Математические заметки

Том 93 выпуск 5 май 2013

УДК 514.763.3

Полные римановы метрики с группой голономии G_2 на деформациях конусов над $S^3 \times S^3$

Я. В. Базайкин, О. А. Богоявленская

Строятся полные римановы метрики с группой голономии G_2 на многообразиях, полученных деформацией конусов над $S^3 \times S^3$.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm10107

1. Введение. Данная статья продолжает работы [1]–[4] и посвящена изучению римановых многообразий с группой голономии G_2. В последнее время эта задача вызывает немалый интерес, причем, хотя наиболее важной задачей является исследование компактных многообразий, допускающих такие метрики, все же исследование некомпактных многообразий (преимущественно пространств векторных расслоений) с полными римановыми метриками с группой голономии G_2 вполне закономерно. Это объясняется тем, что в последнем случае, как правило, удается явным образом задать G_2-структуру и выписать уравнения, гарантирующие ее параллельность. При этом, если группа симметрии рассмотренной G_2-структуры достаточно велика, то задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, что позволяет либо найти решения в явном виде (в контрасте с компактным случаем), либо качественно их исследовать.

Основная идея этой статьи уже использовалась в [1]–[3] для построения полных римановых метрик с группой голономии Spin(7) и заключается в следующем: рассматривается стандартная коническая метрика над римановым многообразием со специальной геометрией. Тогда деформация этой метрики зависит от некоторого числа функциональных параметров, которые позволяют явным образом задать G_2 (либо Spin(7)) структуру. В данной работе мы предлагаем (вслед за [5]) рассмотреть в качестве такой базы конуса пространство $M = S^3 \times S^3$. Конусную метрику тогда можно записать как

$$d\bar{s}^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^{3} A_i(t)^2(\eta_i + \widetilde{\eta}_i)^2 + \sum_{i=1}^{3} B_i(t)^2(\eta_i - \widetilde{\eta}_i)^2,$$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты №№ 12-01-00873 и 12-01-00124), Советом по грантам Президента РФ (гранты МД-249.2011.1 и НШ-544.2012.1) и фондом «Династия».

где η_i, $\widetilde{\eta}_i$ – это стандартный корепер из 1-форм, а функции $A_i(t)$, $B_i(t)$ задают деформацию конусной особенности. В работе [5] была выписана система дифференциальных уравнений, гарантирующая, что метрика $d\overline{s}^2$ имеет группу голономии, содержащуюся в G_2. В [5] было также найдено частное решение этой системы, отвечающее метрике с группой голономии G_2 на $S^3 \times \mathbb{R}^4$. Отметим, что в работах [6]–[10] также исследовались и более общие метрики на конусах над $S^3 \times S^3$, но в рассмотренной нами ситуации не было найдено других примеров, кроме примера из [5] и классического примера из [11].

В предлагаемой работе мы продолжаем исследование данного класса метрик, положив $A_2 = A_3$, $B_2 = B_3$ и рассмотрев отличное от [5] краевое условие, что приводит к пространствам с другим топологическим строением. А именно, мы требуем, чтобы в вершине конуса обращалась в нуль только функция B_1. Это приводит к тому, что риманова метрика $d\overline{s}^2$ определена на $H^4 \times S^3$, где H – пространство тавтологического комплексного линейного расслоения над S^2, а H^4 – его четвертая тензорная степень. Заметим, что в [9] было проведено численное исследование (при помощи разложения решения основной системы в ряд Тейлора), давшее аргументы в пользу существования построенных нами метрик. Основной результат работы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. *Существует однопараметрическое семейство попарно негомотетичных полных римановых метрик вида $d\overline{s}^2$ с группой голономии G_2 на $H^4 \times S^3$, причем метрики можно параметризовать набором начальных данных*

$$(A_1(0), A_2(0), B_1(0), B_2(0)) = (\mu, \lambda, 0, \lambda), \qquad \textit{где} \quad \lambda, \mu > 0, \quad \mu^2 + \lambda^2 = 1.$$

При $t \to \infty$ метрики данного семейства сколь угодно близко аппроксимируются прямым произведением $S^1 \times C(S^2 \times S^3)$, где $C(S^2 \times S^3)$ – конус над произведением сфер. При этом сфера S^2 возникает как факторизация диагонально вложенной в $S^3 \times S^3$ трехмерной сферы по действию окружности, соответствующей векторному полю $\xi^1 + \widetilde{\xi}_1$.

2. G_2-структура на конусе над $S^3 \times S^3$. Рассмотрим группу Ли $G = \mathrm{SU}(2)$ со стандартной биинвариантной метрикой

$$\langle X, Y \rangle = -\operatorname{tr}(XY),$$

где $X, Y \in \mathrm{su}(2)$. На G рассмотрим три киллинговых векторных поля:

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi^3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно посчитать, что они удовлетворяют соотношениям

$$[\xi^i, \xi^{i+1}] = 2\xi^{i+2},$$

где индексы $i = 1, 2, 3$ приводятся по модулю 3. Пусть η_1, η_2, η_3 – двойственный к ξ_1, ξ_2, ξ_3 базис из 1-форм, т.е. $\eta_i(\xi^j) = \delta_i^j$. Тогда

$$d\eta_i = -2\eta_{i+1} \wedge \eta_{i+2}.$$

Пусть $M = G \times G$; тогда на M возникают 6 киллинговых полей ξ^i, $\widetilde{\xi}^i$, $i = 1, 2, 3$, касательных, соответственно, первому и второму множителям, и 6 двойственных к ним 1-форм η_i, $\widetilde{\eta}_i$. Рассмотрим конус $\overline{M} = \mathbb{R}_+ \times M$ с метрикой

$$d\bar{s}^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^{3} A_i(t)^2(\eta_i + \widetilde{\eta}_i)^2 + \sum_{i=1}^{3} B_i(t)^2(\eta_i - \widetilde{\eta}_i)^2,$$

где $A_i(t)$ и $B_i(t)$ – некоторые положительные функции, определяющие деформацию стандартной конусной метрики.

