенным умножением на срезку $\chi_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$, для которой $\chi_1(\zeta) = 1$ при $\zeta < 1/2$ и $\chi_1(\zeta) = 0$ при $\zeta > 1$. Теперь умножим само решение $Z^\sharp \in \mathbf{H}_0^1(\Xi)^3$ на $1 - \chi_1$ и придем к интегральному тождеству (41) с функционалом \mathbf{F} , имеющим носитель на множестве $\overline{\mathbb{Y}} \times [0, 1]$. Вектор-функция $Z^- = (1 - \chi_1)Z^\sharp$, продолженная нулем на $\Xi_- = \mathbb{Y} \times (-\infty, 0)$, принадлежит пространству $\mathfrak{W}_{0,-\mathfrak{b}}^1(\Xi)^3$ (заменили степенной вес $(1 + \zeta)^{-1}$ экспоненциальным $e^{-b\zeta}$) и допускает представление (45), которое сузим на полуцилиндр Ξ_+ . Слагаемое $C_0 e_{(3)} w_1^\circ$ попадает в пространство $\mathbf{H}_0^1(\Xi_+; \partial\mathbb{Y} \times \mathbb{R}_+)^3$, а слагаемое $C_1 (\zeta e_{(3)} w_1^\circ + W)$ — только при $C_1 = 0$. Уточним полученный результат.

Теорема 4. *Существует такой показатель $\beta > 0$, что в случае $e^{\beta(1+|\eta|^2)^{1/2}} G \in H_0^1(\mathbb{Y})^3$ решение $Z \in \mathbf{H}_0^1(\Xi_+; \partial\mathbb{Y} \times \mathbb{R}_+)^3$ задачи (36) допускает представление*

$$Z(\xi) = C(G) e_{(3)} w_1^\circ(\eta) + \widetilde{Z}(\xi),$$

причем модуль коэффициента $C(G) \in \mathbb{R}$ и норма $\|e^{\beta(1+|\xi|^2)^{1/2}} \widetilde{Z}; H^1(\Xi_+)\|$ остатка $\widetilde{Z}(\xi)$, исчезающего на бесконечности с экспоненциальной скоростью, не превосходят $c \|e^{\beta(1+|\eta|^2)^{1/2}} G; H^1(\mathbb{Y})\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Осталось убедиться в экспоненциальном затухании остатка $\tilde{Z}(\eta, \zeta)$ при $|\eta| \rightarrow +\infty$. Для этого достаточно заметить, что компоненты w_1^\odot и W_1, W_2 собственного и присоединенного векторов принадлежат пространству $\mathfrak{W}_{\vartheta,0}^1(\mathbb{Y})$ с весовой нормой $\|\Psi; \mathfrak{W}_{\vartheta,0}^1(\mathbb{Y})\| = \|e^{\vartheta(1+|\eta|^2)^{1/2}} \Psi; H^1(\mathbb{Y})\|$. Таким образом, в определении пучка (44) пространство Соболева $H_0^1(\mathbb{Y})$ можно заменить пространством Кондратьева $\mathfrak{W}_{\vartheta,0}^1(\mathbb{Y})$ при сохранении основных свойств пучка. При этом задачу следует интерпретировать как обыкновенное дифференциальное уравнение с операторными коэффициентами в банаховом или гильбертовом пространстве (см. [33–35] и др.). Теорема 4 доказана.

В разд. 6 будет использовано следствие теоремы 4: существует постоянная $C_W \in \mathbb{R}$, при которой решение $Z^W(\xi)$ задачи (36) с правой частью $G(\eta, 0) = W(\eta) - C_W e_{(3)} w_1^\odot(\eta)$ исчезает на бесконечности с экспоненциальной скоростью.

6. Обоснование асимптотики некоторых собственных чисел. В пространстве Соболева $\mathcal{H}^h(\theta) = H_{0,\theta}^1(\bowtie_H^h)^3$ введем новое скалярное произведение

$$\langle U^h(\cdot; \theta), \Psi^h(\cdot; \theta) \rangle = E(U^h(\cdot; \theta), \Psi^h(\cdot; \theta); \bowtie_H^h) \quad (46)$$

и определим положительно определенный, непрерывный и симметричный, а значит, самосопряженный оператор $\mathcal{S}^h(\theta)$ при помощи тождества

$$\langle \mathcal{S}^h(\theta) U^h(\cdot; \theta), \Psi^h(\cdot; \theta) \rangle = (U^h(\cdot; \theta), \Psi^h(\cdot; \theta))_{\bowtie_H^h} \quad \forall U^h(\cdot; \theta), \Psi^h(\cdot; \theta) \in \mathcal{H}^h(\theta). \quad (47)$$

Поскольку ячейка \bowtie_H^h ограничена, этот оператор компактный, т. е. согласно общим результатам [20, теоремы 10.1.5 и 10.2.2] его существенный спектр состоит из единственной точки $\tau = 0$, а дискретный спектр образует монотонную положительную бесконечно малую последовательность (нормальных) собственных чисел, составленную при учете их (конечных) кратностей,

$$\tau_1^h(\theta) \geq \tau_2^h(\theta) \geq \tau_3^h(\theta) \geq \dots \geq \tau_k^h(\theta) \geq \dots \rightarrow +0. \quad (48)$$

При этом вариационная задача (12) превращается в абстрактное уравнение

$$\mathcal{S}^h(\theta) \mathcal{U}^h(\theta) = \tau^h \mathcal{U}^h(\theta) \in \mathcal{H}^h(\theta)$$

с новым спектральным параметром

$$\tau^h(\theta) = \Lambda^h(\theta)^{-1}. \quad (49)$$

Связь (49) переопределяет последовательность (48) в последовательность (5).

Следующее утверждение известно как лемма о «почти собственных» числах и векторах (см. первоисточник [36]) и основано на спектральном разложении резольвенты оператора $\mathcal{S}^h(\theta)$ (см., например, [20, гл. 6]).

