ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2013, том 53, № 4, с. 523–530

УДК 519.6+515.146

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ АЛГОРИТМЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛ[1)]

© 2013 г. Я. В. Базайкин, И. А. Тайманов

(630090 Новосибирск, пр-т акад. Коптюга, 4, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН)

e-mail: bazaikin@math.nsc.ru, taimanov@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 18.08.2012 г.
Переработанный вариант 28.10.2012 г.

Описывается алгоритм вычисления основных топологических характеристик трехмерных тел, основанный на дискретизации теории Морса и использующий дискретные аналоги гладких функций, имеющих только невырожденные (морсовские) и простейшие вырожденные критические точки.

Ключевые слова: вычислительная топология, кубические комплексы, числа Бетти, теория Морса.

DOI: 10.7868/S0044466913040029

1. ВВЕДЕНИЕ

В различных прикладных областях возникает задача вычисления топологических характеристик геометрических объектов сложной формы. Это привело к появлению вычислительной топологии, которая бурно развивается в последнее время [1]–[3]. Как правило, задача вычислительной топологии сводится к эффективному вычислению чисел Бетти, т.е. рангов групп гомологий.

Один из наиболее распространенных подходов к вычислению групп гомологий основан на теории Морса [4], [5], которая должна быть модифицирована для исследования дискретно заданных геометрических объектов. Дискретные подходы к теории Морса изучались систематически в [1] и [6], а различные реализации дискретной теории Морса были рассмотрены также в [7]–[10].

В данной работе мы предлагаем метод вычисления чисел Бетти трехмерных тел. При этом тела задаются посредством объединения единичных кубиков с целочисленными координатами вершин в трехмерном евклидовом пространстве. Главной особенностью предложенного в этой статье подхода является

использование дискретных аналогов гладких функций (*от двух переменных*), *которые кроме стандартных невырожденных* (*морсовских*) *критических точек имеют также простейшие вырожденные критические точки* (*в нашем случае – точки типа “обезьянего седла”*).

Схема данного подхода следующая. Рассмотрим трехмерное тело – область M с границей – в трехмерном евклидовом пространстве. Мы рассматриваем критические точки некоторой дифференцируемой (гладкой) функции f, определенной на M, т.е. точки, в которых градиент функции равен нулю. Значения функции f в этих точках называются критическими. При переходе f через критические значения меняется топология “множества среза” $\{f \leq \mathrm{const}\}$. По критическим точкам строится цепной комплекс $C_* = C_0 \oplus C_1 \oplus C_2$ – градуированная коммутативная группа. Критическим точкам отвечают образующие комплекса C_*, как векторного пространства над полем $\mathbb{Z}_2$ из двух элементов. Невырожденной критической точке индекса i отвечает базисный элемент группы C_i, а вырожденной критической точке типа “обезьяньего седла” – два базисных элемента группы C_1. Градиентный поток функции f определяет граничные операторы – гомоморфизмы коммутативных групп ∂_i: $C_i \longrightarrow C_{i-1}$. Дальнейшая часть алгоритма является стандартной:

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11-01-12106-офи-м-2011) и Советом по грантам Президента РФ (проекты МД-249.2011.1 и НШ-544.2012.1).

поскольку ядро $\mathrm{Ker}\partial$ гомоморфизма $\partial\colon C_* \longrightarrow C_*$ содержится в его образе $\mathrm{Im}\partial$, корректно определены группы гомологий (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$) как фактор-пространства

$$H_i = \frac{\mathrm{Ker}(\partial_i : C_i \longrightarrow C_{i-1})}{\mathrm{Im}(\partial_i : C_{i+1} \longrightarrow C_i)}.$$

Размерность i-ой группы гомологий как векторного пространства над $\mathbb{Z}_2$ называется *i-ым числом Бетти пространства M* обозначается через b_i. Числа Бетти b_0, b_1, b_2, которые можно интерпретировать как число компонент связности, число линейно независимых одномерных циклов и число дыр в M, и альтернированная сумма $\chi = b_0 - b_1 + b_2$ являются основными топологическими инвариантами тела M.

Естественно, мы рассматриваем дискретизированную версию этого алгоритма. Следует отметить, что поскольку тело имеет размерность три, то нам достаточно ограничиться гомологиями с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ для полного описания гомологических характеристик тела M. Также мы можем воспользоваться двойственностью Александера и вычислять только гомоморфизм $\partial_1\colon C_1 \longrightarrow C_0$. Мы не будем здесь подробно вдаваться в обсуждение этих вопросов.