Введя в рассмотрение ортонормированный корепер

$$\begin{gathered} e^1 = A_1(\eta_1 + \widetilde{\eta}_1), \qquad e^2 = A_2(\eta_2 + \widetilde{\eta}_2), \qquad e^3 = A_3(\eta_3 + \widetilde{\eta}_3), \\ e^4 = B_1(\eta_1 - \widetilde{\eta}_1), \qquad e^5 = B_2(\eta_2 - \widetilde{\eta}_2), \qquad e^6 = B_3(\eta_3 - \widetilde{\eta}_3), \\ e^7 = dt, \end{gathered}$$

определим следующую 3-форму:

$$\Psi = e^{564} + e^{527} + e^{513} + e^{621} + e^{637} + e^{432} + e^{417},$$

где $e^{ijk} = e^i \wedge e^j \wedge e^k$. Форма Ψ задает G_2-структуру на $\overline{M}$, которая является параллельной в случае выполнения уравнений

$$d\Psi = 0, \qquad d * \Psi = 0. \tag{1}$$

В данной работе мы рассматриваем частный случай, когда $A_2 = A_3$, $B_2 = B_3$.

Лемма 1. *Уравнения* (1) *равносильны следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений*:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= \frac{1}{2}\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - \frac{A_1^2}{B_2^2}\right), \qquad & \frac{dA_2}{dt} &= \frac{1}{2}\left(\frac{B_2^2 - A_2^2 + B_1^2}{B_1 B_2} - \frac{A_1}{A_2}\right), \\ \frac{dB_1}{dt} &= \frac{A_2^2 + B_2^2 - B_1^2}{A_2 B_2}, \qquad & \frac{dB_2}{dt} &= \frac{1}{2}\left(\frac{A_2^2 - B_2^2 + B_1^2}{A_2 B_1} + \frac{A_1}{B_2}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

При $t = 0$ мы имеем конусную особенность пространства $\overline{M}$, которая может быть разрешена заданием начальных значений функций A_i, B_i. При этом с точностью до симметрии системы (2) возникают два следующих типа разрешения особенности (ср. с [1]–[3]).

Тип 1. $A_i(0) = 0$, $B_i(0) \neq 0$, $i = 1, 2$. В этом случае происходит коллапс интегральных трехмерных сфер, порожденных векторными полями $\xi^i + \widetilde{\xi}^i$. Эти сферы являются орбитами свободного действия G на M, заданного соотношением $h \in G$: $(g_1, g_2) \mapsto (hg_1, hg_2)$. Можно показать, что при этом метрика $d\bar{s}^2$ на $\overline{M}$ продолжается на пространство $\mathcal{M}$, гомеоморфное $S^3 \times \mathbb{R}^4$. Мы опускаем подробности, поскольку этот случай в данной статье не изучается.

Тип 2. $B_1(0) = 0$, $B_2(0) \neq 0$, $A_i(0) \neq 0$, $i = 1, 2$. Рассмотрим свободное действие группы $U(1) = S^1$ на M:

$$z \in U(1)\colon (U, V) \mapsto \left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} U, \begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} V\right).$$

Понятно, что орбиты этого действия совпадают с интегральными кривыми поля $\xi_1 - \widetilde{\xi}_1$. Значит, можно продолжить метрику $d\bar{s}^2$ на $[0,\infty)\times M$, затянув при $t=0$ каждую орбиту в точку. Диффеоморфизм

$$\phi\colon M \to M\colon (U,V) \mapsto (U, U^{-1}\overline{V})$$

преобразует рассмотренное выше действие $U(1)$ в действие следующего вида:

$$z \in U(1)\colon (U,V) \mapsto \left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1}\end{pmatrix} U, V\right).$$

Факторизация по действию $U(1)$ на первом сомножителе задает расслоение Хопфа $G = S^3 \to S^2 = G/U(1)$. После затягивания в точку орбит этого действия при $t=0$ в пространстве $[0,\infty)\times G$ мы получаем цилиндр расслоения Хопфа, который, как нетрудно увидеть, гомеоморфен линейному $\mathbb{C}$-расслоению H над S^2, называемому *тавтологическим расслоением* над S^2. Это расслоение однозначно определяется условием, что его первый класс Чженя является образующим в $H^2(S^2)$, отвечающим канонической ориентации факторпространства $S^2 = G/U(1)$. Поскольку на втором сомножителе действие тривиально, получаем, что метрика $d\bar{s}^2$ продолжается на пространство $H\times G$.

Рассмотрим теперь циклическую подгруппу $\mathbb{Z}_4$ в $U(1)$. Группа $\mathbb{Z}_4$ (следом за $U(1)$) действует на M, поэтому можно распространить это действие на все пространство $\overline{M}$. Поскольку данное дискретное действие согласовано с затягиванием орбит при $t=0$, мы получаем действие $\mathbb{Z}_4$ на $H\times G$. Факторпространство $(H\times G)/\mathbb{Z}_4$ естественным образом диффеоморфно $\mathcal{M} = H^4 \times G$, где H^4 – четвертая тензорная степень расслоения H. Итак, в рассматриваемом случае метрика $d\bar{s}^2$ может быть продолжена на многообразие $\mathcal{M}$.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 5 из [1].