Лемма 2. *Зафиксируем какой-нибудь параметр Флоке $\theta \in [0, 2\pi]^2$. Пусть $\mathbf{U}^h(\theta) \in \mathcal{H}^h(\theta)$ и $\mathbf{t}^h(\theta) \in \mathbb{R}_+$ таковы, что*

$$\|\mathbf{U}^h(\theta); \mathcal{H}^h(\theta)\| = 1, \quad \|\mathcal{S}^h(\theta) \mathbf{U}^h(\theta) - \mathbf{t}^h(\theta) \mathbf{U}^h(\theta); \mathcal{H}^h(\theta)\| =: \delta^h(\theta) \in (0, \mathbf{t}^h(\theta)). \quad (50)$$

Тогда есть собственное число $\tau_{\mathbf{n}^h(\theta)}^h$ оператора $\mathcal{S}^h(\theta)$, подчиненное оценке

$$|\tau_{\mathbf{n}^h(\theta)}^h - \mathbf{t}^h(\theta)| \leq \delta^h(\theta).$$

Более того, при любом $\delta_*^h(\theta) \in (\delta^h(\theta), \mathbf{t}^h(\theta))$ найдется столбец коэффициентов

$$\mathbf{c}^h(\theta) = (\mathbf{c}_{\mathcal{N}^h(\theta)}^h, \dots, \mathbf{c}_{\mathcal{N}^h(\theta)+\mathcal{X}^h(\theta)-1}^h) \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}^h(\theta)},$$

для которого

$$\left\| \mathbf{U}^h(\theta) - \sum_{j=\mathcal{N}^h(\theta)}^{\mathcal{N}^h(\theta)+\mathcal{X}^h(\theta)-1} \mathbf{c}_j^h(\theta) \mathcal{U}_j^h(\theta); \mathcal{H}^h(\theta) \right\| \leq 2 \frac{\delta^h(\theta)}{\delta_*^h(\theta)}, \quad (51)$$

$$\sum_{j=\mathcal{N}^h(\theta)}^{\mathcal{N}^h(\theta)+\mathcal{X}^h(\theta)-1} |\mathbf{c}_j^h(\theta)|^2 = 1.$$

Здесь $\tau_{\mathcal{N}^h(\theta)}^h, \dots, \tau_{\mathcal{N}^h(\theta)+\mathcal{X}^h(\theta)-1}^h$ — набор всех собственных чисел оператора $\mathcal{F}^h(\theta)$ из замкнутого сегмента $[\mathbf{t}^h(\theta) - \delta_*^h(\theta), \mathbf{t}^h(\theta) + \delta_*^h(\theta)]$, а соответствующие собственные векторы $\mathcal{U}_{\mathcal{N}^h(\theta)}^h(\theta), \dots, \mathcal{U}_{\mathcal{N}^h(\theta)+\mathcal{X}^h(\theta)-1}^h(\theta)$ удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки

$$\langle \mathcal{U}_j^h(\theta), \mathcal{U}_k^h(\theta) \rangle = \delta_{j,k}. \quad (52)$$

В согласии с асимптотическим анализом из разд. 4 соорудим по собственной паре (35) предельной задачи (31), (32) следующие «почти собственные» число и вектор оператора $\mathcal{F}^h(\theta)$:

$$\mathbf{t}_{n\ell/\varphi}^h = h^2(M_1 + h^2\kappa_n)^{-1}, \quad (53)$$

$$\mathbf{U}_{n\ell/\varphi}^h(x) = \|\mathbf{v}_{n\ell/\varphi}^h; \mathcal{H}^h(\theta)\|^{-1} \mathbf{v}_{n\ell/\varphi}^h(x). \quad (54)$$

Отметим, что каждому индексу $n \in \mathbb{N}$ отвечают два (ℓ и φ) не зависящих от параметра Флоке экземпляра числа (53), а вектор-функции

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{n\ell/\varphi}^h(x) = & \chi_{\ell/\varphi}^h(y) (e_{(3)} w_1 (\eta^{\ell/\varphi}) v_n(z) + hW (\eta^{\ell/\varphi}) \partial_z v_n(z) + h^2 e_{(3)} V_3 (\eta^{\ell/\varphi}) v_n(z) \\ & + h(e_{(3)} w_1 (\eta^{\ell/\varphi}) \mathbf{v}_n(z) + hW (\eta^{\ell/\varphi}) \partial_z \mathbf{v}_n(z)) - \chi_H(z) \partial_z v_n(0) Z^W (\xi_{\ell/\varphi}^0) \\ & - \chi_H(H-z) \partial_z v_n(H) Z^W (\xi_{\ell/\varphi}^H) \end{aligned}$$

локализованы на треногах $\mathbf{Y}_{H\ell}^h$ и $\mathbf{Y}_{H\varphi}^h$ благодаря определению срезов (26). Кроме того, $\{M_1; w_1\}$ — собственная пара задачи (19), вектор $W = (W', 0)$ включает решение задачи (29), а компонента $V_3(\eta^{\ell/\varphi})v_n(z)$ находится в результате решения задачи (30), из правой части которой при помощи уравнения (31) устранена вторая производная $\partial_z^2 v_n(z)$. Наконец, $\xi_{\ell/\varphi}^{0/H}$ и Z^W — растянутые координаты и специальное решение задачи (36), введенные соответственно в начале и конце разд. 5, а \mathbf{v}_n — любая гладкая функция,

$$\mathbf{v}_n(z) = -\partial_z v_n(0) \text{ при } z \in (0, H/3) \text{ и } \mathbf{v}_n(z) = -\partial_z v_n(H) \text{ при } z \in (2H/3, H).$$

Согласно краевым условиям для Z^W и v_n , введению срезки $\chi_H \in C_c^\infty[0, H]$, для которой $\chi_H(z) = 1$ вблизи точки $z = 0$, а также равенствам $\partial_z \mathbf{v}_n(0) = \partial_z \mathbf{v}_n(H) = 0$ и конструкциям из разд. 4 вектор-функция $\mathbf{v}_{n\ell/\varphi}^h$ удовлетворяет условию Дирихле (7), а значит, ввиду присутствия срезки $\chi_{\ell/\varphi}^h$ выполнено включение $\mathbf{v}_{n\ell/\varphi}^h \in \mathcal{H}^h(\theta)$ при любом $\theta \in [0, 2\pi]$.

Обработаем величину $\delta_{n\ell/\varphi}^h(\theta)$ из формулы (50), найденную по паре (53), (54). Из определений (46) и (47) вытекает цепочка равенств

$$\begin{aligned} \delta_{n\ell/\varphi}^h(\theta) &= \sup |\langle \mathcal{T}^h(\theta) \mathbf{U}_{n\ell/\varphi}^h - \mathbf{t}_{n\ell/\varphi}^h \mathbf{U}_{n\ell/\varphi}^h, \psi^h(\cdot; \theta) \rangle| \\ &= \|\mathbf{v}_{n\ell/\varphi}^h; \mathcal{H}^h(\theta)\|^{-1} \mathbf{t}_{n\ell/\varphi}^h \sup |E(\mathbf{v}_{n\ell/\varphi}^h, \psi^h(\cdot; \theta); \boxtimes_H^h) \\ &\quad - (h^{-2}M_1 + \kappa_n)(\mathbf{v}_{n\ell/\varphi}^h, \psi^h(\cdot; \theta))_{\boxtimes_H^h}| \\ &= \|\mathbf{v}_{n\ell/\varphi}^h; \mathcal{H}^h(\theta)\|^{-1} \mathbf{t}_{n\ell/\varphi}^h \sup |((L(\nabla_x) - h^{-2}M_1 - \kappa_n)\mathbf{v}_{n\ell/\varphi}^h, \psi^h(\cdot; \theta))_{\boxtimes_H^h}|. \end{aligned} \quad (55)$$