Поскольку мы будем рассматривать только ограниченные тела, то каждое из них будет рассматриваться как вложенное в некоторый куб K в трехмерном пространстве. Алгоритм вычисления матриц граничных операторов имеет сложность $O(n)$, где n – число вершин (точек с целочисленными координатами) в кубе K, а сложность нахождения чисел Бетти равна $O(n_c^3)$, где n_c – число критических точек функции f.

Замечание 1. Существует бесконечное число различных топологических типов критических точек аналитических функций от n ($n \geq 2$), и их классификация очень сложна, а морсовских особенностей – конечное число, и топологические перестройки поверхностей уровня функции для них полностью описаны. Поэтому в вычислительной топологии предполагалось использовать функции только с морсовскими особенностями для вычисления топологических характеристик (см. эту схему ниже). Но при дискретизации, как оказалось, классификация критических точек становится конечной, что совершенно естественно, и, описав топологические перестройки, отвечающие неморсовским критическим точкам, можно использовать и более общие функции для реализации указанной выше схемы, что мы и демонстрируем в размерности 3.

Замечание 2. Существуют алгоритмы нахождения чисел Бетти связных тел за асимптотически линейное по n количество операций[2)], существенно использующие специфику трехмерного случая (см., например, [11]). В реальных приложениях (в последующих работах авторов), в которых использовался наш подход, количество критических точек n_c мало по сравнению с n, что дает практическое преимущество. Более того, предложенный метод может быть обобщен на более высокие размерности.

2. КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ ДИАГОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ НА ЕВКЛИДОВОМ КУБЕ

Под элементарным интервалом $I \subset R$ будем понимать множество $I = [l, l+1]$, для некоторого $l \in \mathbb{Z}$. Аналогично, определяем элементарный квадрат $Q = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2$ и элементарный куб $C = I_1 \times I_2 \times I_3 \subset \mathbb{R}^3$, где I_k – элементарные интервалы.

Нашим основным объектом исследования является трехмерное тело M, являющееся объединением элементарных кубов, и лежащее строго внутри некоторой ограниченной области

$$K = [0, N] \times [0, N] \times [0, N] \subset \mathbb{R}^3,$$

для некоторого натурального N.

В действительности, мы будем вычислять гомологии не самого тела M, а построенного по нему тела $\tilde{M}$, которое получается расклеиванием общих вершин и граничных отрезков у таких пар элементарных кубиков, входящих в M, которые пересекаются только по этим общим вершинам или отрезкам.

[2)] Отметим, что сложность эффективных алгоритмов выделения связных компонент равна $O(n\,\alpha(n))$, где $\alpha(n)$ – медленно растущая функция, обратная к функции Аккермана.

Сделаем при этом два замечания: 1) рассмотрение тела $\tilde{M}$ связано с приложениями алгоритма[3)]; 2) само тело $\tilde{M}$, а точнее топологически эквивалентное ему тело, может быть реализовано объединением элементарных кубов в кубе K' большего размера, как показывает следующая конструкция. Рассмотрим

$$K' = [0, 3N] \times [0, 3N] \times [0, 3N]$$

и линейное отображение $P(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, 3x_2, 3x_3)$ из K в K'. Положим $M' = P(M)$, т.е. M' – это подразбиение M, при котором каждый элементарный отрезок разделяется на три, а каждый элементарный куб – на девять частей. Теперь удалим все элементарные кубы в M', прилегающие хотя бы одной гранью к границе $\partial M'$, получив новое кубическое множество $\tilde{M}$. В дальнейших рассуждениях мы предполагаем, что M уже получено, если это необходимо, в результате описанной предварительной обработки.

В качестве функции f, определенной на K, рассмотрим "диагональную" функцию

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3.$$

Как обычно, положим

$$M^a = \{\bar{x} \in M | f(\bar{x}) \le a\}.$$

Очевидно, что если $a_1 < a_2$ и множество $f^{-1}([a_1, a_2]) \cap M$ не содержит точек с целочисленными координатами, то M^{a_1} и M^{a_2} топологически эквивалентны (см., например, [4]). Таким образом, при непрерывном изменении параметра a от 0 до $3N$ изменение топологического типа M^a может происходить лишь при переходе a через значение вида $a = f(x_1, x_2, x_3)$, где $x_i \in \mathbb{Z}$.