Лемма 2. *Для того чтобы метрика $d\bar{s}^2$ продолжалась до гладкой метрики на $\mathcal{M}$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий*:

1) $B_1(0)=0$, $|B_1'(0)|=2$;
2) $A_2(0)=B_2(0)\neq 0$, $A_2'(0)=-A_2'(0)$;
3) $A_1(0)\neq 0$, $A_1'(0)=0$;
4) *функции A_i, B_i знакоопределены на промежутке* $(0,\infty)$.

Замечание. Разница со статьей [1], возникающая в условии на начальную производную функции B_1 в (1), связана с нормировкой: длина вектора $\xi_1 - \widetilde{\xi}_1$ равна 2, а не 1, как это возникало в лемме 5 в [1].

В [5] для системы (2) было найдено точное решение следующего вида (остальные решения семейства, найденного в [5], гомотетичны данному):

$$\begin{aligned} A_1(r) &= \sqrt{\frac{(r-9/4)(r+9/4)}{(r-3/4)(r+3/4)}}, \qquad & A_2(r) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(r+\frac{3}{4}\right)\left(r-\frac{9}{4}\right)}, \\ B_1(r) &= 2\,\frac{r}{3}, \qquad & B_2(r) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(r-\frac{3}{4}\right)\left(r+\frac{9}{4}\right)}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $r \geqslant 9/4$ и переменная r связана с t заменой

$$dt = \frac{dr}{A_1(r)}, \qquad t|_{r=9/4} = 0.$$

Метрика (3) является полной метрикой с группой голономии G_2 на $S^3 \times \mathbb{R}^4$. Если рассмотреть случай $A_1 = A_2 = A_3 = A$ и $B_1 = B_2 = B_3 = B$, то система (2) интегрируется в элементарных функциях, и мы получаем другую полную метрику с группой голономии G_2 на $S^3 \times \mathbb{R}^4$:

$$d\bar{s}^2 = \frac{dr^2}{1 - 1/r^3} + \frac{r^2}{9}\left(1 - \frac{1}{r^3}\right)\sum_{i=1}^{3}(\eta_i + \widetilde{\eta}_i)^2 + \frac{r^2}{3}\sum_{i=1}^{3}(\eta_i - \widetilde{\eta}_i)^2. \tag{4}$$

Метрика (4) была впервые построена в [11], см. также [12]. Насколько мы знаем, метрики (3) и (4) исчерпывают список известных явных решений системы (2), отвечающих полным римановым метрикам с группой голономии G_2.

Если сделать формальную замену $r \to -r$ в решении (4), то мы получим следующее решение (2):

$$d\bar{s}^2 = \frac{dr^2}{1 + 1/r^3} + \frac{r^2}{9}\left(1 + \frac{1}{r^3}\right)\sum_{i=1}^{3}(\eta_i + \widetilde{\eta}_i)^2 + \frac{r^2}{3}\sum_{i=1}^{3}(\eta_i - \widetilde{\eta}_i)^2. \tag{5}$$

Решение (5) определено при $0 < r < \infty$, но не задает никакую гладкую риманову метрику, поскольку имеет особенность при $r = 0$.

3. Семейство новых решений. Действуя аналогично [1], мы рассмотрим стандартное евклидово пространство $\mathbb{R}^4$ и положим $R(t) = (A_1(t), A_2(t), B_1(t), B_2(t))$. Пусть $V\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ – функция от аргумента R, определенная правой частью системы (2) (функция V, конечно, определена лишь в области, где $A_i, B_i \neq 0$). Таким образом, система (2) имеет вид

$$\frac{dR}{dt} = V(R).$$

Пользуясь инвариантностью V относительно гомотетий $\mathbb{R}^4$, сделаем замену $R(t) = f(t)S(t)$, где

$$|S(t)| = 1, \qquad f(t) = |R(t)|,$$
$$S(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t)).$$

Таким образом, наша система распадается на «радиальную» и «тангенциальную» части:

$$\frac{dS}{du} = V(S) - \langle V(S), S\rangle S = W(S), \tag{6}$$

$$\frac{1}{f}\frac{df}{du} = \langle V(S), S\rangle, \qquad dt = f\,du. \tag{7}$$

Решения автономной системы (6) на трехмерной сфере

$$S^3 = \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \;\Big|\; \sum_{i=1}^{4}\alpha_i^2 = 1\right\}$$

позволяют найти решения (2) интегрированием уравнений (7). Следующая лемма очевидна.

Лемма 3. *Системы* (2) *и* (6) *допускают следующие симметрии*:

$$
\begin{aligned}
(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) &\mapsto (-\alpha_1,\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2),\\
((\alpha_1(u),\alpha_2(u),\alpha_3(u),\alpha_4(u)) &\mapsto (-\alpha_1(-u),\alpha_2(-u),\alpha_3(-u),-\alpha_4(-u)),\\
((\alpha_1(u),\alpha_2(u),\alpha_3(u),\alpha_4(u)) &\mapsto (-\alpha_1(-u),-\alpha_2(-u),\alpha_3(-u),\alpha_4(-u)),\\
((\alpha_1(u),\alpha_2(u),\alpha_3(u),\alpha_4(u)) &\mapsto (\alpha_1(u),\alpha_2(u),-\alpha_3(u),-\alpha_4(u)),\\
((\alpha_1(u),\alpha_2(u),\alpha_3(u),\alpha_4(u)) &\mapsto (\alpha_1(u),-\alpha_2(u),-\alpha_3(u),\alpha_4(u)).
\end{aligned}
$$

В силу леммы 2 регулярной метрике на $\mathcal{M}$ может отвечать только траектория системы (6), выходящая из точки $S_0=(\mu,\lambda,0,\lambda)$, где $2\lambda^2+\mu^2=1$. В силу симметрий леммы 3 можно считать, что $\lambda,\mu>0$.