Супремум вычисляется по единичному шару в пространстве $\mathcal{H}^h(\theta)$, т. е. в силу неравенства Фридрикса на тонкостенной конструкции \boxtimes_H^h выполнено соотношение

$$\begin{aligned} 1 &\geq \|\psi^h(\cdot; \theta); \mathcal{H}^h(\theta)\|^2 \geq \mu \|\nabla_x \psi^h(\cdot; \theta); L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 \\ &\geq c_{\boxtimes} \mu h^{-2} \|\psi^h(\cdot; \theta); L^2(\boxtimes_H^h)\|^2, \quad c_{\boxtimes} > 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Для укорочения формул индексы n , ℓ/φ и аргумент θ не пишем. Имеем

$$\begin{aligned} (L(\nabla_x) - h^{-2}M_1 - \kappa)\mathbf{v}^h &= [L(\nabla_x), \chi](e_{(3)}w_1v + hW\partial_zv + h^2e_{(3)}V_3v) \\ &\quad - h^{-2}\chi v e_{(3)}(\mu\Delta_\eta + M_1)w_1 + h^{-1}\chi\partial_zv((L'(\nabla_\eta) - M_1)W' - (\lambda + \mu)\nabla_\eta w_1, 0) \\ &\quad - h^0\chi e_{(3)}((\mu\Delta_\eta + M_1)V_3v + \kappa w_1v + (\lambda + 2\mu)w_1\partial_z^2v + (\lambda + \mu)\nabla_\eta \cdot W'\partial_z^2v) \\ &\quad - h^1\chi(\mu W'\partial_z^3v + \kappa W'\partial_zv + (\lambda + \mu)\nabla_\eta V_3\partial_zv, 0) - h^2\chi e_{(3)}((\lambda + 2\mu)V_3\partial_z^2v + \kappa V_3v) \\ &\quad + h(L(\nabla_x) - h^{-2}M_1 - \kappa)(e_{(3)}w_1\mathbf{v} + hW)\partial_z\mathbf{v} \\ &\quad - h \sum_{G=0,H} \partial_zv(G)(L(\nabla_x) - h^{-2}M_1 - \kappa)(\chi_H(\cdot^G)Z^W(\cdot^G)) =: \sum_{l=1}^8 I_l^h. \end{aligned} \quad (57)$$

Напомним, что у векторных множителей при степенях параметра h с четными показателями равна нулю третья компонента, а с нечетными показателями — первые две. Построения из разд. 4 показывают, что $I_2^h = I_3^h = I_4^h = 0$. Кроме того,

$$|(I_1^h, \psi^h)_{\boxtimes_H^h}| \leq c_1 h^{-q} e^{-\gamma\sqrt{\pi^2 - \mu^{-1}M_1}/h}.$$

Здесь учтено неравенство (56) для пробной функции ψ^h , экспоненциальное затухание функций w_1 , W_j и V_3 на бесконечности в треноге \mathbb{Y} , а также расположение носителей производных срезки (26). Аналогичные соображения обеспечивают при $p = 5, 6$ оценки

$$\begin{aligned} |(I_p^h, \psi^h)_{\boxtimes_H^h}| &\leq c_p h \left(\int_{\boxtimes_H^h} \left\{ 1 + |\eta|^4 + \sum_{\alpha=0,\pm} \rho_\alpha^{2(\phi-1)} \right\} e^{-2\sqrt{\pi^2 - \mu^{-1}M_1}|\eta|} dx \right)^{1/2} \\ &\quad \times \|\psi^h; L^2(\boxtimes_H^h)\| \leq C_p h^3. \end{aligned}$$

Дополнительный весовой множитель, выделенный фигурными скобками, возник по причине искажения представлений (21) и (22) для функций W_1 , W_2 и V_3 на бесконечности, упомянутого в разд. 3 перед теоремой 2. Он, разумеется, не влияет на сходимость интеграла по ячейке \boxtimes_H^h , который приобретает порядок h^2 ввиду быстрого экспоненциального затухания подинтегрального выражения. Наконец, верны оценки

$$|(I_7^h, \psi^h)_{\boxtimes_H^h}| \leq c_p h^3 \quad \text{и} \quad |(I_8^h, \psi^h)_{\boxtimes_H^h}| \leq c_p h^{7/2}.$$

Первая выполнена согласно построениям из разд. 4, в силу которых после применения оператора $L(\nabla_x) - M_1^\odot$ остается вектор-функция, зависящая полиномиально от h и гладко от z , а также исчезающая с экспоненциальной скоростью при $|\eta| \rightarrow +\infty$, а вторая — по причине экспоненциального затухания на бесконечности решения Z^W задачи (36) в трехмерной области Ξ : коммутирование со срезкой χ_H дает вклад $O(h e^{-\beta H/3h})$, а умножение на κ — вклад $O(h h^{3/2} h)$.

При учете нормировок собственных функций w_1 и v_n выводим еще и соотношение

$$\|\mathbf{v}^h; \mathcal{H}^h\|^2 = \|\nabla_\eta w_1; L^2(\mathbb{Y})\|^2 \|v_n; L^2(0, H)\|^2 + O(h) = M_1 + O(h).$$

Таким образом, $\|\mathbf{v}^h; \mathcal{H}^h\| \geq M_1^{1/2}/2$ при малом h . Вспомним порядок h^2 еще одного сомножителя (53) в последнем выражении для величина (55). В итоге обнаруживаем, что эта величина удовлетворяет неравенству

$$\delta_{n\ell/\varphi}^h(\theta) \leq c_n h^5.$$

Теперь лемма 2 предоставляет собственные числа $\tau_{N_{n,\ell/\varphi}^h}^h(\theta)$ оператора $\mathcal{F}^h(\theta)$ и $\Lambda_{N_{n,\ell/\varphi}^h}^h(\theta) = \tau_{N_{n,\ell/\varphi}^h}^h(\theta)^{-1}$ задачи (6)–(8), подчиненные неравенствам

$$\begin{aligned} |\tau_{N_{n,\ell/\varphi}^h}^h(\theta) - \mathbf{t}_{n,\ell/\varphi}^h(\theta)| &\leq c_n h^5 \\ \Rightarrow |\Lambda_{N_{n,\ell/\varphi}^h}^h(\theta) - h^{-2}M_1 - \kappa_n| &\leq c_n h^3 (M_1 + h^2 \kappa_n) \Lambda_{N_{n,\ell/\varphi}^h}^h(\theta). \end{aligned} \quad (58)$$

Последняя оценка гарантирует, что

$$\frac{1}{2} \Lambda_{N_{n,\ell/\varphi}^h}^h(\theta) \leq h^{-2}M_1 + \kappa_n$$

при $c_n h^3 (M_1 + h^2 \kappa_n) \leq \frac{1}{2}$. В результате превращаем неравенство (58) в такое:

$$|\Lambda_{N_{n,\ell/\varphi}^h}^h(\theta) - h^{-2}M_1 - \kappa_n| \leq 2c_n h (M_1 + h^2 \kappa_n)^2. \quad (59)$$

Сформулируем финальное утверждение, доказательство которого будет закончено в очередном разделе.