Пусть k_1, k_2, k_3 – тройка целых чисел, такая, что $v = (k_1, k_2, k_3) \in K$. Положим

$$N(v) = \{\bar{x} \in M | |x_i - k_i| \le 1, i = 1, 2, 3\}.$$

Таким образом, $N(v)$ состоит из тех из восьми элементарных кубиков, окружающих точку v и лежащих в M. Для $a = f(v)$ и для $|b - a| < 1/6$ положим

$$N_v M^b = N(v) \cap M^b.$$

Будем называть точку $v \in M$ критической для функции f, если для достаточно малого положительного $\varepsilon < 1/6$ множества $N_v M^{a-\varepsilon}$ и $N_v M^{a+\varepsilon}$ не являются топологически эквивалентными.

Для того чтобы выяснить тип критической точки, мы кодируем кубики из $N(v)$ следующим образом. Окрестность состоит из восьми элементарных кубиков, по отношению к центральной целочисленной точке каждый кубик может быть определен изменениями трех координат, чьи значения больше, либо меньше внутри куба, чем в v. Таким образом, каждый кубик кодируется набором трех знаков "$\pm\pm\pm$". Кубик, отвечающий данному набору знаков, может либо лежать в M, либо нет. Значит можно сопоставить окрестности $N(v)$ пару матриц

$$\begin{pmatrix} t_{---} & t_{+--} \\ t_{-+-} & t_{++-} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_{--+} & t_{+-+} \\ t_{-++} & t_{+++} \end{pmatrix},$$

где $t_{***} = 1$, если куб лежит в M и $t_{***} = 0$ в противном случае.

Назовем критическую точку $v \in M$ невырожденной, если $N_v M^{a+\varepsilon}$ топологически устроено как тело $N_v M^{a-\varepsilon}$, к границе которого приклеена ручка индекса i, $i = 0, 1, 2$, т.е. выполняется одна из трех возможностей:

1) ("ручка" индекса 0) $N_v M^{a-\varepsilon}$ пусто и возникает новая компонента связности $N_v M^{a+\varepsilon}$;

2) ("ручка" индекса 1) окрестности двух точек на границе $N_v M^{a-\varepsilon}$ соединяются утолщенным отрезком (ручкой).

3) ("ручка" индекса 2) к трубчатой (ленточной) окрестности окружности, лежащей на границе $N_v M^{a-\varepsilon}$, приклеивается по своей боковой поверхности утолщенный двумерный диск, при этом граница диска приклеивается к окружности.

[3)] В дальнейших работах авторов описываемый нами алгоритм применяется для оценки топологических характеристик нефтяных коллекторов. Коллектор моделируется при помощи трехмерного тела, являющегося объединением трехмерных ячеек. При этом считается, что протекание нефти из одной ячейки в другую происходит только через общую двумерную грань; протекание через общее ребро или вершину отсутствует. Исходя из этих приложений, мы должны провести предварительную обработку M.

Таблица

№	Комбинаторный тип	Индекс
1	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$	0
2	$\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$	2
3	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$	1
4	$\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$	1
5	$\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$	1
6	$\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$	1
7	$\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$	1
8	$\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$	1
9	$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$	1
10	$\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$	1
11	$\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$	1
12	$\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$	1
13	$\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$	1
14	$\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$	1
15	$\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$	обезьяньe седло

В остальных случаях будем называть критическую точку вырожденной. Число i назовем индексом невырожденной критической точки.

Следующая теорема доказывается непосредственным перебором комбинаторных типов критических точек.

Теорема 1. *Все возможные комбинаторные типы критических точек описываются в таблице.*

Типы 1–14 *отвечают невырожденным критическим точкам. Последний тип отвечает “обезьяньему седлу” — в гладком случае оно может быть задано как критическая точка* $(x, y) = (0, 0)$ *функ-*

ции $f(x, y) = x^3 - xy^2$; *при переходе через эту точку происходит приклеивание двух ручек размерности один.*

Пусть M_i, $i = 0, 1, 2,$ – множества критических точек индекса i. Для каждого обезьяньего седла v добавим к M_1 две точки: саму точку v и ее формальный "дубль" v'. Для каждого $i = 0, 1, 2$ рассмотрим векторное пространство C_i над $\mathbb{Z}_2$ с базисными элементами из M_i. Чтобы построить цепной комплекс, по которому можно вычислять гомологии, необходимо построить граничные линейные операторы $\partial_1: C_1 \longrightarrow C_0$ и $\partial_2: C_2 \longrightarrow C_1$.

3. ГРАДИЕНТНЫЙ ПОТОК И ГРАНИЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Градиентный поток позволяет описать процесс приклейки ручек, что и дает возможность вычислить граничные операторы в цепном комплексе C_*. Под траекторией градиентного потока мы понимаем последовательность вершин M, по которым можно пройти, спускаясь по ребрам. Отличие от градиентного потока гладкой функции заключается в недетерминированности, т.е. из каждой вершины можно, вообще говоря, спуститься не в единственную вершину, лежащую на более низком уровне. Поскольку мы используем двойственность Александера, нам достаточно определить только градиентный спуск из критических точек индекса один в критические точки индекса нуль.

Напомним, что мы вычисляем гомологии с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}_2$, состоящем из двух элементов 0 и 1 со следующими правилами сложения: $0 + 0 = 1 + 1 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$.

Под касательным вектором $\xi = (v, e) \in TM$ мы будем понимать пару, состоящую из вершины v и ребра $e \ni v$, лежащих в M. Мы будем называть ξ возрастающим, если другой конец ребра e расположен на более высоком уровне функции f, в противном случае, вектор назовем *убывающим*. Кроме того, на множестве касательных возрастающих (убывающих) векторов в данной точке фиксируем естественный порядок: ребро всегда касательно одному из трех координатных направлений, которые упорядочены стандартным образом.

Пусть v – критическая точка функции f. Если v – точка индекса нуль, то в точности три касательных вектора выходят из v, и все они возрастающие. Если v – невырожденная критическая точка индекса один, то ребру каждого убывающего касательного вектора, выходящего из v, припишем метку S, принимающую значение $+1$ или -1 следующим образом. Список всех типов критических точек показывает, что все такие ребра лежат на границе M и их не менее двух. Если имеется ровно два ребра, то одно из них пометим знаком $S = +1$, другое – знаком $S = -1$. Если ребра три, то два из них обязательно принадлежат элементарному квадрату, лежащему на краю M. Тогда эти два мы пометим одним знаком (например, $S = +1$), а оставшееся – знаком $S = -1$.

Обезьянье седло. Если v – обезьянье седло, то, как сказано выше, нами добавлена фиктивная точка v', находящаяся выше v по уровню функции f, добавим также фиктивное ребро vv', соединяющее v и v'. Тогда объявим векторы $(v', (1, 0, 0))$, $(v', (0, 1, 0))$, $(v, (0, 0, 1))$ и (v, vv') возрастающими. Соответственно, убывающими назовем векторы $(v', (0, 0, -1))$, $(v', v'v)$, $(v, (-1, 0, 0))$ и $(v, (0, -1, 0))$ (здесь мы считаем, что конец каждого ненулевого вектора $(v', (\alpha, \beta, \gamma))$ совпадает с концом вектора $(v, (\alpha, \beta, \gamma))$, $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, \pm 1\}$.

Пусть v – критическая точка индекса нуль и v' – критическая точка индекса один. Пару касательных векторов $\xi = (v, e)$, $\xi' = (v', e')$ будем называть *градиентной*, если ξ – возрастающий вектор, ξ' – убывающий вектор и выполнены условия: существует последовательность возрастающих касательных векторов (e_i, v_i), $i = 0, \ldots, k$, такая, что $e_0 = e$, $v_0 = v$, ребро e_i соединяет концы v_i и v_{i+1} и $e_k = e'$, и для любой вершины v_i, вектор (v, e_i) по своему порядку превосходит все остальные возрастающие векторы, выходящие из данной вершины, и лежащие в M.

В описанной ситуации (и только в ней) будем писать $\xi < \xi'$. Назовем градиентным потоком функции f на M совокупность градиентных пар касательных векторов:

$$GF(M) = \{(\xi_1, \xi_2) | \xi_i \in TM, i = 1, 2, \xi_1 < \xi_2\}.$$

Путем в M будем называть совокупность последовательно проходимых ребер в M. Путь $e_0, \ldots, e_k$, образованный ребрами e_i из определения градиентной пары векторов, будем называть градиентным.

Определим линейный граничный оператор $\partial_1: C_1 \longrightarrow C_0$ по формуле:

$$\partial_1(v_1) = v_0^+ + v_0^-, \quad v_1 \in M_1,$$

где

$$v_0^+ \in \{ v \in M_0 | \exists \xi = (v, e), \exists \xi_1 = (v_1, e_1), S(e_1) = +1, \xi < \xi_1 \},$$

$$v_0^- \in \{ v \in M_0 | \exists \xi = (v, e), \exists \xi_1 = (v_1, e_1), S(e_1) = -1, \xi < \xi_1 \}.$$

Напомним, что M_0 и M_1 – множества критических точек индексов 0 и 1.

Заметим, что данное определение корректно, поскольку из любой точки индекса один выходят два убывающих касательных вектора, помеченных разными знаками. При этом возможность спуска есть до тех пор, пока мы (за конечное число шагов) не достигнем критической точки индекса нуль. Кроме того, вершины v_0^+ и v_0^- определены однозначно, поскольку спускаясь, мы всегда выбираем касательный вектор наибольшего порядка. Далее, если рассмотреть градиентные пути γ_1, γ_1', спускающиеся к v_0^+ и v_0^-, то вместе они образуют путь, окрестность которого представляет собой ручку индекса один, которая приклеивается при переходе функции f через значение $f(v_1)$ (см. разд. 2).

Рассмотрим трехмерное тело $M' = K \backslash M$ – дополнение к M, и функцию $h = -f$ на нем. Очевидно, что $M_i' = M_{2-i}$, $i = 1, 2$; $M_0' = M_2 \cup \{p_0\}$, где p_0 – угловая точка куба K, в которой функция h принимает минимальное значение. Пусть C_i' – векторное пространство над $\mathbb{Z}_2$, порожденное элементами M_i'. Имеют место изоморфизмы $C_i' = C_{2-i}$, $i = 1, 2$, и $C_0' = C_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, где компонента $\mathbb{Z}_2$ порождена точкой p_0. Применяя конструкцию оператора ∂_1 к h, получаем граничный оператор ∂_{1h}: $C_1' \longrightarrow C_0'$. Рассмотрим двойственные пространства $C_i'^*$, $i = 1, 2$, состоящие из линейных функций на C_i' со значениями в $\mathbb{Z}_2$. Имеют место изоморфизмы $C_i'^* = C_i'$, сопоставляющие каждой функции на C_i' формальную сумму тех точек из M_i', на которых данная функция не обращается в нуль. Оператор ∂_{1h} определяет сопряженный оператор

$$\delta_0 = \partial_{1h}^* : C_0'^* = C_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \longrightarrow C_1'^* = C_1.$$

Положим

$$\partial_2 = \delta_0|_{C_2} : C_2 \longrightarrow C_1.$$

Теорема 2. *Гомологии цепного комплекса $C_* = (C_i, \partial_i)$ совпадают с гомологиями пространства M с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$: $H_i(C_*) = H_i(M, \mathbb{Z}_2)$, $i = 0, 1, 2$.*

Доказательство. Для каждой критической точки индекса один существуют два пути, которые спускаются в критические точки индекса нуль, такие что каждый идет в направлении, помеченном разными значениями S. Это означает, что объединение этих двух путей дает нам путь, соединяющий две критические точки индекса нуль. Следовательно, формальная сумма этих точек лежит в образе ∂_1. Используя стандартные соображения из теории Морса, можно легко доказать, что если две критические точки индекса нуль лежат в одной компоненте связности, то они соединены цепочкой таких пар градиентных путей. Поскольку в каждой компоненте связности M существует хотя бы одна критическая точка индекса нуль, то мы получили, что $H_0(M) = C_0/\mathrm{Im}(\partial_1)$. Аналогично, $H^0(M') = \mathrm{Ker}(\delta_0)$. Тогда $\tilde{H}^0(M') = \mathrm{Ker}(\partial_2)$. Напомним, что приведенные группы гомологий $\tilde{H}_i$ удовлетворяют следующим равенствам: $\tilde{H}_i(M) = H_i(M)$ для $i > 0$ и $H_0(M) = \tilde{H}_0(M) \oplus \mathbb{Z}_2$; приведенные группы когомологий удовлетворяют аналогичным равенствам.

Далее нам понадобится следующая теорема двойственности Александера (см., например, [12]).

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ – компактный полиэдр. Тогда имеет место изоморфим:

$$\tilde{H}_q(\mathbb{R}^n - A; \mathbb{Z}_2) = \tilde{H}^{n-q-1}(A; \mathbb{Z}_2).$$

В силу двойственности и принятых нами определений, группа гомологий $H_2(M) = \tilde{H}_2(M) = \tilde{H}^0(M') = \mathrm{Ker}(\partial_2)$. Таким образом, 0-я и 2-я группы гомологий комплекса C_* совпадают с соответствующими группами гомологий пространства M.

Эйлерова характеристика $\chi(M)$ пространства M равна альтернированной сумме клеток любого клеточного разбиения деформационного ретракта пространства M и, в частности, $\chi(C_*)$, а также альтернированной сумме чисел Бетти, т.е. $b_0 - b_1 + b_2$. Поскольку $\chi(C_*) = b_0(C_*) - b_1(C_*) + b_2(C_*)$, мы имеем

$$\chi(M) = \chi(C_*).$$

Осталось заметить, что $b_1(M) = b_0(M) + b_2(M) - \chi(M) = b_0(C_*) + b_2(C_*) - \chi(C_*) = b_1(C_*)$, откуда $H_1(M) = H_1(C_*)$, поскольку мы рассматриваем гомологии над полем. Теорема доказана.

4. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Описанный выше подход может быть алгоритмизирован следующим образом. На входе имеем массив $M = M[i, j, k]$, где $i, j, k = 1...N$, состоящий из нулей и единиц, причем наше трехмерное тело M мы отождествляем с объединением тех элементарных кубов $[i, i + 1] \times [j, j + 1] \times [k, k + 1]$, для которых $M[i, j, k] = 1$.

Этап предварительной обработки заключается в следующем. Растягиваем массив M в три раза в каждом направлении, т.е. заменяем его массивом M', $M[i, j, k] = M'[3i + i_1, 3j + 3j_1, 3k + k_1]$, i_1, j_1, $k_1 = 0, 1, 2$, $i, j, k = 1, ..., N$. Далее, присваиваем нулевые значения тем элементам $M'[i, j, k]$, которые (если их интерпретировать как кубы $[i, i + 1] \times [j, j + 1] \times [k, k + 1]$) пересекаются с границей тела M' по целой квадратной грани.

На входе основного алгоритма имеем предварительно обработанный массив M. На выходе мы получаем списки $C0$, $C1$ критических точек индексов 0 и 1 (как описано выше, каждое “обезьянье седло” дает вклад в $C1$ в виде двух точек индекса один; эти списки задают базисы в группах C_0 и C_1) и матрицу $D = D[i, j]$, задающую граничный оператор ∂_1.

С каждой вершиной v мы свяжем формально сопряженную с ней вершину v'. Рассмотрим функцию Ind, которая для каждой вершины $v \in M$ возвращает либо ее индекс (если она является невырожденной критической индекса 0 или 1), либо значение -1, если она является “обезьяньим седлом”, либо -2, в остальных случаях. В списке $C0$ хранятся критические точки индекса 0, а в списке $C1$ – критические точки индекса 1 и точки v и v' для каждого “обезьяньего седла” v. Функция Num возвращает номер критической точки индекса i в списке Ci. Каждой вершине v сопоставляется число $GF(v)$ – номер некоторой критической точки индекса нуль, к которой можно спуститься из точки v. Наконец, для каждой вершины v функции Down_1 и Down_2 возвращают концы убывающих касательных векторов с началом v (Down_1 отвечает самому старшему вектору), или пустые значения, если таких векторов нет. При этом для критических точек индекса 1 функции Down_1 и Down_2 возвращают вершины, отвечающие убывающим векторам разных знаков. Если v – “обезьянье седло”, то мы считаем (в обозначениях предыдущего параграфа), что Down_1(v) и Down_2(v) – это вершины, находящиеся ниже v по направлению векторов $(-1, 0, 0)$ и $(0, -1, 0)$, соответственно. Для сопряженной вершины, Down_1(v') = v, а Down_2(v') – это вершина, находящаяся ниже v по направлению вектора $(0, 0, -1)$. Ниже приведено описание алгоритма.

Алгоритм

Input: предварительно обработанный массив M.

Output: списки критических точек $C0$ и $C1$, матрица D граничного оператора.

1: $D := 0$; $C0 = \varnothing$; $C1 = \varnothing$

2: **for** вершины $v \in M$ **do**

3: **if** Ind(v) = 0 **then** Add($C0$, v)

4: $GF(v) := \{\mathrm{Num}(v)\}$

5: **if** Ind(v) = 1 **then** Add($C1$, v)

```
            GF(v) := GF(Down_1(v))
            if GF(Down_1(v)) ≠ GF(Down_2(v))
               then D(Num(v), Num(GF(Down_1(v)))) := 1
                    D(Num(v), Num(GF(Down_2(v)))) := 1
if Ind(v) = −1 then Add(C1, v)
            Add(C1, v')
            GF(v) := GF(Down_1(v))
            GF(v') := GF(Down_1(v))
            if GF(Down_1(v)) ≠ GF(Down_2(v))
               then D(Num(v), Num(GF(Down_1(v)))) := 1
                    D(Num(v), Num(GF(Down_2(v)))) := 1
            if GF(Down_1(v')) ≠ GF(Down_2(v'))
               then D(Num(v'), Num(GF(Down_1(v')))) := 1
                    D(Num(v'), Num(GF(Down_2(v')))) := 1
if Ind(v) = −2 then GF(Down_1(v))
```

Дважды применив этот алгоритм к M и к его дополнению M', получим матрицы $D1$ и $D2$ граничных операторов ∂_1 и ∂_2. После этого числа Бетти находятся по формулам

$$b_0 = \dim(C0) - \operatorname{rank}(D1),$$

$$b_1 = \dim(C1) - \operatorname{rank}(D1) - \operatorname{rank}(D2), \quad b_2 = \dim(C2) - \operatorname{rank}(D2).$$

Сложность алгоритма построения матрицы граничных операторов (включая предварительную обработку) равна $O(n)$, где $n = N^3$ — число вершин в K. Для последующего вычисления чисел Бетти необходимо вычислять ранги матриц Di (например, методом Гаусса), что требует $O(n_c^3)$ операций, где n_c — общее число критических точек. Связь чисел n и n_c в общем случае зависит от исходных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Edelsbrunner H., Harer J., Zomorodian A.J.* Hierarchical Morse-smale complexes for piecewise linear 2-manifolds // In AMC Symposium on Comput. Geometry, Discrete & Comput. Geom. 2003. V. 30. № 1. P. 87–107.
2. *Kaczynski T., Mischaikow K., Mrozek M.* Computational Homology // Appl. Math. Sci. Series 157. New York: Springer, 2004.
3. *Zomorodian Afra J.* Topology for computing. Cambridge University Press, 2005.
4. *Морс М.* Вариационное исчисление в целом. ИКИ. М.–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010.
5. *Милнор Дж.* Теория Морса. М.: Мир, 1965.
6. *Forman R.* Morse theory for cell complexes // Advances in Math. 1998. V. 134. P. 90–145.
7. *Allili M., Corriveau D., Derivi’ere S. et al.* Discrete dynamical system framework for construction of connections between critical regions in lattice height data // J. Math. Imaging and Vision. 2007. V. 28. № 2. P. 99–111.
8. *Corriveau D., Allili M., Ziou D.* Morse connections graph for shape representation // Advanc. Concepts for Intelligent Vision Systems. Lect. Notes in Comput. Sci. 2005. V. 3708. P. 219–226.
9. *Gyulassy A., Bremer P.-T., Hamann B., Pascucci V.* A practical approach to morse-smale complex computation: scalability and generality // IEEE Trans Vis Comput Graph. 2008. V. 14. № 6. P. 1619–1626.
10. *De Floriani L., Mesmoudi M.M., Donovaro E.* Extraction of critical nets based on a discrete gradient vector field // Eurographics 2002. Geometric Algorithms and Visibility. https://diglib.eg.org/EG/DL/Conf/EG2002/short/short86.pdf
11. *Chen L., Rong Y.* Digital topological method for computing genus and the Betti numbers // Topology and its Appl. 2010. V. 157. P. 1931–1936.
12. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.