Лемма 4. *Для любой рассмотренной выше точки* $S_0=(\mu,\lambda,0,\lambda)$ *существует единственная гладкая траектория системы* (6), *выходящая из точки* S_0 *в область* $\alpha_3>0$, $\alpha_4>\alpha_2$.

Доказательство. Пусть

$$
J=\{(\mu,\lambda,0,\lambda)\mid \mu>0,\ \lambda>0,\ 2\lambda^2+\mu^2=1\}
$$

– дуга окружности, на которой выбирается точка S_0. Обозначим через U открытый круг в $\mathbb{R}^2$ с координатами $x=\alpha_3$, $y=\alpha_4-\alpha_2$ радиуса ε с центром в нуле. Тогда в окрестности дуги J можно рассмотреть локальные координаты $x,y,z=\alpha_1$. В этих координатах поле W имеет следующие компоненты:

$$
W_x=W_3,\qquad W_y=W_2-W_4,\qquad W_z=W_1,
$$

где

$$
\begin{aligned}
W_j(S)&=V_j(S)-\langle V(S),S\rangle\alpha_j,\qquad j=1,2,3,4,\\
S&=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\\
&=\left(z,\frac{1}{2}(\sqrt{2-2x^2-y^2-2z^2}-y),x,\frac{1}{2}(\sqrt{2-2x^2-y^2-2z^2}+y)\right),
\end{aligned}
$$

а формулы для $V_i(S)$ получаются соответствующей заменой координат. Поскольку в точках J изначальная система имеет особенность, мы рассмотрим в окрестности $J\times U$ модифицированную систему дифференциальных уравнений:

$$
\frac{d}{dv}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xW_x\\xW_y\\xW_z\end{pmatrix}. \tag{8}
$$

Очевидно, что траектории системы (8) совпадают с траекториями системы (2) с точностью до замены параметра $du=x\,dv$. Векторное поле xW является гладким в окрестности $J\times U$, и непосредственное вычисление показывает, что при достаточно малых $\varepsilon>0$ стационарными точками системы (8) в $J\times U$ будут в точности точки интервала J. Рассмотрим линеаризацию системы (8) в окрестности точки S_0:

$$
\frac{dx}{dv}=2x,\qquad \frac{dy}{dv}=\frac{\mu x}{\sqrt{2-2\mu^2}}-y,\qquad \frac{dz}{dv}=0.
$$

Линеаризованная система имеет три собственных вектора

$$e_1 = \left(3, \frac{\mu}{\sqrt{2-2\mu^2}}, 0\right), \qquad e_2 = (0,1,0), \qquad e_3 = (0,0,1)$$

с собственными числами 2, -1 и 0 соответственно.

Непосредственное вычисление показывает, что если $(x,y,z) \to S_0 = (0,0,\mu)$, то

$$\left\langle (0,0,1), \frac{xW}{|xW|} \right\rangle \to 0,$$

т.е. угол между вектором xW и вектором, касательным к дуге J, стремится к $\pi/2$ при подходе к точкам J. Это позволяет восстановить «фазовый портрет» системы (8) в окрестности $J \times U$ аналогично тому, как это делается в классическом случае. А именно, рассмотрим область Γ в $J \times U$, ограниченную параболическими цилиндрами

$$-\frac{\mu x}{\sqrt{2-2\mu^2}} + 3y + \alpha x^2 = 0, \qquad -\frac{\mu x}{\sqrt{2-2\mu^2}} + 3y - \alpha x^2 = 0$$

и плоскостью $x = \delta$, где $\alpha, \delta > 0$. Эти цилиндры на фиксированном уровне z представляют собой параболы, касающиеся по вектору e_1. Легко посчитать, что в точках первого параболического цилиндра

$$\frac{d}{dv}\left(-\frac{\mu x}{\sqrt{2-2\mu^2}} + 3y + \alpha x^2\right) = 5\alpha x^2 + O(x^2+y^2) \geqslant 0,$$

если выбрать константу α достаточно большой (причем равенство достигается только на J). Значит, траектории пересекают первый параболический цилиндр, проходя снаружи области Γ внутрь. Аналогично показывается, что траектории системы (8) пересекают второй параболический цилиндр, ограничивающий область Γ, также проходя снаружи области внутрь. Тогда для каждого значения $z = z_0$ найдется траектория, кончающаяся на плоской стенке области в точке (δ, y, z_0), которая выходит из точки на оси J, если выбрать δ достаточно малым, а α достаточно большим (это следует из того, что такая траектория не может сильно отклониться вдоль J, поскольку угол, который она составляет с J, стремится к $\pi/2$). Следовательно, если фиксировать точку $S_0 = (0,0,\mu)$ на дуге J, то при уменьшении δ и увеличении α можно найти траекторию, выходящую экспоненциально с порядком e^{2v} из точки S_0 в область $x > 0$. Аналогично, будет существовать траектория, выходящая из S_0 с противоположной стороны, т.е. со стороны области $x < 0$. Поскольку порядок сходимости x к нулю равен e^{-2v}, то относительно параметра u произойдет «выход» из точки S_0 за конечное время. Аналогичными рассуждениями показывается единственность каждой из траекторий.