Теорема 5. Для любого $k \in \mathbb{N}$ найдутся такие положительные величины h_k и C_k , что при $h \in (0, h_k]$ и любом $\theta \in [0, 2\pi]^2$ для членов $\Lambda_{2k-1}^h(\theta)$ и $\Lambda_{2k}^h(\theta)$ последовательности (5) собственных чисел задачи (6)–(8) выполнено неравенство

$$|\Lambda_q^h(\theta) - h^{-2}M_1 - \kappa_k| \leq C_k h \quad \text{при } q = 2k - 1, 2k. \quad (60)$$

7. Утверждение о сходимости и доказательство теоремы 5. Сначала убедимся в том, что найдется два (ℓ и φ) разных собственных числа, удовлетворяющих соотношению (59) — воспользуемся второй частью леммы 2. Введем какой-либо множитель $\varrho > 1$ в формулу

$$\delta_{*n\ell/\varphi}^h(\theta) = \varrho \delta_{n\ell/\varphi}^h(\theta). \quad (61)$$

Через $\mathbf{c}_{(n\ell/\varphi)}^h \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}_n^h(\theta)}$ и $\mathbf{S}_{n\ell/\varphi}^h \in \mathcal{H}^h(\theta)$ обозначим пары столбцов и линейных комбинаций собственных векторов оператора $\mathcal{F}^h(\theta)$, предоставленные формулой (51). Условия ортогональности и нормировки (52) показывают, что

$$\begin{aligned} |(\mathbf{c}_{(n\ell)}^h, \mathbf{c}_{(n\varphi)}^h)_{\mathbb{R}^{\mathcal{X}_n^h(\theta)}}| &= |\langle \mathbf{S}_{n\ell}^h, \mathbf{S}_{n\varphi}^h \rangle| \leq |\langle \mathbf{S}_{n\ell}^h - \mathbf{U}_{n\ell}^h, \mathbf{S}_{n\varphi}^h \rangle_\varepsilon| \\ &+ |\langle \mathbf{U}_{n\ell}^h, \mathbf{S}_{n\varphi}^h - \mathbf{U}_{n\varphi}^h \rangle| + |\langle \mathbf{U}_{n\ell}^h, \mathbf{U}_{n\varphi}^h \rangle| \leq 2\rho^{-1} + 2\rho^{-1} + 0. \end{aligned}$$

Последний нуль возник потому, что носители вектор-функций $\mathbf{U}_{n\ell}^h$ и $\mathbf{U}_{n\wp}^h$ не пересекаются (см. определение срезок (26)). При большом ϱ столбцы $\mathbf{c}_{(n\ell)}^h$ и $\mathbf{c}_{(n\wp)}^h$ «почти ортогональны», что возможно только в случае $\mathcal{X}_n^h(\theta) \geq 2$. Зафиксируем подходящий множитель ϱ в формуле (61).

Итак, оценка (59) с увеличенной в ϱ раз мажорантой (несущественное ее изменение) выполнена по крайней мере для двух членов последовательности (5). Теперь проверим, что такой оценке удовлетворяют только собственные числа $\Lambda_{2n-1}^h(\theta)$ и $\Lambda_{2n}^h(\theta)$.

Заметим, что по доказанному к настоящему моменту верны неравенства

$$\begin{aligned} \Lambda_{2n-1}^h(\theta) \leq \Lambda_{2n}^h(\theta) &\leq \max_{\ell, \wp} \{ \Lambda_{N_{n\ell/\wp}^n}^h(\theta) \} \\ &\leq h^{-2}M_1 + \kappa_n + 2\varrho c_n h (M_1 + h^2 \kappa_n)^2 \leq h^{-2}M_1 + C_n. \end{aligned} \quad (62)$$

Таким образом, для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $\theta \in [0, 2\pi]^2$ найдется положительная бесконечно малая последовательность $\{h_m^{(n)}(\theta)\}_{m \in \mathbb{N}}$, вдоль которой имеют место сходимости (индекс n и аргумент θ по обычаю не пишем)

$$\Lambda_q^h - h^{-2}M_1 \rightarrow \widehat{\kappa}_q \text{ при } h \rightarrow +0, \quad \text{где } q = 2n - 1, 2n. \quad (63)$$

Определим следующие функции переменной $z \in (0, H)$ и вектор-функции переменных $(\eta^{\ell/\wp}, z) \in \mathbb{Y} \times (0, H)$:

$$W_{q3}^{h\ell/\wp}(z; \theta) = h \int_{\mathbb{Y}} w_1(\eta) \chi_{\ell/\wp}(y) U_{(q)3}^h(y^{\ell/\wp} \pm h\eta^{\ell/\wp}, z) d\eta^{\ell/\wp}, \quad (64)$$

$$W_{(q)\perp}^{h\ell/\wp}(\eta^{\ell/\wp}, z; \theta) = h \chi_{\ell/\wp}(y) U_{(q)}^h(y^{\ell/\wp} \pm h\eta^{\ell/\wp}, z; \theta) - e_{(3)} w_1(\eta^{\ell/\wp}) W_{q3}^{h\ell/\wp}(z; \theta). \quad (65)$$

Здесь $\chi_{\ell/\wp}$ — срезки (26), $U_{(q)}^h$ — нормированная в пространстве $L^2(\bowtie_H^h \times (0, H))^3$ собственная вектор-функция задачи (6)–(8), а знаки плюс и минус отвечают индексам ℓ и \wp соответственно. Далее аргумент θ не пишем. Понятно, что выполнены краевые условия

$$W_{q3}^{h\ell/\wp}(0) = W_{q3}^{h\ell/\wp}(H) = 0. \quad (66)$$

Благодаря весовой оценке (15) и ограничению (26) несложные преобразования, порождающие экспоненциально малые погрешности, превращают интегральное тождество (12), в котором фигурируют пара $\{\Lambda_q^h; U_{(q)}^h\}$ и пробная вектор-функция $\Psi^h = \chi_{\ell/\wp}^2 U_{(q)}^h$, в соотношение

$$\begin{aligned} &\mu \|\partial_z(\chi_{\ell/\wp} U_{(q)}^h); L^2(\bowtie_H^h)\|^2 \\ &\leq \Lambda_q^h \|\chi_{\ell/\wp} U_{(q)}^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 - \mu \|\nabla_y(\chi_{\ell/\wp} U_{(q)}^h); L^2(\bowtie_H^h)\|^2 + c_q e^{-\beta_q/h} \\ &\leq (\Lambda_q^h - M_1 h^{-2}) \|\chi_{\ell/\wp} U_{(q)}^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 + c_q e^{-\beta_q/h} \\ &\leq C_q \|U_{(q)}^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2 + c_q e^{-\beta_q/h} \leq \mathbf{C}_q. \end{aligned} \quad (67)$$

Величины $c_q e^{-\beta_q/h}$ учитывают невязки, возникающие вследствие коммутирования градиент-оператора ∇_x со срезками $\chi_{\ell/\wp}$, неотрицательное слагаемое $(\lambda + \mu) \|\nabla_y \cdot (\chi_{\ell/\wp} U_{(q)}^h); L^2(\bowtie_H^h)\|^2$ из квазиэнергии (11) отброшено за ненужностью, а в конце цепочки использовано первое неравенство в списке (25).

Вектор-функция (65) при всех $z \in (0, H)$ удовлетворяет условию ортогональности

$$(W_{(q)\perp 3}^{h\ell/\varphi}, w_1)_{\mathbb{Y}} = 0, \quad (68)$$

а значит, из второго и третьего неравенств (25) вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_0^H \|\nabla_{\eta} W_{(q)\perp 3}^{h\ell/\varphi}(\cdot; z); L^2(\mathbb{Y})\|^2 dz &\geq \pi^2 \int_0^H \|\nabla_{\eta} W_{(q)\perp 3}^{h\ell/\varphi}(\cdot; z); L^2(\mathbb{Y})\|^2 dz, \\ \int_0^H (\mu \|\nabla_{\eta} W_{(q)\perp}^{h\ell/\varphi'}(\cdot; z); L^2(\mathbb{Y})\|^2 + (\lambda + \mu) \|\nabla_{\eta} \cdot W_{(q)\perp}^{h\ell/\varphi'}(\cdot; z); L^2(\mathbb{Y})\|^2) dz \\ &\geq (M_1 + d_{\mathbb{Y}}) \int_0^H \|W_{(q)\perp}^{h\ell/\varphi'}(\cdot; z); L^2(\mathbb{Y})\|^2 dz. \end{aligned} \quad (69)$$

Напомним, что $d_{\mathbb{Y}} > 0$. По той же причине (68) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\boxtimes_H^h} |\chi_{\ell/\varphi}(y) U_{(q)}^h(x)|^2 dx &= h^2 \int_0^H \int_{\mathbb{Y}} |\chi_{\ell/\varphi}(y) U_{(q)}^h(x)|^2 d\eta dz \\ &= \int_0^H |W_{q3}^{h\ell/\varphi}(z)|^2 dz + \int_0^H \|W_{(q)\perp}^{h\ell/\varphi}(\cdot, z); L^2(\mathbb{Y})\|^2 dz, \\ \mu h^2 \int_0^H \int_{\mathbb{Y}} |\chi_{\ell/\varphi}(y) \partial_z U_{(q)}^h(x)|^2 d\eta dz \\ &= \mu \int_0^H |\partial_z W_{q3}^{h\ell/\varphi}(z)|^2 dz + \mu \int_0^H \|\partial_z W_{(q)\perp}^{h\ell/\varphi}(\cdot, z); L^2(\mathbb{Y})\|^2 dz, \quad (70) \\ \mu h^2 \int_0^H \int_{\mathbb{Y}} |\nabla_y (\chi_{\ell/\varphi}(y) U_{(q)3}^h(x))|^2 d\eta dz &= \mu \int_{\mathbb{Y}} |\nabla_{\eta} w_1(\eta)|^2 d\eta \int_0^H |W_{q3}^{h\ell/\varphi}(z)|^2 dz \\ + \mu \int_0^H \int_{\mathbb{Y}} |\nabla_{\eta} W_{(q)\perp 3}^{h\ell/\varphi}(\eta, z)|^2 d\eta dz + 2\mu \int_0^H \int_{\mathbb{Y}} W_{q3}^{h\ell/\varphi}(z) \nabla_{\eta} w_1(\eta) \cdot \nabla_{\eta} W_{(q)\perp 3}^{h\ell/\varphi}(\eta, z) d\eta dz \\ &= M_1 \|W_{q3}^{h\ell/\varphi}; L^2(0, H)\|^2 + \|\nabla_{\eta} W_{(q)\perp 3}^{h\ell/\varphi}; L^2(\mathbb{Y} \times (0, H))\|^2. \end{aligned}$$

Последний интеграл обратили в нуль при помощи интегрирования по частям, формулы $-\Delta_{\eta} w_1 = M_1 w_1$ и условия ортогональности (68).

Из неравенств (70), (67) и соотношений (9), (66) вытекает, что вдоль разреженной последовательности $\{h_m^{(n)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ (сохраняем то же обозначение, что и в (63)) имеет место сходимость

$$W_{q3}^{h\ell/\varphi} \rightarrow \widehat{v}_q^{\ell/\varphi} \quad \text{слабо в } H_0^1(0, H) \quad \text{и сильно в } L^2(0, H). \quad (71)$$

С целью проверить предельный переход для вектор-функции (65)

$$W_{(q)\perp}^{h\ell/\varphi} \rightarrow 0 \quad \text{сильно в } L^2(\mathbb{Y} \times (0, H))^3 \quad (72)$$

придадим уже использованному в формуле (67) интегральному тождеству такой вид:

$$\begin{aligned} & \mu \|\nabla_y (\chi_{\ell/\varphi} U_{(q)}^{h'}); L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 + (\lambda + \mu) \|\nabla_y \cdot (\chi_{\ell/\varphi} U_{(q)}^{h'}) + \chi_{\ell/\varphi} \partial_z U_{(q)3}^h; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 \\ & - \Lambda_q^h \|\chi_{\ell/\varphi} U_{(q)}^{h'}; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 + \mu \|\nabla_y (\chi_{\ell/\varphi} U_{(q)3}^h); L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 - \Lambda_q^h \|\chi_{\ell/\varphi} U_{(q)3}^h; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 \\ & \leq -\mu \|\chi_{\ell/\varphi} \partial_z U_{(q)}^h; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 + c_q e^{-\beta_q/h} \leq c_q. \end{aligned}$$

В силу простого алгебраического соотношения $(a+b)^2 \geq (1-\varepsilon)a^2 - (\varepsilon^{-1}-1)b^2$ с произвольным $\varepsilon > 0$, неравенств (69) и первой формулы (70) выводим, что левая часть превосходит величину