Заметим теперь, что при переходе от параметра u к параметру v происходит обращение ориентации траекторий в области $x < 0$. Это означает, что для каждой точки S_0 существует единственная траектория, за конечное время выходящая из точки S_0 и входящая в область $x > 0$. При этом выходящая из S_0 траектория будет касаться вектора e_1, т.е. при малых u будем иметь $\alpha_4 > \alpha_2$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Стационарные решения системы* (6) *на* S^3 *исчерпываются следующим списком нулей векторного поля* W *с точностью до симметрий леммы* 3:

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right),\qquad \left(0,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\right).$$

Доказательство. В точках, где векторное поле W обращается в нуль, поле $V(S)$ параллельно $S(u)$; следовательно, стационарные решения системы (2) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_4^2}\right)=\beta\alpha_1,\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_4^2-\alpha_2^2+\alpha_3^2}{\alpha_3\alpha_4}-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)=\beta\alpha_2,\\ \frac{\alpha_2^2+\alpha_4^2-\alpha_3^2}{\alpha_2\alpha_4}=\beta\alpha_3,\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_2^2-\alpha_4^2+\alpha_3^2}{\alpha_2\alpha_3}+\frac{\alpha_1}{\alpha_4}\right)=\beta\alpha_4,\\ \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2=1,\end{gathered}$$

где $\beta=\langle V(S),S\rangle\in\mathbb{R}$. Решение системы распадается на два случая: если $\alpha_1=0$, то без труда получаем вторую точку из условия леммы. Если $\alpha_1\neq 0$, то, исключая β, выражаем α_1, α_3 через α_2, α_4:

$$\alpha_1^2=\frac{4}{3}\frac{\alpha_2^2\alpha_4^2}{\alpha_2^2+\alpha_4^2}\,,\qquad \alpha_3^2=3\frac{(\alpha_4^2-\alpha_2^2)^2}{\alpha_2^2+\alpha_4^2}\,,$$

после чего получаем соотношение

$$4(\alpha_4^2-\alpha_2^2)^2=(\alpha_4^2+\alpha_2^2)^2,$$

откуда немедленно получаем оставшиеся точки. Лемма доказана.

Точку $S\in S^3$, в которой поле W не определено, назовем *условно стационарной*, если существует вещественно-аналитическая кривая $\gamma(u)$ на S^3, $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, $\gamma(0)=S$ такая, что поля V, W определены во всех точках $\gamma(u)$, $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, $u\neq 0$, непрерывно продолжаются на всю кривую $\gamma(u)$, и $\lim_{u\to 0}W(\gamma(u))=0$.

Лемма 6. *Система* (6) *не имеет условно стационарных решений на* S^3.

Доказательство. Пусть точка $S=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, $\sum_{i=1}^4\alpha_i^2=1$, является условно стационарной, т.е. существует кривая $\gamma(u)$, $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, с указанными выше свойствами. Очевидно, что такое возможно только в случае, когда выполнено хотя бы одно из условий: $\alpha_2(0)=0$, $\alpha_3(0)=0$ или $\alpha_4(0)=0$.

1) Рассмотрим сначала случай, когда выполнены все соотношения одновременно: $\alpha_2(0)=\alpha_3(0)=\alpha_4(0)=0$, $\alpha_1(0)=\pm1$. Положим для $i=2,3,4$

$$\alpha_i(u)=c_iu^{k_i}(1+o(1))\qquad\text{при}\quad u\to 0,$$

где $c_i\neq 0$, $k_i>0$. Заметим, что если $\alpha_2(u)=\alpha_4(u)+cu^k$, где $c\neq 0$, то V_1 не может быть непрерывно продолжено вдоль $\gamma(u)$ вплоть до $u=0$. Из вещественной аналитичности следует, что $\alpha_2(u)=\alpha_4(u)$ и, в частности, $k_2=k_4$. Тогда

$$V_2=\frac{\pm1}{2c_2}\,u^{-k_2}(1+o(1))$$

– противоречие с существованием предела $V(S)$ при $u \to 0$.

2) Пусть две из трех функций α_2, α_3, α_4 обращаются в нуль при $u = 0$. Рассмотрим возникающие случаи.

Случай $\alpha_2(0) = \alpha_3(0) = 0$, $\alpha_4(0) \neq 0$. Если при этом $\alpha_1(0) \neq 0$, то

$$V_1 = \frac{\alpha_1(0)}{2c_2^2}\, u^{-2k_2}(1 + o(1)),$$

что приводит к противоречию. Если $\alpha_1(u) = c_1 u^{k_1}(1 + o(1))$, $c_1 \neq 0$, $k_1 > 0$, то $k_1 \geqslant k_2$ (из непрерывности V_1) и

$$V_2 = \frac{\alpha_4(0)}{c_3}\, u^{-k_3}(1 + o(1))$$

– снова противоречие.

Случай $\alpha_2(0) \neq 0$, $\alpha_3(0) = \alpha_4(0) = 0$ симметричен предыдущему и исключается аналогично.

Случай $\alpha_2(0) = \alpha_4(0) = 0$, $\alpha_3(0) \neq 0$. Этот случай исключаем, поскольку

$$V_3 = -\frac{\alpha_3(0)^2}{c_2 c_4}\, u^{-k_2-k_4}(1 + o(1)).$$

3) Предположим, что только одна из функций α_2, α_3, α_4 обращается в нуль при $u = 0$.

Случай $\alpha_2(0) = 0$, $\alpha_3(0), \alpha_4(0) \neq 0$. Непрерывность V_1 и V_3 влечет в этом случае $\alpha_1(0) = 0$ и $\alpha_3(0) = \pm\alpha_4(0) \neq 0$, причем $k_1 \geqslant k_2$. В этом случае

$$\lim_{u\to 0} V(\gamma(u)) = (0, 1, 0, 0), \qquad \lim_{u\to 0} W(\gamma(u)) = (0, 1, 0, 0) \neq 0$$

– противоречие.

Случай $\alpha_4(0) = 0$, $\alpha_2(0), \alpha_3(0) \neq 0$ исключается аналогично.

Случай $\alpha_3(0) = 0$, $\alpha_2(0), \alpha_4(0) \neq 0$. Непрерывность V сразу влечет $\alpha_2(0) = \pm\alpha_4(0)$. Тогда

$$\lim_{u\to 0} V_3(\gamma(u)) = 2, \qquad \lim_{u\to 0} W_3(\gamma(u)) = 2 \neq 0$$

– снова противоречие. Лемма доказана.

Метрика $d\overline{s}^2$ называется *асимптотически локально конической*, если существуют функции $\widetilde{A}_i(t)$, $\widetilde{B}_i(t)$, линейные по t с точностью до сдвига, такие, что

$$\left|1 - \frac{A_i}{\widetilde{A}_i}\right| \to 0, \quad \left|1 - \frac{B_i}{\widetilde{B}_i}\right| \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Метрика, определяемая функциями $\widetilde{A}_i(t)$, $\widetilde{B}_i(t)$, называется *локально конической*. Следующая лемма доказана в [1].

Лемма 7. *Стационарным решениям системы* (6) *отвечают локально конические метрики на* $\overline{M}$, *а траекториям системы* (6), *асимптотически стремящимся к стационарным решениям, отвечают асимптотически локально конические метрики на* $\overline{M}$.

Следующая лемма следует из непосредственного анализа систем (2) и (6).

Лемма 8. *Если* $S=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ – *решение системы* (6), *то имеют место следующие соотношения*:

1) $\dfrac{d}{dt}(2A_1A_2B_2-B_1(B_2^2-A_2^2))=0$,

2) $\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{\alpha_1\alpha_2\alpha_4}{2\alpha_4\alpha_2\alpha_1-\alpha_3(\alpha_4^2-\alpha_2^2)}\right)=\dfrac{\alpha_1\alpha_3}{2\alpha_4\alpha_2\alpha_1-\alpha_3(\alpha_4^2-\alpha_2^2)}$,

3) $\dfrac{d}{du}\left(\ln\dfrac{\alpha_3(\alpha_4^2-\alpha_2^2)}{\alpha_4\alpha_2\alpha_1}\right)=\dfrac{2\alpha_4\alpha_2\alpha_1-\alpha_3(\alpha_4^2-\alpha_2^2)}{2\alpha_4\alpha_2(\alpha_4^2-\alpha_2^2)}$,

4) $\dfrac{d}{du}\ln\dfrac{\alpha_2}{\alpha_4}=\dfrac{\alpha_4^2-\alpha_2^2}{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ *при* $\alpha_1=0$,

5) $\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{\alpha_3}{\alpha_4}\right)=\dfrac{3}{2\alpha_4}\left(\dfrac{2}{\sqrt3}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_4}\right)\left(\dfrac{2}{\sqrt3}-\dfrac{\alpha_3}{\alpha_4}\right)$ *при* $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\alpha_4$.

Замечание. Таким образом, функция $F(t)=2A_1A_2B_2-B_1(B_2^2-A_2^2)$ является интегралом системы (2).

Лемма 9. *Траектория системы* (6), *определенная начальной точкой* $S_0=(\mu,\lambda,0,\lambda)$, $\lambda,\mu>0$, $2\lambda^2+\mu^2=1$, *стремится при* $u\to\infty$ *к стационарной точке*

$$S_\infty=\left(0,\frac{\sqrt3}{\sqrt{10}},\frac{\sqrt2}{\sqrt5},\frac{\sqrt3}{\sqrt{10}}\right).$$

Доказательство. Введем обозначения для следующих точек в S^3:

$$O=(0,0,1,0),\qquad A=(0,0,0,1),\qquad B=(1,0,0,0),\qquad C=\left(0,\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2}\right).$$

Рассмотрим область $\Pi\subset S^3$, определенную неравенствами

$$\Pi:\quad \alpha_4\geqslant\alpha_2\geqslant0,\quad \alpha_1\geqslant0,\quad \alpha_3\geqslant0.$$

Нетрудно убедиться, что область Π является сферической пирамидой $(OABC)$. Границами области служат следующие множества:

$$\begin{aligned}
\Pi_1&=(OAB)=\{\alpha_2=0,\alpha_4\geqslant0,\alpha_1\geqslant0,\alpha_3\geqslant0\},\\
\Pi_2&=(OBC)=\{\alpha_4=\alpha_2,\alpha_2\geqslant0,\alpha_1\geqslant0,\alpha_3\geqslant0\},\\
\Pi_3&=(OAC)=\{\alpha_4\geqslant\alpha_2\geqslant0,\alpha_1=0,\alpha_3\geqslant0\},\\
\Pi_4&=(ABC)=\{\alpha_4\geqslant\alpha_2\geqslant0,\alpha_1\geqslant0,\alpha_3=0\}.
\end{aligned}$$

Начальная точка $S_0=(\mu,\lambda,0,\lambda)\in(BC)$. Согласно лемме 4 при всех малых $u>0$ траектория системы (6), определенная начальной точкой S_0, находится внутри области Π.