$$\begin{aligned} 0 & \geq \mu \|\nabla_y (\chi_{\ell/\varphi} U_{(q)}^{h'}); L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 + (1-\varepsilon)(\lambda + \mu) \|\nabla_y \cdot (\chi_{\ell/\varphi} U_{(q)}^{h'}); L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 \\ & \quad - \Lambda_q^h \|\chi_{\ell/\varphi} U_{(q)}^{h'}; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 - (\varepsilon^{-1}-1)(\lambda + \mu) \|\chi_{\ell/\varphi} \partial_z U_{(q)3}^h; L^2(\boxtimes_H^h)\|^2 \\ & + (M_1 h^{-2} - \Lambda_q^h) \|W_{(q)3}^{h\ell/\varphi}; L^2(0, H)\|^2 + (\mu\pi^2 h^{-2} - \Lambda_q^h) \|W_{(q)\perp 3}^{h\ell/\varphi}; L^2(\mathbb{Y} \times (0, H))\|^2 \\ & \geq \frac{1-\varepsilon}{h^2} \int_0^H E'(W_{(q)\perp}^{h\ell/\varphi'}(\cdot, z), W_{(q)\perp}^{h\ell/\varphi'}(\cdot, z); \mathbb{Y}) dz \\ & \quad - \Lambda_q^h \int_0^H \|W_{(q)\perp}^{h\ell/\varphi'}(\cdot, z); L^2(\mathbb{Y})\|^2 dz - C_q \|W_{(q)3}^{h\ell/\varphi}; L^2(0, H)\|^2 \\ & + \left(\frac{\mu\pi^2 - M_1}{h^2} - C_q \right) \|W_{(q)\perp 3}^{h\ell/\varphi}; L^2(\mathbb{Y} \times (0, H))\|^2 - \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) (\lambda + \mu) C_q \\ & \geq \frac{1}{h^2} \int_0^H (\{(M_1 + d_{\mathbb{Y}})(1-\varepsilon) - h^2 \Lambda_q^h\} \|W_{(q)\perp}^{h\ell/\varphi'}(\cdot, z); L^2(\mathbb{Y})\|^2 \\ & + \{\mu\pi^2 - M_1 - C_q h^2\} \|W_{(q)\perp 3}^{h\ell/\varphi'}(\cdot, z); L^2(\mathbb{Y})\|^2) dz - C_q - (\varepsilon^{-1} - 1)(\lambda + \mu) C_q. \end{aligned}$$

В силу ограничения (62) число $\varepsilon > 0$ можно выбрать так, чтобы первый коэффициент, выделенный фигурными скобками, стал больше $c_{\mathbb{Y}} > 0$ при $h \in (0, h_{\mathbb{Y}}]$ и некотором $h_{\mathbb{Y}} > 0$. Второй такой коэффициент положителен, поскольку $M_1 < \mu\pi^2$ (см. разд. 3). Следовательно, выполнено неравенство

$$\|W_{(q)\perp}^{h\ell/\varphi}; L^2(\mathbb{Y} \times (0, H))\|^2 \leq c'_q h^2,$$

влекущее за собой сходимость (72), причем предельный переход (71) и условие нормировки (9) собственной вектор-функции $U_{(q)}^h$ показывают, что

$$\|\widehat{v}_q^{\ell/\varphi}; L^2(0, H)\|^2 = 1. \quad (73)$$

Теперь возьмем какую-либо функцию $\varphi \in C_c^\infty(0, H)$ и в интегральное тождество (12) для пары $\{\Lambda_q^h; U_{(q)}^h\}$ подставим имитирующую асимптотический анзац (28) пробную вектор-функцию

$$\Psi^h(x) = h\chi_{\ell/\varphi}(y)(e_{(3)} w_1(\eta^{\ell/\varphi})\varphi(z) + hW(\eta^{\ell/\varphi})\partial_z\varphi(z) + h^2V(\eta^{\ell/\varphi}, z)),$$

В отличие от разд. 4 компонента V_3 последнего члена находится из задачи

$$\begin{aligned} & -\mu\Delta_\eta V_3(\eta; z) - M_1 V_3(\eta; z) \\ & = (\lambda + \mu)\nabla_\eta \cdot W'(\eta)\partial_z^2\varphi(z) + w_1(\eta)(\lambda + 2\mu - b)\partial_z^2\varphi(z), \quad \eta \in \mathbb{Y}, \\ & V_3(\eta; z) = 0, \quad \eta \in \partial\mathbb{Y}, \end{aligned}$$

В силу формулы (33) для коэффициента b такая задача имеет решение, но модификация анзаца имеет следующее последствие: в соответствии с проведенными в разд. 4 вычислениями упомянутое интегральное тождество переписывается в виде

$$\begin{aligned} 0 & = h(U_q^h, (L(\nabla_x) - \Lambda_q^h)(\chi_{\ell/\varphi}(e_{(3)})w_1\varphi + hW\partial_z\varphi + h^2V))_{\boxtimes_H^h} \\ & = h^{-1}(\chi_{\ell/\varphi}U_q^h, w_1(\partial_z^2\varphi + (\Lambda_q^h - h^{-2}M_1)\varphi))_{\boxtimes_H^h} + O(1). \end{aligned} \quad (74)$$

Согласно сходимостям (63) и (71), (72) предельный переход $h \rightarrow +0$ в формуле (74) превращает ее в соотношение

$$(\widehat{v}_q^{\ell/\varphi}, b\partial_z^2\varphi + \widehat{\beta}_q\varphi)_{(0,H)} = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, H).$$

Отсюда при учете равенства (73) выводим нужное утверждение.

Лемма 3. При ограничении (62) предельные переходы (63) и (71) дают собственную пару хотя бы одного из двух (ℓ и φ) экземпляров задачи (31), (32).

Теперь можно завершить проверку теоремы 5. Соотношение (62) обеспечивает неравенство $\max\{N_{n\ell/\varphi}^h(\theta)\} \geq 2n$. Если случилось, что один из индексов $N_{n\ell/\varphi}^h(\theta)$ строго больше $2n$ при каких-нибудь $\theta \in [0, 2\pi]^2$ и последовательности $\{h_n(\theta)\}_{n \in \mathbb{N}}$, стремящейся к $+0$, то на сегменте $\mathcal{J}_n^{h_n(\theta)} := [0, h_n(\theta)^{-2}M_1 + k_n + C_k h_n(\theta)]$ найдется собственное число $\Lambda_{\#}^{h_n(\theta)}$ (как обычно, индекс n и аргумент θ далее не пишем), у которого собственная вектор-функция $U_{(\#)}^h$ ортогональна в $L^2(\boxtimes_H^h)$ не менее $2n$ собственным вектор-функциям той же задачи (6)–(8), отличающимся от $U_{(\#)}^h$, но отвечающим собственным числам из сегмента \mathcal{J}^h . Предельные переходы (63) и (71) предоставляют спектральную пару $\{\kappa_{\#}; v_{\#}\} \in [0, \kappa_n] \times H_0^1(0, H)$ задачи (31), (32), причем сильные L^2 -сходимости (71) и (72) гарантируют, что $v_{\#}$ ортогональна функциям v_1, \dots, v_n из списка (35). Это, разумеется невозможно, т. е. теорема 5 доказана в полном объеме.

8. Лакунарное строение спектра. Теорема 5 показывает, что спектральные сегменты $\Sigma_{2k-1}^h = \Sigma_{2k}^h$ располагаются около точек

$$h^{-2}M_1 + \pi^2 H^{-2}k^2 + O(h), \quad (75)$$

однако она дает неправильную — степенную — оценку для их длин. Следующее утверждение, опирающееся на теорему 1, показывает, в частности, что эти длины экспоненциально малы.