Рассмотрим сначала возможность достижения траекторией границы области Π за конечное время. На $\Pi_1 \setminus ((AB) \cup (OB))$ интеграл $F(t) = -\alpha_3\alpha_4^2 f(t)^3$ строго отрицателен, а в начальной точке $F(S_0) = 2\lambda^2\mu > 0$, значит, траектория не может пересечь некоторую окрестность этой стенки, за исключением, возможно, дуг (AB) и (OB). Далее, на Π_2 мы имеем

$$\frac{d(\alpha_4 - \alpha_2)}{du} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} > 0$$

при $\alpha_1 \neq 0$, т.е. траектория не может пересечь некоторую окрестность множества Π_2 за конечное время или даже подойти к ней достаточно близко, за исключением дуги (OC). Заметим, что это соображение заодно исключает окрестность дуги (OB). Наконец, на множестве Π_4 производная функции $\alpha_3(t)$ строго положительна и отграничена от нуля, поэтому траектория не пересекает Π_4 и некоторую ее окрестность (заметим, что тем самым мы исключили и остававшуюся возможность приближения к дуге (AB)). Поскольку Π_3 является инвариантным подмножеством системы (6), траектория не может пересечь Π_3 за конечное время (в том числе дугу (OC)).

Определим функцию F_1 на S^3:

$$F_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_4}{F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}\,.$$

Поскольку $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = f(t)^{-3}F(S_0) > 0$, из соотношения 2) леммы 8 вытекает, что функция F_1 строго возрастает вдоль траекторий системы (2), идущих внутри области Π. Допустим, что C – предельное множество рассматриваемой траектории. Тогда в C могут попасть: либо стационарные и условно стационарные точки системы (6) (т.е. в соответствии с леммами 5 и 6 мы имеем только две такие возможности: точки S_∞ и $S_1 = (1/2\sqrt{2}, 1/2\sqrt{2}, \sqrt{3}/2\sqrt{2}, \sqrt{3}/2\sqrt{2})$); либо точки, лежащие на критическом уровне функции F_1 (ясно, что внутри Π таких точек нет, поскольку в окрестности каждой внутренней в Π точки из C можно отграничить от нуля производную $F_1(u)$); наконец, все точки C, лежащие на границе Π, должны находиться на максимальном уровне функции F_1. Рассмотрим функцию

$$F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \ln\frac{\alpha_3(\alpha_4^2 - \alpha_2^2)}{\alpha_4\alpha_2\alpha_1}\,.$$

Тогда из соотношения 3) леммы 8 следует, что F_2 возрастает вдоль траектории, и, значит, множество $C \cap \partial\Pi$ лежит на максимальном уровне F_2 в Π. Заметим, что максимальным (в Π) уровнем функции F_2 служит множество $\Pi_3 \cup \Pi_1$. Выше было показано, что нельзя приблизиться к окрестности к $\Pi_1 \setminus (OA)$; следовательно, возможен только случай $C \cap \partial\Pi \subset \Pi_3$.

Далее, из соотношения 4) леммы 8 следует, что функция $F_3 = \ln(\alpha_2/\alpha_4)$ возрастает вдоль траектории (для достаточно больших u) к максимальному значению на Π_3, которое достигается при $\alpha_2 = \alpha_4$. Итак, наша траектория стремится при $u \to \infty$ к инвариантному одномерному множеству $\Pi_3 \cap \Pi_2 = (OC)$. Соотношение 5) леммы 8 показывает, что в окрестности (OC) функция $F_4 = \alpha_3/\alpha_4$ возрастает при $F_4 \leqslant 2/\sqrt{3}$ и убывает при $F_4 \geqslant 2/\sqrt{3}$; следовательно, $C \cap \partial\Pi$ может содержать только точку S_∞, определяемую условием $F_4 = 2/\sqrt{3}$.

Итак, мы пришли к выводу, что рассматриваемая траектория сходится либо к S_1, либо к S_∞. Для завершения доказательства теоремы нам осталось показать, что сходимость к S_1 не имеет места.

Прямое вычисление показывает, что линеаризация системы (6) в окрестности стационарной точки S_1 имеет три собственных числа кратности один:

$$\lambda_1 = -2\sqrt{2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{7}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{290}, \qquad \lambda_3 = -\frac{7}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{290}.$$

Таким образом, в окрестности точки S_1 существует (локально определенная) поверхность, заметаемая траекториями, входящими в точку S_1, причем эта поверхность в точке S_1 касается двумерной плоскости, натянутой на первые два собственных вектора e_1 и e_2. Остальные траектории в окрестности S_1 выходят из S_1. При этом первый собственный вектор имеет координаты (в $\mathbb{R}^4$): $e_1 = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1, 1)$ и является касательным к траектории, которая задается как $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_4$. Нетрудно увидеть, что собственному числу λ_1 отвечают в точности решения (4) и (5) (обе траектории входят в точку S_1 с противоположных сторон; траектория (4) отвечает $F < 0$, траектория (5) – $F > 0$). Поскольку $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, остальные входящие в S_1 траектории (кроме одной) касаются в точке S_1 траектории (5) или (6). Упомянутая нами единственная не касательная к (5), (6) траектория отвечает собственному числу λ_2, и непосредственно проверяется, что она лежит на инвариантной поверхности $F = 0$ и, следовательно, не может совпадать с нашей траекторией.