Теорема 6. Для любого $k \in \mathbb{N}$ найдутся такие положительные h_k и C_k , что при $h \in (0, h_k]$ длины \mathcal{L}_k^h сегментов $\Sigma_{2k-1}^h = \Sigma_{2k}^h$ удовлетворяют неравенству

$$\mathcal{L}_k^h \leq 2C_k h^{-2} e^{-\beta/h}, \quad (76)$$

где $\beta = \beta_d > 0$ — показатель, предоставленный теоремой 1, например, при $d = (\mu\pi^2 - M_1)/2$.

Доказательство. В условиях теоремы 1 для собственных чисел (5) проверим оценку

$$|\Lambda_k^h(\theta) - \Lambda_k^h(0)| \leq C_k h^{-2} e^{-\beta/h}, \quad (77)$$

из которой сразу же вытекает искомая формула (76). Подчеркнем, что в силу асимптотической формулы (60) при малом h ограничение (14) выполнено при любом $d \in (0, \mu\pi^2 - M_1)$.

Применим максиминимальный принцип (см. [20; теорема 10.2.2]) для оператора задачи (6)–(8)

$$\Lambda_p^h(\theta) = \max_{\mathcal{E}_p(\theta)} \inf_{\Psi^h(\cdot; \theta) \in \mathcal{E}_p(\theta) \setminus \{0\}} \frac{E(\Psi^h(\cdot; \theta), \Psi^h(\cdot; \theta); \bowtie_H^h)}{\|\Psi^h(\cdot; \theta); L^2(\bowtie_H^h)\|^2},$$

в котором $\mathcal{E}_p(\theta)$ — любое подпространство в $H_{0,\theta}^1(\bowtie_H^h)^3$ с коразмерностью $p-1$.

Зафиксируем два параметра Флоке θ^1 и θ^2 в квадрате $[0, 2\pi]^2$. Произведения $Z_{(j)}^h(x; \theta^1) = \chi(y)U_{(j)}^h(x; \theta^1)$, $j = 1, \dots, p$, собственных вектор-функций $U_j^h(\cdot; \theta^1)$ и суммы $\chi = \chi_\ell + \chi_\wp$ срезок (26) аннулируются около торцов $\mathbb{I}_{H\ell/\wp}^{\pm}$ ячейки и потому попадают в пространство $H_{0,\theta}^1(\bowtie_H^h)^3$ при любом параметре Флоке θ . Более того, в силу экспоненциальной весовой оценки (15) они подчинены неравенствам

$$|(Z_{(j)}^h(\cdot; \theta^1), Z_{(m)}^h(\cdot; \theta^1))_{\bowtie_H^h} - \delta_{j,m}| \leq c_p^0 e^{-\beta/h},$$

$$|E(\mathcal{Z}_{(j)}^h(\cdot; \theta^1), \mathcal{Z}_{(m)}^h(\cdot; \theta^1); \bowtie_H^h) - \delta_{j,m} \Lambda_j^h(\theta^1)| \leq c_p^1 h^{-2} e^{-\beta/h}, \quad j, m = 1, \dots, p,$$

и сохраняют линейную независимость. Таким образом, в любом подпространстве $\mathcal{E}_p^h(\theta^2)$ (сменили параметр Флоке), имеющем коразмерность $p-1$, находим линейную комбинацию

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{E}_p^h(\theta^2)}^h(x) = \sum_{j=1}^p \mathcal{C}_j^h(\theta^2) Z_{(j)}^h(x), \quad \text{причем} \quad \sum_{j=1}^p |\mathcal{C}_j^h(\theta^2)|^2 = 1.$$

В силу приведенных формул дробь Рэлея удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \frac{E(\mathcal{Z}_{\mathcal{E}_p^h(\theta^2)}^h, \mathcal{Z}_{\mathcal{E}_p^h(\theta^2)}^h; \bowtie_H^h)}{\|\mathcal{Z}_{\mathcal{E}_p^h(\theta^2)}^h; L^2(\bowtie_H^h)\|^2} &\leq \frac{\sum_{j=1}^p |\mathcal{C}_j^h(\theta^2)|^2 \Lambda_j^h(\theta^1) + c_p^1 p^2 h^{-2} e^{-\beta/h}}{\sum_{j=1}^p |\mathcal{C}_j^h(\theta^2)|^2 - c_p^0 p^2 e^{-\beta/h}} \\ &\leq \Lambda_p^h(\theta^1) + C_p h^{-2} e^{-\beta/h}. \quad (78) \end{aligned}$$

Для проверки оценки (77), а вместе с ней и оценки (76) нужно в неравенстве (78) поменять местами параметры θ^1 и θ^2 , а затем положить $\theta^1 = \theta$ и $\theta^2 = 0$. Теорема 6 доказана.

Установленные асимптотические формулы означают, что в низкочастотном диапазоне спектра (3) зоны прохождения волн (4) располагаются около точек (75), но имеют экспоненциально малые длины, а между парами $\Sigma_{2k-1}^h = \Sigma_{2k}^h$ и $\Sigma_{2k+1}^h = \Sigma_{2k+2}^h$ спектральных сегментов раскрыта лакуна шириной $\pi^2 H^{-2}(2k +$

1). При этом зоны торможения волн оказываются значительно более широкими, что в значительной степени препятствует распространению упругих волн в тонкостенной сотовой конструкции \boxtimes_H^h .

9. Разное. 1°. РАЗМЕРЫ СПЕКТРАЛЬНЫХ СЕГМЕНТОВ. Теорема 5 с приемлемой точностью $O(h)$ устанавливает положение сегментов (4), однако такая точность не дает правильного представления об их длинах. В принципе продолжение процедуры построения асимптотики из разд. 4 позволяет соорудить разложение собственных чисел в ряды по степеням малого параметра h , что все-таки не позволяет вычислить экспоненциально малую величину \mathcal{L}_k^h (см. теорему 6). Таким образом, построение асимптотики длин спектральных сегментов остается открытым вопросом. Кроме того, из-за присутствия в сумме (57) членов степенного порядка малости безразличен выбор величины $\gamma \in (0, 1/2)$ в формуле (26) для срезов $\chi_{\ell/\varphi}$, вообще говоря, влияющий на экспоненциальную точность использованных асимптотических приближений.

2°. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ. Краевые условия (32) были назначены в концах отрезка $(0, H) \ni z$ по причине условий Дирихле (7) на основаниях $\boxtimes^h \times \{0\}$ и $\boxtimes^h \times \{H\}$ ячейки \boxtimes_H^h , но также подтверждены предельным переходом (71) в равенствах (68). Вместе с тем асимптотический анализ многих задач в тонких областях связывает краевые условия в предельной задаче с явлением порогового резонанса [37, 11, 28] в задаче (36) о пограничном слое около торцов призм $\Upsilon_{H\ell/\varphi}^h := \Delta_{\ell/\varphi}^h \times (0, H)$. Говоря приблизительно, пороговый резонанс возникает при наличии у названной задачи нетривиального ограниченного решения, причем в этом случае предельное уравнение (31) следует снабдить краевыми условиями Неймана. Однако классический прием [39], приспособленный к задаче Дирихле для системы Ламе (см. [40, 22, 23] и др.), доказывает отсутствие у задачи (36) не только порогового резонанса, но и точечного спектра. В итоге постановка условий Дирихле (32) приобретает и обсуждаемый способ обоснования.

3°. УСЛОВИЯ СВОБОДНОГО КРАЯ. Как упоминалось в замечании 1, смена типа краевых условий на боковой поверхности $\partial \boxtimes^h \times (0, H)$ ячейки периодичности коренным образом изменяет свойства пограничного слоя и, как следствие, требует полной перестройки асимптотических анзацев для собственных пар $\{\Lambda^h(\theta); U^h(\cdot; \theta)\}$. Вместе с тем вполне разумны сужение условий Дирихле в смещениях (2) на объединение боковых поверхностей ячеек $\{x \in \partial \boxtimes_H^h : z \in (0, H)\}$ и постановка на основаниях сотового слоя условий Неймана в напряжениях (см., например, [15]):

$$2\mu \frac{\partial u_3^h}{\partial z}(y, z) + \lambda \nabla_x \cdot u^h(y, z) = 0,$$

$$\mu \left(\frac{\partial u_j^h}{\partial z}(y, z) + \frac{\partial u_3^h}{\partial y_j}(y, z) \right) = 0, \quad j = 1, 2, \quad y \in \boxtimes^h, \quad z = 0, H.$$

В этом случае задачи (18) и (19) для пограничного слоя около ребер $\Upsilon_{H\ell/\varphi}^h$ ячейки \boxtimes_H^h сохраняются полностью, а асимптотический анализ из разд. 4 предоставляет обыкновенное дифференциальное уравнение (31) на отрезке $(0, H) \ni z$. Вместе с тем краевые условия на границе полубесконечной призмы Ξ_+ также становятся смешанными, но никакой информации о спектре подобных задач теории упругости в слоевидных областях до сих пор нет. Поэтому вид краевых условий для уравнения (31) пока остается неизвестным. Более того, при наличии дискретного спектра в задаче на Ξ возникает явление околорычинной

локализации собственных (вектор)-функций (см. [41, 42] и др.), т. е. асимптотические анзацы для собственных пар становятся совершенно другими.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М. Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73. С. 1117–1120.
2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982.
3. Кучмент П. А. Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, № 4. С. 3–52.
4. Скриганов М. М. Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 171. С. 1–122.
5. Kuchment P. Floquet theory for partial differential equations. Basel: Birkhäuser, 1993.
6. Geim A. K., Novoselov K. S. The rise of graphene // Nature materials. 2007. V. 6, N 3. P. 183–191.
7. Geim A. K. Graphene: status and prospects // Science. 2009. V. 324, N 5934. P. 1530–1534.
8. Pauling L. The diamagnetic anisotropy of aromatic molecules // J. Chem. Phys. 1946. V. 4. P. 673–677.
9. Kuchment P. A., Zeng H. Convergence of spectra of mesoscopic systems collapsing onto a graph // J. Math. Anal. Appl. 2001. V. 258. P. 671–700.
10. Exner P., Post O. Convergence of spectra of graph-like thin manifolds // J. Geom. Phys. 2005. V. 54, N 1. P. 77–115.
11. Grieser D. Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97, N 3. P. 718–752.
12. Post O. Spectral analysis on graph-like spaces. Heidelberg: Springer, 2012. (Lecture Notes in Mathematics; V. 2039).
13. Kuchment P. A., Post O. On the spectra of carbon nano-structure // Commun. Math. Phys. 2007. V. 275, N 3. P. 805–826.
14. Nazarov S. A., Ruotsalainen K., Uusitalo P. Asymptotics of the spectrum of the Dirichlet Laplacian on a thin carbon nano-structure // C. R. Mecanique. 2015. V. 343. P. 360–364.
15. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
16. Nazarov S. A., Ruotsalainen K., Uusitalo P. The Y-junction of quantum waveguides // Z. Angew. Math. Mech. 2014. V. 94, N 6. P. 477–486.
17. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
18. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
19. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
20. Бирман М. Ш., Соломяк М. Э. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
21. Камоцкий И. В., Назаров С. А. О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области // Проблемы математического анализа. Новосибирск: Научн. книга, 1999. Т. 18. С. 105–148.
22. Назаров С. А. Упругие волны, захваченные полубесконечной полосой с защемленными боковыми сторонами и изломанным торцом // Прикл. математика и механика. 2023. Т. 87, № 2. С. 265–279.
23. Назаров С. А. Собственные колебания упругой полуполосы при различном расположении участков фиксации ее краев // Акустический журн. 2023. Т. 69, № 4. С. 398–409.
24. Mazja W. G., Nasarow S. A., Plamenevski B. A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. Berlin: Akademie-Verl., 1991.
25. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
26. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1963. Т. 16. С. 219–292.
27. Nazarov S. A., Plamenevsky B. A. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1994.

28. Назаров С. А. Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, № 5. С. 77–142.
29. Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, № 3. С. 53–161.
30. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
31. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I. // Успехи мат. наук. 1960. Т. 16, № 3. С. 3–80.
32. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
33. Agmon S., Nirenberg L. Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space // Commun. Pure. Appl. Math. 1963. V. 16, N ?. P. 121–239.
34. Pazy A. Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space // Arch. Rational Mech. Anal. 1967. V. 24, N ?. P. 193–218.
35. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. Оценки в L_p и в классах Гёльдера и принцип максимума Миранда — Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе // Math. Nachr. 1978. V. 77, N 1. P. 25–82.
36. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.
37. Molchanov S., Vainberg B. Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Commun. Math. Phys. 2007. V. 273, N 2. P. 533–559.
38. Назаров С. А. Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 64, № 6. С. 3–60.
39. Rellich F. Über das asymptotische Verhalten der Lösungen $\Delta u + \lambda u = 0$ von in unendlichen Gebieten // Jahresber. Deutsch. Math.-Verl. 1943. V. 53, N 1. P. 57–65.
40. Назаров С. А. Упругие волны, захваченные однородным анизотропным полуцилиндром // Мат. сб. 2913. Т. 204, № 11. С. 99–130.
41. Назаров С. А. Лакуны в спектре тонкостенного прямоугольного бесконечного короба Дирихле с периодическим семейством перегородок // Мат. сб. 2023. Т. 214, № 7. С. 91–133.
42. Назаров С. А. Разные типы локализации собственных функций скалярных смешанных краевых задач в тонких многогранниках // Уфимск. мат. журн. 2025. Т. 17, № 1. С. 25–61.

Поступила в редакцию 4 мая 2025 г.

После доработки 12 марта 2026 г.

Принята к публикации 12 марта 2026 г.

Назаров Сергей Александрович (ORCID 0000-0002-8552-1264)

Институт проблем машиноведения РАН,

ВО, Большой проспект, 61, Санкт-Петербург 199178

srgnazarov108@gmail.com, serna108@mail.ru