Рассмотрим пару функций: $G_1 = \alpha_2\alpha_4 - \alpha_1\alpha_3$ и $G_2 = \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3$. Начальная точка S_0 находится в области $\{G_1 > 0,\, G_2 > 0\}$, точка S_1 лежит в $\{G_1 = 0,\, G_2 = 0\}$. Непосредственное вычисление показывает, что вектор e_2 направлен внутрь области $\{G_1 > 0,\, G_2 > 0\}$ либо $\{G_1 < 0,\, G_2 < 0\}$ (область зависит от выбора направления e_2; мы не приводим здесь явные координаты e_2, чтобы избежать громоздких формул). Легко проверить, что

$$\frac{d}{du}G_1 = -\frac{2}{\alpha_2}G_2,$$

в точках, где $G_1 = 0$, и

$$\frac{d}{du}G_2 = -\frac{2}{\alpha_2}G_1$$

в тех точках, где $G_2 = 0$. Значит, траектория может достичь точки S_1 только находясь в области $\{G_1 > 0,\, G_2 > 0\}$; если она перейдет в одну из областей $\{G_1 > 0,\, G_2 < 0\}$ либо $\{G_1 < 0,\, G_2 > 0\}$, то уже не сможет из них выйти (отметим, что S_∞ лежит в $\{G_1 > 0,\, G_2 < 0\}$). В том числе это соображение определяет направление вектора e_2 – он направлен внутрь области $\{G_1 > 0,\, G_2 > 0\}$.

Теперь, рассмотрим функцию $F_5 = \alpha_4^2 - \alpha_3^2$. Очевидно, что $F_5(S_0) = \lambda^2 > 0$, $F_5(S_1) = 0$. Далее,

$$\frac{d}{du}F_5 = \frac{G_2}{2\alpha_1\alpha_4}$$

в тех точках, где $F_5 = 0$. Таким образом, на поверхности уровня $\{F_5 = 0\}$ производная функции вдоль траектории неотрицательна и обращается в нуль в точности в точках, в которых $\alpha_1 = \alpha_2$ и $\alpha_3 = \alpha_4$. Поскольку эти точки принадлежат траектории решения (5), рассматриваемая траектория не может выйти за пределы области $\{F_5 > 0\}$. Непосредственное вычисление показывает, что вектор e_2 (по которому приходят траектории к точке S_1) направлен внутрь области $\{F_5 < 0\}$. Таким образом, находясь в области $\{G_1 > 0, G_2 > 0\}$, траектория не может подойти к S_1. Остается одна возможность: выход в область $\{G_1 > 0, G_2 < 0\}$, где единственной предельной точкой является S_∞. Лемма доказана.

Основная теорема теперь является непосредственным следствием лемм 4 и 9: начальная точка траектории определяет топологическое строение пространства, на котором определена наша метрика, группа голономии которой очевидно совпадает со всем G_2. Предельная точка S_∞ означает, что функция B_1 аппроксимируется на бесконечности константой, а остальные функции, определяющие метрику, – линейными непостоянными функциями, что дает на бесконечности произведение S^1 и конуса над $S^2 \times S^3$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Я. В. Базайкин, "О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии Spin(7)", *Сиб. матем. журн.*, **48**:1 (2007), 11–32.

[2] Я. В. Базайкин, "Некомпактные римановы пространства с группой голономии Spin(7) и 3-сасакиевы многообразия", *Геометрия, топология и математическая физика. I*, Сб. статей. К 70-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова, Тр. МИАН, **263**, МАИК, М., 2008, 6–17.

[3] Я. В. Базайкин, Е. Г. Малькович, "Spin(7)-структуры на комплексных линейных расслоениях и явные римановы метрики с группой голономии SU(4)", *Матем. сб.*, **202**:4 (2011), 3–30.

[4] Е. Г. Малькович, "О новых явных римановых метриках с группой голономии $SU(2(n+1))$", *Сиб. матем. журн.*, **52**:1 (2011), 95–99.

[5] A. Brandhuber, J. Gomis, S. S. Gubser, S. Gukov, "Gauge theory at large N and new G_2 holonomy metrics", *Nuclear Phys. B*, **611**:1-3 (2001), 179–204, arXiv: hep-th/0106034v2.

[6] M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lü, C. N. Pope, "Cohomogeneity one manifolds of Spin(7) and G_2 holonomy", *Phys. Rev. D* (3), **65**:10 (2002), 106004, arXiv: hep-th/0108245v2.

[7] M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lü, C. N. Pope, "Orientifolds and slumps in G_2 and Spin(7) metrics", *Ann. Phys.*, **310**:2 (2004), 265–301, arXiv: hep-th/0111096v2.

[8] A. Brandhuber, "G_2 holonomy spaces from invariant three-forms", *Nuclear Phys. B*, **629**:1-3 (2002), 393–416, arXiv: hep-th/0112113v2.

[9] M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lü, C. N. Pope, "A G_2 unification of the deformed and resolved conifolds", *Phys. Lett. B*, **534**:1-4 (2002), 172–180, arXiv: hep-th/0112138v3.

[10] Z. W. Chong, M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lü, C. N. Pope, P. Wagner, "General metrics of G_2 holonomy and contraction limits", *Nuclear Phys. B*, **638**:3 (2002), 459–482, arXiv: hep-th/0204064v1.

[11] R. L. Bryant, S. M. Salamon, "On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy", *Duke Math. J.*, **58**:3 (1989), 829–850.

[12] G. W. Gibbons, D. N. Page, C. N. Pope, "Einstein Metrics on S^3, $\mathbb{R}^3$, and $\mathbb{R}^4$ bundles", *Comm. Math. Phys.*, **127**:3 (1990), 529–553.

Я. В. Базайкин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: bazaikin@math.nsc.ru

Поступило
08.06.2012
Исправленный вариант
26.06.2012

О. А. Богоявленская
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск