ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2014. Т. 45. ВЫП. 3

НЕКОМПАКТНЫЕ РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА С ГРУППАМИ ГОЛОНОМИИ G_2, $\mathrm{Spin}(7)$ И $SU(2m)$

Е. Г. Малькович *

Новосибирский государственный университет,
Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия

*Автор поддержан грантом Президента РФ НШ-544.2012.1 и грантом Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (Соглашение № 14.B25.31.0029).

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2014. Т. 45. ВЫП. 3

НЕКОМПАКТНЫЕ РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА С ГРУППАМИ ГОЛОНОМИИ G_2, $\mathrm{Spin}(7)$ И $SU(2m)$

Е. Г. Малькович *

Новосибирский государственный университет,
Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия

Обзор содержит описание результатов автора по построению римановых метрик со специальными группами голономии на некомпактных многообразиях. Детально описывается, как свести условие на группу голономии быть исключительной к системе ОДУ. Описано поведение траекторий и способы разрешения особенностей данных систем, изучены конкретные примеры. Введение и разд. 1 содержат необходимые определения и общеизвестные результаты, касающиеся групп голономии. Заключение содержит описание других результатов, полученных благодаря той же технике, и минимальный обзор по лоренцевым группам голономии.

The survey contains a description of the author's results on constructing Riemannian metrics with exceptional holonomies on noncompact manifolds. We give detailed description of how to reduce a condition of the holonomy to be exceptional to a system of ODE. We describe a behavior of the trajectories and the ways to resolve singularities of such systems, concrete examples were studied. Introduction and Sec. 1 contain necessary definitions and well-known facts about holonomies. Conclusion contains a description of other results proved with help of the same technique and a minimal survey on Lorentzian holonomies.

PACS: 02.20.-a; 02.40.Ky

ВВЕДЕНИЕ

Обзор посвящен методам построения и исследования метрик со специальными группами голономии. Нами были изучены отдельные вопросы существования метрик с группами голономии G_2, $\mathrm{Spin}(7)$ и $SU(2n)$ на конусах над некоторыми «хорошими» многообразиями. В частности, была проинтегрирована система, эквивалентная существованию параллельной G_2-структуры на конусе над твисторным пространством семимерного 3-сасакиева многообразия $\mathcal{M}$, чей кватернионно-кэлеров орбифолд обладает кэлеровой структурой, и изучены конкретные примеры. Изучено поведение решений специального

*Автор поддержан грантом Президента РФ НШ-544.2012.1 и грантом Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (Соглашение № 14.B25.31.0029).

вида (а именно асимптотически локально конических) у системы, эквивалентной существованию параллельной $\mathrm{Spin}(7)$-структуры на конусе над $\mathcal{M}$; найдено однопараметрическое семейство метрик, «соединяющее» восьмимерные метрики Калаби, изучена топология пространств, на которых определены найденные метрики. Найденное семейство обобщено на случай произвольной размерности вида $4m$, изучена топология соответствующих пространств.

Напомним основные понятия и определения. Группа голономии — это инвариант n-мерного ориентируемого риманова (или лоренцева) многообразия, являющийся группой Ли, а именно подгруппой в $SO(n)$ (или, соответственно, $SO(1, n-1)$). Грубо говоря, группа голономии порождена параллельными переносами (относительно связности Леви-Чивита) вдоль всевозможных петель с началом и концом в отмеченной точке. Если вспомнить, что значение тензора Римана $R(X,Y)Z$ — это вектор W, получающийся из Z параллельным переносом вдоль бесконечно малого параллелограмма со сторонами X, Y, $-X$ и $-Y$, то связь голономии и кривизны пространства становится более понятной. Если многообразие неодносвязно, то группа голономии Hol, порожденная всеми петлями, отличается от суженной группы голономии Hol^0, порожденной только стягиваемыми петлями. Но при этом существует сюръективный гомоморфизм $\pi_1 \to \mathrm{Hol}/\mathrm{Hol}^0$, и чаще всего исследуют односвязные многообразия, когда $\mathrm{Hol} = \mathrm{Hol}^0$. Группу голономии можно естественным образом определить и в более общем случае: когда рассматривается произвольное векторное расслоение со связностью; мы данного вопроса никак касаться здесь не будем. В англоязычной литературе термин «holonomy» встречается значительно чаще, чем «holonomy group» или «group of holonomy», поэтому мы не будем различать термины «группа голономии» и «голономия».

В 1955 г. Берже доказал теорему, в которой перечислил все возможные группы голономии риманова многообразия. Среди этого списка выделяются группы G_2 и $\mathrm{Spin}(7)$, метрики с соответствующими группами называются исключительными или экзотическими (exceptional). Достаточно долго стоял вопрос о конкретных примерах метрик с данными группами голономии, так как список Берже состоял только из возможных претендентов. Теорема существования компактных (определенных на компактном многообразии) экзотических метрик была доказана в 1996 г. Джойсом [27]. Доказательство данной теоремы основано на довольно тонком аппарате специальных соболевских пространств, но описать найденные метрики конструкция Джойса не позволяет. Ковалевым был построен пример метрик с группой голономии G_2 на связной сумме двух компактных многообразий, при этом была использована теорема о склейке решений эллиптических уравнений. Данная теорема также основана на оценках в специальных соболевских пространствах [30]. К настоящему времени примеры Джойса и Ковалева являются единственными примерами компактных многообразий с исключительными группами голономии.

Интерес к некомпактным примерам возник относительно недавно со стороны математической физики. Было предложено использование некомпактных метрик с группами голономии $\mathrm{Spin}(7)$ в так называемой M-теории. В работах Гиббонса, Лю, Поупа, Светича, Канно и др. был построен ряд новых примеров полных метрик на пространствах, часть которых является не многообразиями, а орбифолдами. Все эти метрики автоматически являются риччи-плоскими и асимптотически ведут себя как конусы либо как произведения конусов на окружности.

В частности, в работе [20] Светич, Гиббонс, Лю и Поуп исследуют вопрос существования метрик с голономией $\mathrm{Spin}(7)$ на конусе над семимерной сферой и над пространством Алоффа–Уоллаха; они изучают с помощью численных методов полученную систему дифференциальных уравнений и получают некоторые частные решения. В той же работе ведется поиск метрик с голономией G_2 на конусе над $S^3 \times S^3$. В работе [21] те же авторы строят асимптотически локально коническую (АЛК) метрику с голономией $\mathrm{Spin}(7)$ на пространстве, вне начальной точки гомеоморфном $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}P^3 \times S^1$, где S^1 — окружность «постоянного на бесконечности» радиуса, $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}P^3$ — конус над $\mathbb{C}P^3$ с нестандартной метрикой. В работе [22] они развивают свои методы и находят новые метрики с другим поведением на бесконечности — найденные метрики определены либо на $\mathbb{R}^8$, либо на $\mathbb{R}^4 \times S^4$.

В работе [25] Гуков и Спаркс независимо от предыдущего коллектива авторов находят метрики с голономией $\mathrm{Spin}(7)$ на $\mathbb{R}^4$-расслоениях над S^4 и дают физическую интерпретацию найденным геометрическим структурам в терминах M-теории, которых мы здесь не касаемся.

Канно и Ясуи в работе [28] искали метрики с голономией $\mathrm{Spin}(7)$ на конусе над пространством Алоффа–Уоллаха. В работе [29] они использовали тот факт, что оно расслаивается над $\mathbb{C}P^2$, и ими было найдено решение (4) в этом частном случае.

Первым примером полной римановой метрики с группой голономии $SU(n)$ явилась метрика Калаби, найденная в [17] в 1979 г. Метрика Калаби строится на пространстве соответствующего линейного комплексного расслоения над произвольным многообразием Кэлера–Эйнштейна F. В той же работе [17] Калаби исследует гиперкэлеровы метрики и строит в явном виде полную риманову метрику с группой голономии $Sp(m)$ на $T^*\mathbb{C}P^m$ — первый явный пример гиперкэлеровой метрики. Необходимо отметить, что метрики Калаби были описаны более удобным способом в работах [32] и [19].

Исследование вопроса о существовании некомпактных примеров представляет интерес для геометрии (и теоретической физики), поскольку нельзя исключить возможность построения компактных примеров из некомпактных при помощи конструкции, схожей с конструкцией Куммера, позволяющей склеивать компактные многообразия из некомпактных кусков, при условии подходящего поведения метрик на бесконечности.

Разд. 1 является вводным. В нем мы приводим основные определения и факты, необходимые для дальнейшего изложения. П. 1.1 касается групп голономии римановых многообразий; в п. 1.2 излагаются основные факты о геометрии 3-сасакиевых многообразий; п. 1.3 содержит определение геометрических структур на орбифолдах. Разд. 1 содержит лишь необходимые понятия и утверждения и не претендует на какую-либо полноту.

В разд. 2 мы приводим общую конструкцию, которая позволяет строить метрики с группой голономии G_2 по заданному 3-сасакиеву 7-мерному многообразию M. Рассмотрим 3-сасакиево многообразие M, на нем свободно действует группа S^1, порождаемая одним из характеристических полей, фактор-пространство $M/S^1 = \mathcal{Z}$ — шестимерный орбифолд, обладающий метрикой Кэлера–Эйнштейна. Конус над $\mathcal{Z}$ будет иметь группу голономии G_2, если функции, отвечающие за деформацию конусной метрики, удовлетворяют определенной системе нелинейных дифференциальных уравнений. Чтобы метрика была полной, необходимо выполнение краевых условий. За деформацию отвечают функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, зависящие от радиальной переменной t, меняющейся вдоль образующей конуса:

$$\bar{g} = dt^2 + A(t)^2(\eta_2^2 + \eta_3^2) + B(t)^2(\eta_4^2 + \eta_5^2) + C(t)^2(\eta_6^2 + \eta_7^2), \qquad (1)$$

где η_2, η_3 — характеристические 1-формы M, а η_4, η_5, η_6, η_7 — формы, аннулирующие 3-сасакиево слоение на M.

Основным результатом п. 2.1 является лемма 2.1: если кватернионно-кэлеров орбифолд $\mathcal{O} = M/SU(2)$ обладает кэлеровой структурой, то (1) является метрикой с группой голономии G_2 тогда, и только тогда, когда функции A, B, C удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} A' &= \frac{2A^2 - B^2 - C^2}{BC}, \\ B' &= \frac{B^2 - C^2 - 2A^2}{CA}, \\ C' &= \frac{C^2 - 2A^2 - B^2}{AB}. \end{aligned} \qquad (2)$$

В частности, метрика (1) является риччи-плоской. Ранее система (2) была получена в [20] в частном случае $M = SU(3)/S^1$.

Для того чтобы решение системы (2) было определено на некотором орбифолде либо многообразии, необходимо дополнительное выполнение краевых условий в точке t_0, которые мы формулируем в лемме 2.2. Эти условия не могут быть выполнены, кроме случая $B = C$, который приводит нас к функциям, дающим решения, найденные впервые в [15] в случае $M = S^7$

и $M = SU(3)/S^1$. В случае $B = C$ метрика (1) определена на тотальном пространстве $\mathbb{R}^3$-расслоения $\mathcal{N}$ над кватернионно-кэлеровым орбифолдом $\mathcal{O}$. Вообще говоря, $\mathcal{N}$ является орбифолдом, кроме случая $M = S^7$ и $M = SU(3)/S^1$.

В п. 2.2 мы рассматриваем известные примеры 3-сасакиевых многообразий, построенные в [13] с помощью взвешенного действия окружности на $SU(3)$, и описываем в лемме 2.3 и следствии 2.1 топологию твисторного пространства $\mathcal{Z}$, топологически эквивалентного расслоению $\mathcal{N}$.

В разд. 3 мы строим в явной, алгебраической форме однопараметрическое семейство полных римановых метрик, «соединяющих» гиперкэлерову метрику Калаби и метрику Калаби с голономией $SU(4)$ в пространстве специальных кэлеровых метрик в размерности восемь в случае, когда F является многообразием комплексных 3-флагов в $\mathbb{C}^3$. В этом случае четырехмерное кватернионно-кэлерово многообразие $\mathcal{O}$, связанное с F, допускает «расщепление» касательного расслоения, что позволяет ввести дополнительный параметр деформации метрики и решить в элементарных функциях возникающую систему уравнений.

Более точно, пусть $M = SU(3)/U(1)_{1,1,-2}$ — пространство Алоффа–Уоллаха со структурой 3-сасакиева 7-мерного многообразия. На $\bar{M} = M \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим риманову метрику следующего вида:

$$dt^2 + A_1(t)^2\eta_1^2 + A_2(t)^2\eta_2^2 + A_3(t)^2\eta_3^2 + B(t)^2(\eta_4^2 + \eta_5^2) + C(t)^2(\eta_6^2 + \eta_7^2), \quad (3)$$

где t — координата на $\mathbb{R}_+$; $\{\eta_i\}$ — ортонормированный корепер на M, согласованный с 3-сасакиевой структурой (подробности в п. 3.1). Конусную особенность (при $t = 0$) пространства $\bar{M}$ можно разрешить следующим образом: затянем на уровне $\{t = 0\}$ каждую отвечающую ковектору η_1 окружность в точку. Полученное многообразие, профакторизованное по $\mathbb{Z}_2$, диффеоморфно $H/\mathbb{Z}_2$ — квадрату канонического комплексного линейного расслоения над пространством флагов в $\mathbb{C}^3$. В п. 3.2 мы приводим доказательство и уточненную формулировку следующей теоремы:

Теорема 3.1. *При $0 \leqslant \alpha < 1$ каждая риманова метрика из семейства*

$$\bar{g}_\alpha = \frac{r^4(r^2-\alpha^2)(r^2+\alpha^2)}{r^8 - 2\alpha^4(r^4-1) - 1}dr^2 + \frac{r^8 - 2\alpha^4(r^4-1) - 1}{r^2(r^2-\alpha^2)(r^2+\alpha^2)}\eta_1^2 + \\ + r^2(\eta_2^2+\eta_3^2) + (r^2+\alpha^2)(\eta_4^2+\eta_5^2) + (r^2-\alpha^2)(\eta_6^2+\eta_7^2) \quad (4)$$

является полной гладкой римановой метрикой на $H/\mathbb{Z}_2$ с группой голономии $SU(4)$. При $\alpha = 0$ метрика (4) изометрична метрике Калаби [17] с группой голономии $SU(4)$; при $\alpha = 1$ метрика (4) изометрична метрике Калаби [17] с группой голономии $Sp(2) \subset SU(4)$ на $T^*\mathbb{C}P^2$.

Отметим, что метрика (4) в теореме 3.1 при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ имеет форму, отличную от [17]; метрики Калаби в рассматриваемом виде исследовались в [32] и [19].

Этот результат получен нами при систематическом изучении метрик вида (3), имеющих группу голономии $\mathrm{Spin}(7)$ методом, разработанным в [1] и применявшимся затем в [5, 2]: метрика (3) строится по произвольному 7-мерному 3-сасакиеву многообразию M и обладает естественной $\mathrm{Spin}(7)$-структурой. В лемме 3.1 мы показываем, что условие параллельности этой структуры сводится к следующей системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
A_1' &= \frac{(A_2-A_3)^2-A_1^2}{A_2A_3} + \frac{A_1^2(B^2+C^2)}{B^2C^2},\\
A_2' &= \frac{A_1^2-A_2^2+A_3^2}{A_1A_3} - \frac{B^2+C^2-2A_2^2}{BC},\\
A_3' &= \frac{A_1^2+A_2^2-A_3^2}{A_1A_2} - \frac{B^2+C^2-2A_3^2}{BC},\\
B' &= -\frac{CA_1+BA_2+BA_3}{BC} - \frac{(C^2-B^2)(A_2+A_3)}{2A_2A_3C},\\
C' &= -\frac{BA_1+CA_2+CA_3}{BC} - \frac{(B^2-C^2)(A_2+A_3)}{2A_2A_3B}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

(отметим, что система (5) при $B = C$ полностью исследована в [1, 2]). Для получения гладкой метрики (3) необходимо разрешить конусную особенность на $\bar{M}$ одним из двух способов, получив пространства $\mathcal{M}_1$ или $\mathcal{M}_2$. Эта схема описывается в п. 3.1 обзора, условия для разрешения конусной особенности в случае $\mathcal{M}_2$ мы формулируем в лемме 3.2. Тогда семейство метрик (4) на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_2$ получается интегрированием системы (5) при $A_2 = -A_3$.

В заключительном п. 3.3 приводится схема доказательства следующей теоремы, завершающей исследование системы (5) в случае пространства $\mathcal{M}_2$:

Теорема 3.2. *Пусть M — 7-мерное компактное 3-сасакиево многообразие, и положим $p = 2$ или $p = 4$ в зависимости от того, равен общий слой 3-сасакиева слоения M либо $SO(3)$, либо $SU(2)$. Тогда на орбифолде $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ существуют следующие полные регулярные римановы метрики $\bar{g}$ вида (3) с группой голономии $H \subset \mathrm{Spin}(7)$:*

1) если $A_1(0) = 0$, $-A_2(0) = A_3(0) > 0$ и $2A_2^2(0) = B^2(0) + C^2(0)$, то метрика $\bar{g}$ из (3) имеет группу голономии $SU(4) \subset \mathrm{Spin}(7)$ и гомотетична одной из метрик семейства (4);

2) если $A_1(0) = 0$, $-A_2(0) = A_3(0) < B(0) = C(0)$, то существует регулярная АЛК-метрика $\bar{g}$ вида (3) с группой голономии $\mathrm{Spin}(7)$, найденная *в [1]. На бесконечности эти метрики стремятся к произведению конуса над твисторным пространством $\mathcal{Z}$ и окружности S^1.*

Более того, любая полная регулярная метрика на пространстве $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ вида (3) с рассмотренной $\mathrm{Spin}(7)$-структурой и с группой голономии $H \subset \mathrm{Spin}(7)$ изометрична одной из указанных выше.

В разд. 4 мы ставим вопрос об обобщении построенного в разд. 3 однопараметрического семейства метрик на случай общей размерности вида $4m$, так как обе метрики Калаби (впервые построенные в [17]) определены не только в размерности восемь, но и во всех размерностях, кратных четырем. Мы даем положительный ответ на данный вопрос и доказываем следующую теорему:

Теорема 4.1. *Следующее семейство состоит из полных, риччи-плоских $4(n+1)$-мерных римановых метрик:*

$$\bar{G}_\alpha = \frac{r^4(r^4-\alpha^4)^n}{(r^4-\alpha^4)^{n+1}-(1-\alpha^4)^{n+1}}\,dr^2 + \frac{(r^4-\alpha^4)^{n+1}-(1-\alpha^4)^{n+1}}{r^2(r^4-\alpha^4)^n}\,\eta_1^2 +$$
$$+ r^2(\eta_2^2+\eta_3^2) + (r^2+\alpha^2)\sum_{\beta=1}^{n}(\eta_{4\beta}^2+\eta_{5\beta}^2) + (r^2-\alpha^2)\sum_{\beta=1}^{n}(\eta_{6\beta}^2+\eta_{7\beta}^2),$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $r \geqslant 1$. Метрики $\bar{G}_0$ и $\bar{G}_1$ имеют группы голономии $SU(2(n+1))$ и $Sp(n+1)$ соответственно и совпадают с многомерными метриками Калаби из [17]. Метрики $\bar{G}_\alpha$ при $0 < \alpha < 1$ имеют группу голономии $SU(2(n+1))$ и при $n = 1$ совпадают с семейством, построенным в разд. 3. При $0 \leqslant \alpha < 1$ метрики $\bar{G}_\alpha$ определены на $(n+1)$-й тензорной степени линейного комплексного расслоения над пространством комплексных флагов в $\mathbb{C}^{2n+1}$, метрика $\bar{G}_1$ определена на $T^*\mathbb{C}P^{n+1}$.

Отметим, что обозначение $m = n+1$ принято для удобства и ради согласования со статьей [19].

1. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Группы голономии. Пусть M — риманово n-мерное многообразие с метрикой g. Существует единственная связность ∇ без кручения на TM, такая что $\nabla g = 0$, более известная как связность Леви-Чивита.

Пусть $\gamma : [0,1] \to M$ — кусочно-гладкая кривая, такая что $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$ для некоторых $x, y \in M$. Тогда для любого касательного вектора $e \in T_xM$ существует единственное гладкое сечение s, такое что $\nabla_{\dot\gamma(t)} s(t) = 0$ и $s(0) = e$. Определим $P_\gamma(e) = s(1)$. Тогда $P_\gamma : T_xM \to T_yM$ — корректно определенное линейное отображение, называемое параллельным переносом. Петлей называют кривую, у которой начало и конец совпадают: $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Определим *группу голономии* следующим образом:

$$\mathrm{Hol}_x(\nabla) = \{P_\gamma \colon \gamma(0) = \gamma(1) = x\} \subset O(n).$$

Аналогичным образом можно определять группу голономии и для произвольной связности, нас будет интересовать только риманов случай. Группа голономии обладает следующими свойствами. Во-первых, она является подгруппой Ли в $O(n)$. Во-вторых, она не зависит от отмеченной точки x в том смысле, что группы голономии, отвечающие разным точкам из M, сопряжены в $O(n)$.

Говорят, что риманово многообразие (M, ds^2_M) (локально) приводимо, если у каждой точки существует окрестность, изометричная риманову произведению $(P \times Q, ds^2_P + ds^2_Q)$. M неприводимо, если оно не является локально приводимым. Очевидно, что если многообразие приводимо, то $\mathrm{Hol}(M) = \mathrm{Hol}(p) \times \mathrm{Hol}(Q)$. Если M — полное многообразие, то верен и обратный факт [33].

Если для каждой точки $p \in M$ существует инволютивная изометрия $s_p : M \to M$, т. е. $s_p^2 = 1$, такая что p — изолированная неподвижная точка для s_p, то риманово многообразие M называется симметрическим пространством. Любое симметрическое пространство M, в частности, является однородным пространством $M = G/H$, и $\mathrm{Hol}(M) = H$. Симметрические пространства проклассифицированы Картаном в [18].

Берже доказал следующую теорему.

Теорема [8]. *Пусть M — односвязное многообразие размерности n и (M, g) — неприводимое риманово многообразие, которое не является симметрическим пространством. Тогда выполняется один из следующих семи случаев:*

1. $\mathrm{Hol}(g) = SO(n)$,
2. $\mathrm{Hol}(g) = U(m)$, $n = 2m \geqslant 4$,
3. $\mathrm{Hol}(g) = SU(m)$, $n = 2m \geqslant 4$,
4. $\mathrm{Hol}(g) = Sp(m)$, $n = 4m \geqslant 8$,
5. $\mathrm{Hol}(g) = Sp(m)Sp(1)$, $n = 4m \geqslant 8$,
6. $\mathrm{Hol}(g) = G_2$, $n = 7$,
7. $\mathrm{Hol}(g) = \mathrm{Spin}(7)$, $n = 8$.

Теорема утверждает, что только группы из списка могут быть группами голономии риманова многообразия. На вопрос о том, действительно ли все они появляются как группы голономии некоторых многообразий, положительный ответ для некомпактного случая был получен только в 1989 г. [15].

Римановы метрики g с $\mathrm{Hol}(g) \subseteq U(m)$ называются кэлеровыми метриками. Метрики g с $\mathrm{Hol}(g) \subseteq SU(m)$ называются метриками Калаби–Яу. Метрики с голономией $Sp(m)$ называются гиперкэлеровыми. Метрики Калаби–Яу и гиперкэлеровы метрики являются риччи-плоскими. Метрики с голономией $Sp(m)\,Sp(1)$ называются кватернионно-кэлеровыми и являются эйнштейновыми. Последние два случая — экзотические метрики — также являются риччи-плоскими.

В случаях 1–5 группы голономии являются общеизвестными группами Ли и не нуждаются в определении. Группа $\mathrm{Spin}(7)$ — это двулистное, односвязное накрытие группы $SO(7)$. Группа G_2 — это группа автоморфизмов мнимых октонионов $\mathrm{Im}\,\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^7$.

1.2. 3**-сасакиевы многообразия.** Пусть M — гладкое замкнутое риманово многообразие размерности m с метрикой g. Конусом $\bar{M}$ над M будем называть многообразие $\mathbb{R}_+ \times M$ с метрикой $\bar{g} = dt^2 + t^2 g$.

Многообразие M называется *сасакиевым*, если группа голономии конуса $\bar{M}$ содержится в $U\left(\dfrac{m+1}{2}\right)$ (в частности, m нечетно). Значит, на $\bar{M}$ существует параллельная комплексная структура J. Рассмотрим изометричное вложение $\mathbf{i}M \to \bar{M}$, так что $im\mathbf{i} = M \times \{1\} \subset \bar{M}$, и положим $\xi = J(\partial_t)$. Векторное поле ξ называется *характеристическим* полем сасакиева многообразия M. Характеристическая 1-форма η сасакиева многообразия определяется соотношением

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

для всех полей X на M.

Это определение нестандартное, но в [13] было доказано, что оно эквивалентно классическому: M сасакиево, если на нем есть единичное киллингово векторное поле ξ, такое что тензорное $(1,1)$ поле $\Phi = \nabla\xi$ удовлетворяет условию $(\nabla_X \Phi)(Y) = \eta(Y)X - g(X,Y)\xi$ для любых векторных полей X и Y на M.

Если на многообразии M заданы три попарно ортогональные сасакиевы структуры, то M становится 3-сасакиевым. Более точно, многообразие M называется 3-*сасакиевым*, если метрика $\bar{g}$ на $\bar{M}$ гиперкэлерова, т. е. ее группа голономии содержится в $Sp\left(\dfrac{m+1}{4}\right)$ (в частности, $m = 4n-1$, $n \geqslant 1$). Последнее означает, что на $\bar{M}$ существуют три параллельные комплексные структуры J^1, J^2, J^3, удовлетворяющие соотношениям $J^j J^i = -\delta^{ij} + \varepsilon_{ijk} J^k$. Как и в сасакиевом случае, определяются характеристические поля ξ^i и 1-формы η_i:

$$\xi^i = J^i(\partial_t), \quad \eta_i(X) = g(X, \xi^i), \quad i = 1,2,3,$$

для всех векторных полей X на M.

Классическое определение для 3-сасакиевых многообразий: M — 3-сасакиево, если на нем есть 3 векторных поля ξ^a, каждое из которых удовлетворяет требованиям сасакиевости и таких, что $g(\xi^a, \xi^b) = \delta^{ab}$ и $[\xi^a, \xi^b] = 2\varepsilon^{abc}\xi^c$.

Из определений сразу следует, что каждое 3-сасакиево многообразие допускает локально изометричное действие $Sp(1)$ или $SO(3) = \mathbb{R}P^3$, в которых, в частности, есть подгруппа S^1. Более того, 3-сасакиевы многообразия связаны с другими важными геометриями:

$$\begin{tikzcd}
 & \bar{M} \arrow[dl, "\mathbb{C}^*/\mathbb{Z}_2"'] \arrow[dd, "\mathbb{H}^*/\mathbb{Z}_2"] & \\
\mathcal{Z} \arrow[dr, "\mathbb{C}P^1"'] & & M \arrow[ul, "\mathbf{i}"'] \arrow[dl, "\mathbb{R}P^3"] \\
 & \mathcal{O} &
\end{tikzcd}$$

Здесь $\mathbf{i}$ — уже упоминавшееся вложение 3-сасакиева многообразия M в конус $\bar{M}$, остальные отображения являются расслоениями с соответствующими слоями. В данной диаграмме не указано, что M также расслаивается над твисторным пространством $\mathcal{Z}$ с окружностью S^1 в качестве слоя, $\mathcal{O}$ — кватернионно-кэлеров орбифолд. За более подробной информацией отсылаем к [13].

1.3. Орбифолды. Пусть $\mathcal{S}$ — хаусдорфово пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности. Локальная униформизующая система для открытой окрестности $U \subset \mathcal{S}$ — это тройка $(\tilde{U}, \Gamma, \pi)$, где $\tilde{U}$ — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$; Γ является конечной группой диффеоморфизмов окрестности $\tilde{U}$; проекция $\pi : \tilde{U} \to U$ инвариантна относительно группы Γ и индуцирует гомеоморфизм $\tilde{\pi} : \tilde{U}/\Gamma \to U$.

Пусть теперь $\tilde{U}_1$ и $\tilde{U}_2$ — два открытых множества в $\mathbb{R}^n$, конечные группы Γ_1 и Γ_2 действуют диффеоморфизмами на $\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_2$ соответственно. Назовем непрерывное отображение $f : \tilde{U}_1/\Gamma_1 \to \tilde{U}_2/\Gamma_2$ гладким, если для каждой точки $p \in \tilde{U}_1$ найдутся такие окрестности V_1, V_2 точек p и $f(p)$ и такие локальные униформизующие системы $(\tilde{V}_1,\ \Gamma_1,\ \pi_1)$ и $(\tilde{V}_2,\ \Gamma_2,\ \pi_2)$ для V_1, V_2, что отображение $f|_{V_1}$ поднимается до гладкого отображения $\tilde{f} : \tilde{V}_1 \to \tilde{V}_2$, инвариантного относительно действия групп Γ_1, Γ_2. Схожим образом определяются понятия субмерсии, иммерсии, диффеоморфизма и т. д.

Гладким V-атласом для $\mathcal{S}$ называется покрытие $\mathcal{S}$ открытыми множествами U_i вместе с локальными униформизующими системами $(\tilde{U}_i, \Gamma_i, \pi_i)$ такими, что отображение

$$Id : U_i \cap U_j \to U_i \cap U_j$$

является диффеоморфизмом (в смысле данного выше определения). Пространство $\mathcal{S}$ вместе с полным V-атласом называется V-многообразием или орбифолдом. Очевидным образом определяются понятия главного V-расслоения, V-расслоения, ассоциированного с главным; понятия дифференциальной формы, римановой метрики, римановой субмерсии и т. д.

Риманов орбифолд $\mathcal{O}$ называется *кватернионно-кэлеровым*, если в V-расслоении эндоморфизмов касательного пространства существует параллельное V-подрасслоение $\mathcal{I}$ размерности 3, локально порожденное почти комплексными структурами I^1, I^2, I^3, удовлетворяющими соотношениям алгебры кватернионов, и расслоение $\mathcal{I}$ инвариантно относительно действия локальной униформизующей группы $\mathcal{O}$.

2. ПОСТРОЕНИЕ МЕТРИК С ГОЛОНОМИЕЙ G_2

2.1. Описание G_2-структуры на конусе над твисторным пространством. Пусть M — компактное семимерное 3-сасакиево многообразие с характеристическими полями ξ^1, ξ^2, ξ^3 и характеристическими 1-формами η_1, η_2, η_3. Рассмотрим главное расслоение $\pi : M \to \mathcal{O}$ со структурной группой $Sp(1)$ либо $SO(3)$ над кватернионно-кэлеровым орбифолдом $\mathcal{O}$, ассоциированным с M. Нас будет интересовать специальный случай, когда $\mathcal{O}$ дополнительно обладает кэлеровой структурой.

Поле ξ^1 порождает локально свободное действие окружности S^1 на M, и метрика на твисторном пространстве $\mathcal{Z} = M/S^1$ является метрикой Кэлера–Эйнштейна. Очевидно, что $\mathcal{Z}$ топологически представляет собой расслоенное пространство над $\mathcal{O}$ со слоем $S^2 = Sp(1)/S^1$ (либо $S^2 = SO(3)/S^1$), ассоциированное с π. Рассмотрим очевидное действие $SO(3)$ на $\mathbb{R}^3$. Двулистное накрытие $Sp(1) \to SO(3)$ задает также действие $Sp(1)$ на $\mathbb{R}^3$. Пусть теперь $\mathcal{N}$ — расслоенное пространство над $\mathcal{O}$, со слоем $\mathbb{R}^3$, ассоциированное с π. Легко видеть, что $\mathcal{O}$ вложено в $\mathcal{N}$ в качестве нулевого, а $\mathcal{Z}$ вложено в $\mathcal{N}$ в качестве сферического сечения. Пространство $\mathcal{N}\backslash\mathcal{O}$ диффеоморфно произведению $\mathcal{Z} \times (0, \infty)$. Заметим, что $\mathcal{N}$ можно мыслить как проективизацию расслоения $\mathcal{M}_1 \to \mathcal{O}$ из [1]. В общей ситуации $\mathcal{N}$ является семимерным орбифолдом, однако если M — регулярное 3-сасакиево пространство, то $\mathcal{N}$ — семимерное многообразие.

Пусть $\{e^i\}, i = 0, 2, 3, \ldots, 7,$ — ортонормированный базис из 1-форм на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^7$. Способ нумерации базиса здесь выбран таким образом, чтобы подчеркнуть связь с конструкциями из [1] и сохранить принятые обозначения, e^0 — 1-форма на образующей конуса, e^1, e^2, e^3 соответствуют характеристическим формам, при этом твисторное пространство получается факторизацией окружностью, порождаемой характеристическим полем ξ^1. Положив $e^{ijk} = e^i \wedge e^j \wedge e^k$, рассмотрим следующую 3-форму Ψ_0 на $\mathbb{R}^7$:

$$\Psi_0 = -e^{123} - e^{145} + e^{167} + e^{346} - e^{375} - e^{247} + e^{256}.$$

Дифференциальная 3-форма Ψ на ориентированном римановом 7-мерном многообразии N задает G_2-структуру, если в окрестности каждой точки $p \in N$ существует сохраняющая ориентацию изометрия $\phi_p : T_pN \to \mathbb{R}^7$ такая, что $\phi_p^*\Psi_0 = \Psi|_p$. При этом форма Ψ определяет единственную метрику g_Ψ, такую что $g_\Psi(v,w) = \langle \phi_p v, \phi_p w\rangle$ для $v, w \in T_pN$ [15]. Если форма Ψ параллельна ($\nabla\Psi = 0$), то группа голономии риманова многообразия N будет содержаться в G_2. Параллельность формы Ψ эквивалентна ее замкнутости и козамкнутости [26]:

$$d\Psi = 0, \quad d * \Psi = 0. \tag{2.1}$$

Заметим, что форма $\Phi_0 = e^1 \wedge \Psi_0 - *\Psi_0$, где $*$ — оператор Ходжа в $\mathbb{R}^7$, задает $\mathrm{Spin}(7)$-структуру на $\mathbb{R}^8$ с ортонормированным базисом $\{e^i\}_{i=0,1,2,\dots,7}$.

Локально выберем ортонормированную систему η_4, η_5, η_6, η_7, порождающую аннулятор вертикального подрасслоения $\mathcal{V}$, так что

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2(\eta_4 \wedge \eta_5 - \eta_6 \wedge \eta_7),\\ \omega_2 &= 2(\eta_4 \wedge \eta_6 - \eta_7 \wedge \eta_5),\\ \omega_3 &= 2(\eta_4 \wedge \eta_7 - \eta_5 \wedge \eta_6),\end{aligned}$$

где формы ω_i отвечают кватернионно-кэлеровой структуре на $\mathcal{O}$. Ясно, что $\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_7$ является ортонормированным базисом в M, аннулирующим одномерное слоение, порожденное полем ξ^1, поэтому можно рассмотреть метрику на $(0,\infty)\times\mathcal{Z}$ следующего вида:

$$\bar g = dt^2 + A(t)^2(\eta_2^2 + \eta_3^2) + B(t)^2(\eta_4^2 + \eta_5^2) + C(t)^2(\eta_6^2 + \eta_7^2), \tag{2.2}$$

где функции $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ определены на промежутке $(0,\infty)$.

Мы предполагаем, что $\mathcal{O}$ является кэлеровым орбифолдом, поэтому на нем существует замкнутая кэлерова форма, которую можно поднять на $\mathcal{H}$ и получить замкнутую форму ω. Локально, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что

$$\omega = 2(\eta_4 \wedge \eta_5 + \eta_6 \wedge \eta_7).$$

Если теперь положить

$$\begin{aligned} e^0 &= dt,\\ e^i &= A\eta_i, \quad i = 2,3,\\ e^j &= B\eta_j, \quad j = 4,5,\\ e^k &= C\eta_k, \quad k = 6,7,\end{aligned}$$

то формы Ψ_0 и $*\Psi_0$ будут иметь вид

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= -e^{023} - \frac{B^2+C^2}{4}e^0\wedge\omega_1 - \frac{B^2-C^2}{4}e^0\wedge\omega + \frac{BC}{2}e^3\wedge\omega_2 - \frac{BC}{2}e^2\wedge\omega_3,\\ \Psi_2 &= C^2B^2\Omega - \frac{B^2+C^2}{4}e^{23}\wedge\omega_1 - \frac{B^2-C^2}{4}e^{23}\wedge\omega + \frac{BC}{2}e^{02}\wedge\omega_2 + \frac{BC}{2}e^{03}\wedge\omega_3.\end{aligned}$$

При этом очевидно, что формы Ψ_1, Ψ_2 уже являются глобально определенными и не зависят от локального выбора η_i, следовательно, однозначно определяют некоторую метрику $\bar{g}$, локально заданную формулой (2.2). Условие принадлежности группы голономии G_2 тогда равносильно уравнению

$$d\Psi_1 = d\Psi_2 = 0.$$

Лемма 2.1. *Условие (2.1) эквивалентно следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$\begin{aligned} A' &= \frac{2A^2 - B^2 - C^2}{BC}, \\ B' &= \frac{B^2 - C^2 - 2A^2}{CA}, \\ C' &= \frac{C^2 - 2A^2 - B^2}{AB}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Доказательство. Пользуясь очевидными тождествами

$$\begin{aligned} &d\eta_i = \omega_i - 2\eta_{i+1} \wedge \eta_{i+2}, \\ &d\omega_i = 2d(\eta_{i+1} \wedge \eta_{i+2}) = 2(\omega_{i+1} \wedge \eta_{i+2} - \eta_{i+1} \wedge \omega_{i+2}), \quad i = 1, 2, 3 \text{ mod } 3, \end{aligned}$$

мы получаем следующие соотношения, замыкающие внешнюю алгебру рассмотренных форм:

$$\begin{aligned} &de^0 = 0, \\ &de^i = \frac{A_i'}{A_i} e^0 \wedge e^i + A_i \omega_i - \frac{2A_i}{A_{i+1} A_{i+2}} e^{i+1} \wedge e^{i+2}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ mod } 3, \\ &d\omega_i = \frac{2}{A_{i+2}} \omega_{i+1} \wedge e^{i+2} - \frac{2}{A_{i+1}} e^{i+1} \wedge \omega_{i+2}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ mod } 3. \end{aligned}$$

Добавив соотношение $d\omega = 0$ и выполнив вычисления, которые мы здесь опускаем, получаем требуемое утверждение.

Лемма 2.2. *Пусть $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ — C^∞-гладкое на промежутке $[0, \infty)$ решение системы (2.3). Тогда метрика (2.2) продолжается до гладкой метрики на $\mathcal{N}$ в том, и только в том, случае, когда выполнены следующие условия:*

1) $A(0) = 0$, $|A_1'(0)| = 2$;

2) $B(0), C(0) \neq 0$, $B'(0) = C'(0) = 0$;

3) *функции A, B, C знакоопределены на промежутке* $(0, \infty)$.

Доказательство. Аналогичное утверждение для случая конуса над M доказано в [1], и доказательство переносится без особенных изменений. Заметим только, что при факторизации единичной сферы S^3 по хопфовскому действию окружности мы получаем сферу радиуса 1/2, что и объясняет условие $|A'(0)| = 2$.

При $B = C$ система сводится к паре уравнений

$$A' = 2\left(\frac{A^2}{B^2} - 1\right), \quad B' = -2\frac{A}{B},$$

решение которой дает следующую метрику:

$$\bar{g} = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0^4}{r^4}} + r^2\left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right)\left(\eta_2^2 + \eta_3^2\right) + 2r^2\left(\eta_4^2 + \eta_5^2 + \eta_6^2 + \eta_7^2\right).$$

Условия регулярности выполнены, и эта гладкая метрика была найдена впервые в [20] для случая $M = SU(3)/S^1$ и $M = S^7$ (отметим, что при $B = C$ не обязательно требовать кэлеровости $\mathcal{O}$).

2.2. Примеры. Интересное семейство примеров возникает, если рассмотреть в качестве 3-сасакиевых многообразий семимерные двойные частные группы Ли $SU(3)$. А именно, пусть p_1, p_2, p_3 — попарно взаимно простые положительные целые числа. Рассмотрим следующее действие группы S^1 на группе Ли $SU(3)$:

$$z \in S^1 : A \mapsto \operatorname{diag}(z^{p_1}, z^{p_2}, z^{p_3}) \cdot A \cdot \operatorname{diag}(1, 1, z^{-p_1-p_2-p_3}).$$

Такое действие свободно, и в [13] показано, что на пространстве орбит $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{p_1,p_2,p_3}$ существует 3-сасакиева структура. Более того, действие группы $SU(2)$ на $SU(3)$ правыми сдвигами

$$B \in SU(2) : A \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

коммутирует с действием S^1 и переносится на пространство орбит $\mathcal{S}$. Соответствующие киллинговы поля и будут являться характеристическими полями ξ_i на $\mathcal{S}$. Следовательно, соответствующим твисторным пространством $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{p_1,p_2,p_3}$ будет пространство орбит следующего действия тора T^2 на $SU(3)$:

$$(z, u) \in T^2 : A \mapsto \operatorname{diag}(z^{p_1}, z^{p_2}, z^{p_3}) \cdot A \cdot \operatorname{diag}(u, u^{-1}, z^{-p_1-p_2-p_3}). \tag{2.4}$$

Лемма 2.3. *Пространство $\mathcal{Z}_{p_1,p_2,p_3}$ диффеоморфно пространству орбит группы $U(3)$ относительно следующего действия тора T^3:*

$$(z, u, v) \in T^3 : A \mapsto \operatorname{diag}(z^{-p_2-p_3}, z^{-p_1-p_3}, z^{-p_1-p_2}) \cdot A \cdot \operatorname{diag}(u, v, 1). \tag{2.5}$$

Для доказательства достаточно проверить, что каждая T^3-орбита в $U(3)$ высекает в группе $SU(3) \subset U(3)$ в точности орбиту T^2-действия (2.4).

Действие (2.5) позволяет прозрачно описать топологию $\mathcal{Z}$ и, следовательно, топологию $\mathcal{N}$. При этом мы пользуемся конструкцией, взятой из [23]. Рассмотрим подмногообразие

$$E = \{(u, [v]) | u \perp v\} \subset S^5 \times \mathbb{C}P^2.$$

Очевидно, что E диффеоморфно $U(3)/S^1 \times S^1$ («правая» часть действия (2.5)) и представляет собой проективизацию $\mathbb{C}^2$-расслоения $\tilde{E} = \{(u, v) | u \perp v\} \subset S^5 \times \mathbb{C}^3$ над S^5. Добавив тривиальное одномерное комплексное расслоение над S^5 к $\tilde{E}$, мы получаем тривиальное расслоение $S^5 \times \mathbb{C}^3$ над S^5.

Группа S^1 действует слева автоморфизмами векторного расслоения $\tilde{E}$, и $\mathcal{Z} = S^1 \backslash E$ является проективизацией $\mathbb{C}^2$-расслоения $S^1 \backslash \tilde{E}$ над взвешенным комплексным проективным пространством $\mathcal{O} = \mathbb{C}P^2(q_1, q_2, q_3) = S^1 \backslash S^5$, где $q_i = (p_{i+1} + p_{i+2})/2$, если все p_i нечетны, и $q_i = (p_{i+1} + p_{i+2})$ в противном случае.

Из всего вышесказанного вытекает, что расслоение $S^1 \backslash \tilde{E}$ стабильно эквивалентно расслоению $S^1 \backslash (S^5 \times \mathbb{C}^3)$ над $\mathcal{O}$. Последнее расслоение очевидным образом раскладывается в сумму Уитни $\sum\limits_{i=1}^{3} \xi^{q_i}$, где ξ — аналог одномерного универсального расслоения для орбифолда $\mathcal{O}$.

Следствие 2.1. *Твисторное пространство $\mathcal{Z}$ диффеоморфно проективизации двумерного комплексного расслоения над $\mathbb{C}P^2(q_1, q_2, q_3)$, стабильно эквивалентного $\xi^{q_1} \oplus \xi^{q_2} \oplus \xi^{q_3}$.*

3. ПОСТРОЕНИЕ МЕТРИК С ГОЛОНОМИЕЙ $\mathrm{Spin}(7)$

3.1. Описание $\mathrm{Spin}(7)$-структуры на конусе над 3-сасакиевым многообразием. Рассмотрим 3-сасакиево многообразие M размерности 7 и характеристические поля ξ^i на нем. Можно показать, что поля ξ^i образуют алгебру Ли $\mathbf{su}(2)$ относительно скобки Ли векторных полей, поэтому возникает расслоение $\pi : M \to \mathcal{O}$ с общим слоем $SU(2) = S^3$ (либо $SO(3) = \mathbb{R}P^3$) над некоторым четырехмерным кватернионно-кэлеровым орбифолдом $\mathcal{O}$. Мы обозначаем через $\mathcal{H}$ расслоение горизонтальных (относительно π) векторов в M.

На многообразии M определим следующие 2-формы:

$$\omega_i = d\eta_i + \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \eta_j \wedge \eta_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

Непосредственно проверяется [1], что пространство, порожденное формами ω_i, является подпространством в $\Lambda^2 \mathcal{H}^*$, поэтому можно выбрать ортонормированную систему 1-форм η_4, η_5, η_6, η_7 на $\mathcal{H}$ таким образом, что

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2(\eta_4\wedge\eta_5 - \eta_6\wedge\eta_7),\\ \omega_2 &= 2(\eta_4\wedge\eta_6 - \eta_7\wedge\eta_5),\\ \omega_3 &= 2(\eta_4\wedge\eta_7 - \eta_5\wedge\eta_6).\end{aligned}$$

Рассмотрим стандартное евклидово пространство $\mathbb{R}^8$ с координатами $x^0,\dots,x^7$. Обозначим $e^{ijkl} = dx^i\wedge dx^j\wedge dx^k\wedge dx^l$ и определим самосопряженную 4-форму на $\mathbb{R}^8$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\Phi_0 = e^{0123} + e^{4567} + e^{0145} - e^{2345} - e^{0167} + e^{2367} + e^{0246} +\\ + e^{1346} - e^{0275} + e^{1357} + e^{0347} - e^{1247} - e^{0356} + e^{1256}.\end{aligned}$$

Известно, что группа линейных преобразований $\mathbb{R}^8$, сохраняющих форму Φ_0, изоморфна $\mathrm{Spin}(7)$, причем группа $\mathrm{Spin}(7)$ также сохраняет ориентацию и метрику $g_0 = \sum\limits_{i=0}^{7}(e^i)^2$. Пусть N — ориентированное риманово 8-мерное многообразие. Говорят, что дифференциальная форма $\Phi\in\Lambda^4 N$ задает $\mathrm{Spin}(7)$-структуру на N, если в окрестности каждой точки $p\in N$ существует сохраняющая ориентацию изометрия $\phi_p : T_pN \to \mathbb{R}^8$ такая, что $\phi_p^*\Phi_0 = \Phi|_p$. Если форма Φ параллельна, то группа голономии риманова многообразия N редуцируется к подгруппе $\mathrm{Spin}(7)\subset SO(8)$, т. е. $\mathrm{Hol}(N)\subset\mathrm{Spin}(7)$. Известно [26], что параллельность Φ равносильна ее замкнутости:

$$d\Phi = 0.$$

Мы будем строить $\mathrm{Spin}(7)$-структуру на $\bar{M}$. В качестве Φ рассмотрим следующую форму:

$$\begin{aligned}\Phi = e^{0123} + C^2B^2\eta_4\wedge\eta_5\wedge\eta_6\wedge\eta_7 + \frac{B^2+C^2}{4}(e^{01}-e^{23})\wedge\omega_1 +\\ + \frac{B^2-C^2}{4}(e^{01}-e^{23})\wedge\omega + \frac{BC}{2}(e^{02}-e^{31})\wedge\omega_2 + \frac{BC}{2}(e^{03}-e^{12})\wedge\omega_3,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}&e^0 = dt,\\ &e^i = A_i\eta_i, \quad i=1,2,3,\\ &e^j = B\eta_j, \quad j=4,5,\\ &e^k = C\eta_k, \quad k=6,7,\end{aligned}$$

$A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — некоторые гладкие функции. Нетрудно понять, что форма Φ соответствует римановой метрике

$$dt^2 + A_1(t)^2\eta_1^2 + A_2(t)^2\eta_2^2 + A_3(t)^2\eta_3^2 + B(t)^2(\eta_4^2+\eta_5^2) + C(t)^2(\eta_6^2+\eta_7^2) \quad (3.1)$$

на $\bar{M}$.

Мы будем предполагать, что кватернионно-кэлеров орбифолд $\mathcal{O}$ является кэлеровым, поэтому базис η_i, $i = 4,5,6,7$, можно выбрать таким образом, чтобы форма $\omega = 2(\eta_4 \wedge \eta_5 + \eta_6 \wedge \eta_7)$ порождала кэлерову структуру на $\mathcal{O}$ и, в частности, являлась замкнутой. Это допущение замыкает внешнюю алгебру рассматриваемых форм и позволяет получить корректную систему уравнений на функции A_i, B, C. Заметим, что без предположения кэлеровости $\mathcal{O}$ для замыкания алгебры форм (в общем случае) необходимо потребовать $B = C$.

Лемма 3.1. *Параллельность формы Φ эквивалентна следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$\begin{aligned}
A_1' &= \frac{(A_2-A_3)^2 - A_1^2}{A_2A_3} + \frac{A_1^2(B^2+C^2)}{B^2C^2},\\
A_2' &= \frac{A_1^2 - A_2^2 + A_3^2}{A_1A_3} - \frac{B^2+C^2-2A_2^2}{BC},\\
A_3' &= \frac{A_1^2 + A_2^2 - A_3^2}{A_1A_2} - \frac{B^2+C^2-2A_3^2}{BC}, \qquad (3.2)\\
B' &= -\frac{CA_1+BA_2+BA_3}{BC} - \frac{(C^2-B^2)(A_2+A_3)}{2A_2A_3C},\\
C' &= -\frac{BA_1+CA_2+CA_3}{BC} - \frac{(B^2-C^2)(A_2+A_3)}{2A_2A_3B}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Используя соотношения на внешнюю алгебру форм из [1]

$$de^0 = 0,$$

$$de^i = \frac{A_i'}{A_i}e^0 \wedge e^i + A_i\omega_i - \frac{2A_i}{A_{i+1}A_{i+2}}e^{i+1}\wedge e^{i+2}, \quad i = 1,2,3 \bmod 3,$$

$$d\omega_i = \frac{2}{A_{i+2}}\omega_{i+1}\wedge e^{i+2} - \frac{2}{A_{i+1}}e^{i+1}\wedge\omega_{i+2}, \quad i = 1,2,3 \bmod 3,$$

а также соотношения $d\omega = 0$ и $\omega_1 \wedge \omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_2 = \omega_3 \wedge \omega_3$, после непосредственных вычислений получаем:

$$
\begin{aligned}
d\Phi = &\left[\frac{B^2-C^2}{2A_2A_3}A_1 - \frac{BB'-CC'}{2} - \frac{B^2-C^2}{4A_2}A_2' - \frac{B^2-C^2}{4A_3}A_3'\right] e^{023} \wedge \omega + \\
&+ \left[-A_1 - \frac{BC}{A_3} - \frac{BC}{A_2} + \frac{B^2+C^2}{2A_2A_3}A_1 - \frac{BB'+CC'}{2} - \right. \\
&\left. - \frac{B^2+C^2}{4A_2}A_2' - \frac{B^2+C^2}{4A_3}A_3'\right] e^{023} \wedge \omega_1 + \\
&+ \left[A_2 + \frac{BC}{A_1} - \frac{BCA_2}{A_1A_3} + \frac{B^2+C^2}{2A_3} + \frac{B'C+BC'}{2} + \frac{BCA_1'}{2A_1} + \frac{BCA_3'}{2A_3}\right] e^{013} \wedge \omega_2 - \\
&- \left[A_3 + \frac{BC}{A_1} - \frac{BCA_3}{A_1A_2} + \frac{B^2+C^2}{2A_2} + \frac{B'C+BC'}{2} + \frac{BCA_1'}{2A_1} + \frac{BCA_2'}{2A_2}\right] e^{012} \wedge \omega_3 - \\
&- \frac{1}{4}\left[2BCA_2 + BCA_3 + (B^2+C^2)A_1 + C^2BB' + B^2CC'\right] e^0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_1.
\end{aligned}
$$

Решив систему из пяти линейных уравнений относительно «неизвестных» A_1', A_2', A_3', B', C', получим (3.2). Лемма доказана.

При $B = C$ мы получаем систему, исследованную в [1]:

$$
\begin{aligned}
A_1' &= \frac{2A_1^2}{B^2} + \frac{(A_2-A_3)^2 - A_1^2}{A_2A_3}, \\
A_2' &= \frac{2A_2^2}{B^2} + \frac{(A_3-A_1)^2 - A_2^2}{A_1A_3}, \\
A_3' &= \frac{2A_3^2}{B^2} + \frac{(A_1-A_2)^2 - A_3^2}{A_1A_2}, \\
B' &= -\frac{A_1+A_2+A_3}{B}.
\end{aligned}
\tag{3.2$'$}
$$

Чтобы получить гладкую риманову метрику на многообразии (орбифолде), надо задать краевые условия для системы (3.2). В [1] описаны пространства $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, отвечающие двум различным способам разрешения конусной особенности $\bar{M}$. Далее мы опишем пространство $\mathcal{M}_2$, на котором будем искать метрику с группой голономии $H \subset \mathrm{Spin}(7)$.

Пусть $S \simeq S^1$ — подгруппа в $SU(2)$ (либо $SO(3)$), интегрирующая одно из киллинговых полей, например ξ^1. Возникает главное расслоение $\pi' : M \to \mathcal{Z}$ со структурной группой S, где $\mathcal{Z} = M/S$ — твисторное пространство. Рассмотрим естественное действие S на $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$: $\mathrm{e}^{i\phi} \in S : z \to$

$z\,\mathrm{e}^{i\phi}$ и ассоциируем с π' расслоенное пространство $\mathcal{M}_2$ со слоем $\mathbb{C}$ относительно рассмотренного действия. Таким образом, орбифолд $\mathcal{Z}$ вложен в $\mathcal{M}_2$ в качестве нулевого слоя, а $\mathcal{M}_2 \backslash \mathcal{Z}$ расслаивается на сферические сечения, диффеоморфные M и коллапсирующие к нулевому слою $\mathcal{Z}$ при $t \to 0$.

Пусть теперь $p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_p \subset S$. Группа $\mathbb{Z}_p$ действует на $\mathcal{M}_2$ изометриями. Следовательно, корректно определен орбифолд $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$, являющийся многообразием в точности тогда, когда многообразием является $\mathcal{M}_2$. Легко понять, что $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ является расслоением со слоем $\mathbb{C}$, ассоциированным с главным расслоением $\pi' : M \to \mathcal{Z}$ при помощи действия $\mathrm{e}^{i\phi} \in S : z \to z\,\mathrm{e}^{ip\phi}$.

Отметим, что если 3-сасакиево многообразие M регулярно (т. е. слоение на трехмерные 3-сасакиевы слои является регулярным), то все слои π изометричны либо $S^3 = SU(2)$, либо $SO(3)$, и орбифолды $\mathcal{O}$, $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{M}_2$ являются гладкими многообразиями. Известно [12], что это возможно только при M, изометричном S^7, $\mathbb{R}P^7$ или $N_{1,1} = SU(3)/T_{1,1}$. Однако из указанных примеров только пространство Алоффа–Уоллаха $N_{1,1}$ имеет кэлерову базу, поэтому новые метрики на гладком многообразии удается получить только в этом случае.

Следующая лемма показывает, при каких условиях на функции A_i, B, C решение системы (3.2) определяет гладкую метрику (3.1) на $\mathcal{M}_2$.

Лемма 3.2. *Пусть* $(A_1(t), A_2(t), A_3(t), B(t), C(t))$ — C^∞*-гладкое решение системы (3.2),* $t \in [0, \infty)$. *Пусть* $p = 4$ *либо* $p = 2$, *в зависимости от того, изометричен общий слой* M *или* $Sp(1)$, *или* $SO(3)$. *Для того чтобы метрика (3.1) продолжалась до гладкой метрики на* $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$, *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) $A_1(0) = 0$, $|A_1'(0)| = 4$;
2) $A_2(0) = -A_3(0) \neq 0$, $A_2'(0) = A_3'(0)$;
3) $B(0) \neq 0$, $B'(0) = 0$;
4) $C(0) \neq 0$, $C'(0) = 0$;
5) *функции* A_1, A_2, A_3, B, C *знакоопределены на промежутке* $(0, \infty)$.

Лемма 3.2 доказана в [1] для случая $B = C$. Доказательство без изменения переносится на общий случай, кроме следующего замечания: в [1] выбор поля ξ^i, вдоль которого происходит «схлопывание» окружности S, для построения $\mathcal{M}_2$ неважен в силу дополнительных симметрий системы (3.2′). Однако несложный анализ системы (3.2) показывает, что в качестве образующего для S нужно взять ξ^1, т. е. лишь функция A_1 может обращаться в нуль в начальной точке.

3.2. Построение явных решений на $\mathcal{M}_2$. В системе (3.2) сделаем подстановку $A_2 = -A_3$. Тогда, сложив второе и третье уравнения, мы получим $B^2 + C^2 = 2A_2^2$, а отняв от четвертого уравнения пятое, придем к выводу, что $(B^2 - C^2)' = 0$. Таким образом, можно считать, что $B^2 = A_2^2 + \alpha^2$, $C^2 = A_2^2 - \alpha^2$ для некоторой константы $\alpha \geqslant 0$, и система (3.2) редуцируется к системе

$$A_1' = -4 + \frac{A_1^2}{A_2^2} + 2\frac{A_1^2 A_2^2}{A_2^4 - \alpha^4}, \quad (A_2^2)' = -A_1.$$

Эта система без труда интегрируется. А именно, введем новую переменную ρ заменой $d\rho = -2A_1 dt$. Сдвигом по ρ можно всегда добиться того, что $A_2^2 = \rho$, и, положив $A_1^2 = F$, получим

$$\frac{dF}{d\rho} + FG = 4,$$

где

$$G(\rho) = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho - \alpha^2} + \frac{1}{\rho + \alpha^2}.$$

Эта система решается стандартным образом (при помощи интегрирующего множителя), и, сделав замену $r^2 = \rho$, мы получаем

$$F = \frac{r^8 - 2\alpha^4 r^4 + \beta}{r^2(r^4 - \alpha^4)},$$

где β — константа интегрирования. Следовательно, метрика (3.1) принимает вид

$$\bar{g} = \frac{r^4(r^2 - \alpha^2)(r^2 + \alpha^2)}{r^8 - 2\alpha^4 r^4 + \beta} dr^2 + \frac{r^8 - 2\alpha^4 r^4 + \beta}{r^2(r^2 - \alpha^2)(r^2 + \alpha^2)} \eta_1^2 + r^2(\eta_2^2 + \eta_3^2) + \\ + (r^2 + \alpha^2)(\eta_4^2 + \eta_5^2) + (r^2 - \alpha^2)(\eta_6^2 + \eta_7^2).$$

Для того чтобы получить регулярную метрику на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$, надо, чтобы полином $r^8 - 2\alpha^4 r^4 + \beta$ имел корни, причем его наибольший корень r_0 был больше, чем α. В этом случае метрика определена при $r \geqslant r_0$. Очевидно, что, переходя к метрике, гомотетичной исходной, можно нормировать старший корень r_0 условием $r_0 = 1$. Значит, как легко посчитать, $0 \leqslant \alpha < 1$, $\beta = 2\alpha^4 - 1$. Итак, метрика (3.1) принимает вид

$$\bar{g}_\alpha = \frac{r^4(r^2 - \alpha^2)(r^2 + \alpha^2)}{r^8 - 2\alpha^4(r^4 - 1) - 1} dr^2 + \frac{r^8 - 2\alpha^4(r^4 - 1) - 1}{r^2(r^2 - \alpha^2)(r^2 + \alpha^2)} \eta_1^2 + r^2(\eta_2^2 + \eta_3^2) + \\ + (r^2 + \alpha^2)(\eta_4^2 + \eta_5^2) + (r^2 - \alpha^2)(\eta_6^2 + \eta_7^2), \quad (3.3)$$

где $0 \leqslant \alpha < 1$, $r \geqslant 1$. Непосредственная проверка условий леммы 3.2 показывает, что (3.3) при $r \geqslant 1$ представляет собой семейство гладких метрик на $\mathcal{M}/\mathbb{Z}_p$ при $0 \leqslant \alpha < 1$, причем $\bar{g}_0$ совпадает с метрикой Калаби с группой голономии $SU(4)$, построенной в [17].

По лемме 3.1, группа голономии $\mathrm{Hol}(\bar{g}_\alpha)$ метрики (3.3) содержится в $\mathrm{Spin}(7)$. Рассмотрим следующую 2-форму:

$$\bar{\Omega}_1 = -e^0 \wedge e^1 + e^2 \wedge e^3 + e^4 \wedge e^5 - e^6 \wedge e^7.$$

Очевидно, что эта форма согласована с метрикой (3.1) и непосредственным вычислением проверяется, что она замкнута в точности при $A_2 = -A_3$, т. е. является кэлеровой формой метрики (3.3). Итак, $\mathrm{Hol}(\bar{g}_\alpha) \subset SU(4)$.

Далее мы рассмотрим подробнее случай, когда метрики $\bar{g}_\alpha$ определены на гладком многообразии, т. е. когда $M = N_{1,1}$. Сначала введем обозначения для следующих подгрупп $SU(3)$:

$$\begin{aligned} S_{1,1} &= \{\mathrm{diag}\,(z, z, \bar{z}^2) | z \in S^1 \subset \mathbb{C}\}, \\ T &= \{\mathrm{diag}\,(z_1, z_2, \bar{z}_1\bar{z}_2) | z_1, z_2 \in S^1 \subset \mathbb{C}\}, \\ K_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} \det(\bar{A}) & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} | A \in U(2) \right\}, \\ K_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det(\bar{A}) \end{pmatrix} | A \in U(2) \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим трехмерное комплексное пространство $\mathbb{C}^3$, в нем единичную сферу $S^5 \subset \mathbb{C}^3$, и пусть единичная окружность S^1 действует на $\mathbb{C}^3$ и связанных с ним пространствах диагональным образом. Класс эквивалентности, определяемый подобным действием, будем обозначать квадратными скобками: $[u, v]$, $[u]$ и т. д.

Пусть $\tilde{E} = \{(u_1, u_2) | |u_1| = 1, \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{C}} = 0\} \subset S^5 \times \mathbb{C}^3$. Рассмотрим диагональное действие окружности S^1 на пространстве $\tilde{E}$ и проекцию $\tilde{\pi}_1 : (u_1, u_2) \mapsto u_1$ из $\tilde{E}$ на S^5, являющуюся расслоением со слоем $\mathbb{C}^2$. Пространством сферического подрасслоения в $\tilde{\pi}_1$ является $\tilde{E}^1 = \{(u_1, u_2) \in E | |u_1| = |u_2| = 1, \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{C}} = 0\}$, диффеоморфное группе $SU(3)$. Расслоение $\tilde{\pi}_1$ индуцирует (при помощи действия S^1) векторное расслоение $\pi_1 : E = \tilde{E}/S^1 \to \mathbb{C}P^2$ со слоем $\mathbb{C}^2$ и сферическим подрасслоением $E^1 = \tilde{E}^1/S^1 = SU(3)/S_{1,1} = N_{1,1} \to \mathbb{C}P^2 = SU(3)/K_1$. Нетрудно понять, что π_1 можно отождествить с кокасательным расслоением $T^*\mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$.

Совершенно аналогично рассмотрим пространство $\tilde{H} = \{(u_1, u_2, [u_3]) | |u_1| = |u_3| = 1, \langle u_i, u_j \rangle_{\mathbb{C}} = 0, i, j = 1, 2, 3\} \subset S^5 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}P^2$ и проекцию $\tilde{\pi}_2 : (u_1, u_2, [u_3]) \mapsto (u_1, [u_3])$ пространства $\tilde{H}$ на пространство $\tilde{F} = \{(u_1, [u_3]) | |u_1| = |u_3| = 1, \langle u_1, u_3 \rangle_{\mathbb{C}} = 0\}$ со слоем $\mathbb{C}$. Пространство сферического подрасслоения в $\tilde{\pi}_2$ совпадает с $\tilde{H}^1 = \{(u_1, u_2, [u_3]) | \langle u_i, u_j \rangle_{\mathbb{C}} = 0, |u_i| = 1, i, j = 1, 2, 3\}$ и очевидным образом отождествляется с $SU(3) = \tilde{E}^1$. Расслоение $\tilde{\pi}_2$ индуцирует (при помощи все того же действия S^1) расслоение

$\pi_2 : H = \tilde{H}/S^1 \to F = \tilde{F}/S^1$ со слоем $\mathbb{C}$, сферическое расслоение которого совпадает с отображением $E^1 = \tilde{E}^1 = N_{1,1} \to SU(3)/T$. Базой расслоения π_2 является комплексное многообразие флагов $F = SU(3)/T$, которое можно представить следующим образом:

$$F = \{([u_1],[u_3])|u_i \in \mathbb{C}^3, |u_i| = 1, \langle u_1, u_3\rangle_{\mathbb{C}} = 0, i = 1,3\}.$$

Мы будем называть комплексное линейное расслоение $\pi_2 : H \to F$ *каноническим* расслоением над многообразием F комплексных флагов в $\mathbb{C}^3$.

Таким образом, каноническое расслоение над F и кокасательное расслоение к $\mathbb{C}P^2$ имеют общее пространство сферического подрасслоения — пространство $N_{1,1}$, которое расслаивается двумя различными способами. Известно [12], что на пространстве $M = N_{1,1}$ имеется структура 3-сасакиева многообразия, твисторное расслоение которого совпадает с расслоением $\pi_2 : N_{1,1} \to F = \mathcal{Z}$, а 3-сасакиево расслоение — с проекцией $\pi_2' : N_{1,1} \to SU(3)/K_3 = \mathbb{C}P_2 = \mathcal{O}$ со слоем $SO(3)$. Очевидно, что в этом случае пространство $\mathcal{M}_2$ совпадает с рассмотренным выше пространством H расслоения π_2 над комплексным многообразием флагов F. При $0 \leqslant \alpha < 1$ построенная нами метрика (3.3) является гладкой метрикой на $H/\mathbb{Z}_2$ — пространстве комплексного линейного расслоения $\pi_2 \otimes \pi_2$. При $\alpha = 1$ метрика (3.3) редуцируется к метрике на $E = T^*\mathbb{C}P^2$, совпадающей с метрикой Калаби [17].

Теорема 3.1. *При $M = N_{1,1}$ римановы метрики $\bar{g}_\alpha$, явно построенные в (3.3), являются попарно негомотетичными гладкими полными метриками, обладающими следующими свойствами:*

— при $0 \leqslant \alpha < 1$ метрика $\bar{g}_\alpha$ является гладкой метрикой на пространстве $H/\mathbb{Z}_2$ тензорного квадрата канонического расслоения $\pi_2 : H \to F$ над многообразием F комплексных флагов в $\mathbb{C}^3$ и имеет группу голономии $SU(4)$. Метрика $\bar{g}_0$ совпадает с метрикой Калаби [17];

— метрика $\bar{g}_1$ имеет группу голономии $Sp(2) \subset SU(4)$ и совпадает с гиперкэлеровой метрикой Калаби [17] на $T^*\mathbb{C}P^2$.

Доказательство. Чтобы увидеть гиперкэлеровость $\bar{g}_1$, достаточно рассмотреть дополнительную пару кэлеровых форм, образующих вместе с $\bar{\Omega}_1$ гиперкэлерову структуру:

$$\bar{\Omega}_2 = e^0 \wedge e^2 + e^1 \wedge e^3 - e^4 \wedge e^6 + e^7 \wedge e^5 = e^0 \wedge e^2 + e^1 \wedge e^3 - \frac{BC}{2}\omega_2,$$

$$\bar{\Omega}_3 = -e^0 \wedge e^3 + e^1 \wedge e^2 - e^4 \wedge e^7 + e^5 \wedge e^6 = -e^0 \wedge e^3 + e^1 \wedge e^2 - \frac{BC}{2}\omega_3.$$

Непосредственное вычисление показывает, что формы $\bar{\Omega}_2$, $\bar{\Omega}_3$ замкнуты в точности при $\alpha = 1$, что дает редукцию группы голономии к $Sp(2) \subset SU(4)$ для метрики $\bar{g}_1$.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что $\bar{g}_\alpha$ не является гиперкэлеровой при $0 \leqslant \alpha < 1$. Действительно, если $\mathrm{Hol}(\bar{g}_\alpha) =$

$\mathrm{Hol}(\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_2) \subset Sp(2)$ при $0 \leqslant \alpha < 1$, то таким же свойством обладает предельная метрика: $\mathrm{Hol}(\bar{M}/\mathbb{Z}_2) \subset Sp(2)$. Однако ясно, что при факторизации конуса $\bar{M}$ по $\mathbb{Z}_2$ образующий группы $\mathbb{Z}_2$ добавляется к группе голономии $\bar{M}$. Этот образующий отвечает преобразованию $\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2 : (q_1, q_2) \mapsto (q_1', q_2')$, где $q_l = u_l + v_l j$ и $q_l' = -u_l + v_l j$, $u_l, v_l \in \mathbb{C}$, $l = 1, 2$. Ясно, что указанное преобразование, хотя и лежит в $SU(4)$, но не попадает в $Sp(2)$. Следовательно, $\mathrm{Hol}(\bar{M}/\mathbb{Z}_2)$ не содержится в $Sp(2)$ и $\mathrm{Hol}(\bar{g}_\alpha) = SU(4)$. Теорема доказана.

3.3. Анализ общей задачи существования решений на $\mathcal{M}_2$. Напомним, что метрика (1) называется локально конической, если функции (A_i, B, C) линейны по t. Если к тому же среди функций (A_i, B, C) нет постоянных, то метрика (1) называется конической. Если существует (локально) коническая метрика, определяемая функциями $(\tilde{A}_i, \tilde{B}, \tilde{C})$, такая что

$$\lim_{t\to\infty}\left|1 - \frac{A_i(t)}{\tilde{A}_i(t)}\right| = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\left|1 - \frac{B(t)}{\tilde{B}(t)}\right| = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\left|1 - \frac{C(t)}{\tilde{C}(t)}\right| = 0,$$

то метрика (1) называется асимптотически (локально) конической (сокращенно АК- или АЛК-метрика).

Основной целью данного параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 3.2. *Пусть M — 7-мерное компактное 3-сасакиево многообразие, и положим $p = 2$ или $p = 4$ в зависимости от того, равен общий слой 3-сасакиева слоения M либо $SO(3)$, либо $SU(2)$. Тогда на орбифолде $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ существуют следующие полные регулярные римановы метрики $\bar{g}$ вида* (3.1) *с группой голономии $H \subset \mathrm{Spin}(7)$:*

1) если $A_1(0) = 0$, $-A_2(0) = A_3(0) > 0$ и $2A_2^2(0) = B^2(0) + C^2(0)$, то метрика $\bar{g}$ из (3.1) *имеет группу голономии $SU(4) \subset \mathrm{Spin}(7)$ и гомотетична одной из метрик семейства* (3.3)*;*

2) если $A_1(0) = 0$, $-A_2(0) = A_3(0) < B(0) = C(0)$, то существует регулярная АЛК-метрика $\bar{g}$ вида (3.1) *с группой голономии* $\mathrm{Spin}(7)$*. На бесконечности эти метрики стремятся к произведению конуса над твисторным пространством $\mathcal{Z}$ и окружности S^1.*

Более того, любая полная регулярная метрика на пространстве $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ вида (3.1) *с рассмотренной* $\mathrm{Spin}(7)$*-структурой и с группой голономии $H \subset \mathrm{Spin}(7)$ изометрична одной из указанных выше.*

Основная идея доказательства заключается в том, чтобы, используя однородность правой части системы (3.2), перейти к динамической системе на сфере $S^4 \subset \mathbb{R}^5$. Рассмотрим вектор $R(t) = (A_1(t), A_2(t), A_3(t), B(t), C(t)) \in \mathbb{R}^5$ и отображение $V : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, определяемое правой частью системы (2) (строго говоря, отображение V определено лишь частично, при $A_i, B, C \neq 0$). Таким образом, система (3.2) записывается в виде

$$\frac{dR}{dt} = V(R).$$

Теперь рассмотрим замену $R(t) = f(t)S(t)$, где $f(t) = |R(t)|$, и $S(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_5(t)) \in S^4 = \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \mid \sum_{i=1}^{5} \alpha_i^2 = 1\right\}$. Поскольку $V(fR) = V(R)$, исходная система распадается на тангенциальную и радиальную части:

$$\frac{dS}{du} = V(S) - \langle V(S), S\rangle S = W(S), \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{f}\frac{df}{du} = \langle V(S), S\rangle, \quad dt = f\,du. \tag{3.5}$$

Таким образом, чтобы решить систему (3.2), достаточно решить автономную систему (3.4) на S^4, после чего решение (3.2) находится простым интегрированием уравнений (3.5).

Дальнейшее доказательство теоремы 3.2 подробно выписано в [6] и построено следующим образом. Сначала находятся все стационарные и условно стационарные точки системы (3.4) (леммы 4.2 и 4.3 из [6]), они определяют асимптотику соответствующих метрик (лемма 4.4 из [6]). Далее выясняется, каким начальным точкам S_0 отвечают условия леммы 3.2, необходимые для гладкости метрики; доказывается, что из каждой такой точки выходит ровно одна траектория системы (3.4) (лемма 4.5 оттуда же). После этого остается установить, куда сходятся эти траектории. Для этого определяются инвариантные области Π и Γ системы (3.4) и устанавливаются полезные для дальнейшего доказательства дифференциальные соотношения вдоль траекторий системы (лемма 4.6); эти соотношения показывают монотонность специально подобранных функций вдоль траекторий, что позволяет точно определить их асимптотику. Нам бы не хотелось перегружать данный обзор техническими деталями, строгие доказательства можно найти в [6]. Здесь мы приведем лишь ключевое для доказательства теоремы 3.2 утверждение, описывающее зависимость поведения траектории системы (3.4) от начальных данных:

Предложение 3.1. *Траектория системы* (3.4)*, определенная начальной точкой* $S_0 = (0, -\lambda, \lambda, \mu, \nu)$, $\lambda > 0$, $\mu \geqslant \nu > 0$, $2\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, *обладает одной из следующих асимптотик, в зависимости от параметра* μ*:*

1) если $\lambda = 1/2$, *то* $S(u)$ *стремится при* $u \to \infty$ *к стационарной точке* $S_\infty = (-1/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$*; траектория* $S(u)$ *отвечает решению* $\bar{g}_\alpha$ *семейства* (3.3) *при* $\alpha = \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$*;*

2) если $\lambda < 1/2$ *и* $\mu = \nu$, *то* $S(u)$ *стремится при* $u \to \infty$ *к условно стационарной точке* $S'_\infty = (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 0, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$*;*

3) если $\lambda < 1/2$ *и* $\mu > \nu$, *то* $S(u)$ *стремится при* $u \to u_1 < \infty$ *к точке* $S_1 = (0, 0, 0, 1, 0)$*;*

4) если $\lambda > 1/2$, *то* $S(u)$ *стремится при* $u \to u_2 < \infty$ *к точке* $S_2 = (0, 0, 1, 0, 0)$.

Необходимые для доказательства предложения 3.1 леммы 4.7–4.10, а также само доказательство предложения можно найти в [6].

Из предложения 3.1 следует теорема 3.2. Действительно, траектории из п. 1) предложения 3.1 отвечают метрикам семейства 1) в теореме 3.2, траектории из п. 2) — метрикам семейства 2) теоремы 3.2, а траектории из пп. 3) и 4) предложения 3.1 сходятся к особым точкам за конечное время, т. е. отвечают неполным метрикам на $\mathcal{M}_2$. То, что метрики семейства 2) имеют группу голономии $\mathrm{Spin}(7)$, доказано в [1].

4. ПОСТРОЕНИЕ МЕТРИК С ГОЛОНОМИЕЙ $SU(2(n+1))$

В предыдущем разделе при систематическом изучении римановых метрик с группой голономии $\mathrm{Spin}(7)$ на конусах над 3-сасакиевыми семимерными многообразиями было найдено в явном виде непрерывное семейство полных некомпактных восьмимерных метрик $\overline{g}_\alpha$, зависящее от вещественного параметра $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Метрика $\overline{g}_0$ совпадает с метрикой Калаби с группой голономии $SU(4)$, метрика $\overline{g}_1$ совпадает с гиперкэлеровой метрикой Калаби, имеющей группу голономии $Sp(2) \subset SU(4)$. Каждая из найденных метрик $\overline{g}_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, имеет группу голономии $SU(4)$ и автоматически является риччи-плоской. Таким образом, найденное семейство «соединяет» метрики Калаби.

Однако обе метрики Калаби (впервые построенные в [17]) определены не только в размерности восемь, но и во всех размерностях, кратных четырем. Поэтому естественен вопрос о возможности обобщения построенного в [6] семейства метрик на более высокие размерности. В предлагаемой статье этот вопрос решается положительно: в каждой вещественной размерности $4(n+1)$ построено в явном виде непрерывное семейство метрик $\overline{G}_\alpha$, «соединяющее» многомерные метрики Калаби.

Теорема 4.1. *Следующее семейство состоит из полных, риччи-плоских $4(n+1)$-мерных римановых метрик:*

$$\bar{G}_\alpha = \frac{r^4(r^4-\alpha^4)^n}{(r^4-\alpha^4)^{n+1}-(1-\alpha^4)^{n+1}}\,dr^2 + \frac{(r^4-\alpha^4)^{n+1}-(1-\alpha^4)^{n+1}}{r^2(r^4-\alpha^4)^n}\,\eta_1^2 + $$

$$+ r^2(\eta_2^2+\eta_3^2) + (r^2+\alpha^2)\sum_{\beta=1}^{n}(\eta_{4\beta}^2+\eta_{5\beta}^2) + (r^2-\alpha^2)\sum_{\beta=1}^{n}(\eta_{6\beta}^2+\eta_{7\beta}^2),$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $r \geqslant 1$. Метрики $\bar{G}_0$ и $\bar{G}_1$ имеют группы голономии $SU(2(n+1))$ и $Sp(n+1)$ соответственно и совпадают с многомерными метриками Калаби из [17]. Метрики $\bar{G}_\alpha$ при $0 < \alpha < 1$ имеют группу голономии $SU(2(n+1))$ и при $n = 1$ совпадают с семейством, построенным в [6]. При

$0 \leqslant \alpha < 1$ *метрики* $\bar{G}_\alpha$ *определены на* $(n+1)$*-й тензорной степени линейного комплексного расслоения над пространством комплексных флагов в* $\mathbb{C}^{2n+1}$, *метрика* $\bar{G}_1$ *определена на* $T^*\mathbb{C}P^{n+1}$.

В п. 4.1 подробно объясняется конструкция метрик $\bar{G}_\alpha$ и доказывается данная теорема.

4.1. Доказательство. Ранее мы исследовали существование восьмимерных метрик с группой голономии $\mathrm{Spin}(7)$ вида

$$dt^2 + A_1(t)^2\eta_1^2 + A_2(t)^2\eta_2^2 + A_3(t)^2\eta_3^2 + B(t)^2(\eta_4^2+\eta_5^2) + C(t)^2(\eta_6^2+\eta_7^2)$$

на конусе над семимерным 3-сасакиевым многообразием M, чей четырехмерный кватернионно-кэлеров орбифолд $\mathcal{O}$ обладает кэлеровой структурой. При этом форма dt отвечает образующей конуса, формы η_i, $i = 1,2,3$, являются характеристическими формами 3-сасакиева многообразия, формы η_i, $i = 4,\dots,7$, — 1-формы на орбифолде. Условие на то, что группа голономии содержится в $\mathrm{Spin}(7)$, сводится к системе дифференциальных уравнений на функции A_i, B, C. Данная система была подробно исследована, и найдено семейство решений g_α (3.3). Метрики (3.3) определены на гладком многообразии только в случае, когда M является пространством Алоффа–Уоллаха $N_{1,1} = SU(3)/S^1$.

Калаби построил свои метрики $\overline{G}_0$ и $\overline{G}_1$ на комплексных расслоениях к комплексным многообразиям Кэлера–Эйнштейна [17]. В частности, метрики с группой голономии $SU(n)$ были построены на линейных расслоениях к компактным многообразиям Кэлера–Эйнштейна, а гиперкэлеровы метрики были построены на $T^*\mathbb{C}P^n$. Тем не менее в работе [17] в явном виде построенные метрики выписаны не были.

Выражение для метрики $\overline{G}_0$ было получено в [32]:

$$\left[1 - \left(\frac{1}{\rho}\right)^{2m+2}\right]^{-1} d\rho^2 + \left[1 - \left(\frac{1}{\rho}\right)^{2m+2}\right]\rho^2(d\tau - 2A)^2 + \rho^2\,ds^2, \qquad (4.1)$$

где ds^2 — метрика на m-мерном ходжевом многообразии Кэлера–Эйнштейна F, dA — кэлерова форма на F. При $m = 3$ метрика (4.1) обращается в метрику $\overline{g}_0$ для $F = SU(3)/T^2$. Метрика (4.1) определена на $(m+1)$ степени канонического линейного расслоения над F.

В [19] было предпринято исследование метрик коодноронности один на $T^*\mathbb{C}P^{n+1}$. Несложно понять, что сферическое подрасслоение в $T^*\mathbb{C}P^{n+1}$ расслаивается над $SU(n+2)/(U(n)\times U(1))$. На алгебре Ли $su(n+2)$ можно выбрать базис из левоинвариантных 1-форм L_A^B, внешняя алгебра которых удовлетворяет соотношениям $dL_A^B = iL_A^C \wedge L_C^B$. Индекс A пробегает значения $(1,2,\beta)$, а индекс β принимает значения от 1 до n, далее β нигде не фиксируется, поэтому путаницы не возникает. Очевидно, что $u(n)\oplus u(1)$

является подалгеброй Ли в $su(n+2)$, но не образует внешнюю подалгебру. Формы $L_1^\beta = \sigma_\beta$, $L_2^\beta = \Sigma_\beta$ и $L_1^2 = \nu$ образуют базис на фактор-пространстве $su(n+2)/(u(n) \oplus u(1))$. Затем определяются вещественные формы: $\sigma_{1\beta} + i\sigma_{2\beta} = \sigma_\beta$ и т. д. Форма $\lambda = L_1^1 - L_2^2$ вещественна по определению. В [19] рассматривались метрики вида

$$dt^2 + a(t)^2|\sigma_\beta|^2 + b(t)^2|\Sigma_\beta|^2 + c(t)^2|\nu|^2 + f(t)^2\lambda^2, \tag{4.2}$$

здесь по индексу β идет суммирование от 1 до n. Было найдено выражение для гиперкэлеровой метрики $\overline{g}_1$ на $T^*\mathbb{C}P^{n+1}$:

$$\begin{aligned}\frac{dr^2}{1-r^{-4}} + \frac{1-r^{-4}}{4}r^2\lambda^2 + r^2(\nu_1^2+\nu_2^2) + \\ + \frac{r^2+1}{2}(\Sigma_{1\beta}^2 + \Sigma_{2\beta}^2) + \frac{r^2-1}{2}(\sigma_{1\beta}^2+\sigma_{2\beta}^2).\end{aligned} \tag{4.3}$$

В случае $n=1$, чтобы согласовать обозначения разд. 3 и статьи [19], необходимо положить:

$$\lambda = 2\eta_1, \quad \nu_1 = \eta_3, \quad \nu_2 = \eta_2, \quad \Sigma_1 = \sqrt{2}\eta_4,$$
$$\Sigma_2 = \sqrt{2}\eta_5, \quad \sigma_1 = \sqrt{2}\eta_6, \quad \sigma_2 = \sqrt{2}\eta_7.$$

Также в [19] был выписан тензор Риччи, имеющий, очевидно, пять компонент: $\mathrm{Ric} = R_0 dt^2 + R_a|\sigma_\beta|^2 + R_b|\Sigma_\beta|^2 + R_c|\nu|^2 + R_f\lambda^2$, и зависящий от четырех функций:

$$R_0 = -2n\left(\frac{\ddot a}{a} + \frac{\ddot b}{b}\right) - \frac{2\ddot c}{c} - \frac{\ddot f}{f},$$

$$R_a = -\frac{\ddot a}{a} - \frac{(2n-1)\dot a^2}{a^2} - \frac{2n\dot a\dot b}{ab} - \frac{2\dot a\dot c}{ac} - \frac{\dot a\dot f}{af} + \frac{a^4-b^4-c^4}{a^2b^2c^2} + \frac{2(n+2)}{a^2} - \frac{2f^2}{a^4},$$

$$R_b = -\frac{\ddot b}{b} - \frac{(2n-1)\dot b^2}{b^2} - \frac{2n\dot a\dot b}{ab} - \frac{2\dot b\dot c}{bc} - \frac{\dot b\dot f}{bf} + \frac{b^4-a^4-c^4}{a^2b^2c^2} + \frac{2(n+2)}{b^2} - \frac{2f^2}{b^4},$$

$$R_c = -\frac{\ddot c}{c} - \frac{\dot c^2}{c^2} - \frac{2n\dot a\dot c}{ac} - \frac{2n\dot b\dot c}{bc} - \frac{\dot c\dot f}{cf} + n\left(\frac{c^4-a^4-b^4}{a^2b^2c^2}\right) + \frac{2(n+2)}{c^2} - \frac{8f^2}{c^4},$$

$$R_f = -\frac{\ddot f}{f} - \frac{2n\dot a\dot f}{af} - \frac{2n\dot b\dot f}{bf} - \frac{2\dot c\dot f}{cf} + f^2\left(\frac{2n}{a^4} + \frac{2n}{b^4} + \frac{8}{c^4}\right).$$

Заметим, что для любой размерности n коэффициенты метрики (4.3) имеют один и тот же вид, в то время как коэффициенты (4.1) явно зависят от n. Следовательно, искомое семейство метрик тоже должно явно зависеть от n и при $\alpha = 1$ принимать вид (4.3). Будем искать метрики следующего вида:

$$\frac{dr^2}{W^2}+\frac{W^2r^2}{4}\lambda^2+r^2(\nu_1^2+\nu_2^2)+\frac{(r^2-\alpha^2)}{2}(\sigma_{1\beta}^2+\sigma_{2\beta}^2)+\frac{(r^2+\alpha^2)}{2}(\Sigma_{1\beta}^2+\Sigma_{2\beta}^2),$$

где $W = W(r,\alpha,n)$ — неизвестная функция. Если подставить соответствующие функции в выражения для тензора Риччи, то компоненты $(R_a,\ R_b,\ R_c)$ примут вид

$$R_a = -\frac{2Q}{(r^2-\alpha^2)^2(r^2+\alpha^2)},$$

$$R_b = \frac{2Q}{(r^2+\alpha^2)^2(r^2-\alpha^2)},$$

$$R_c = -\frac{2Q}{r^2(r^4-\alpha^4)},$$

где $Q = (dW/dr)(r^5 - r\alpha^4) + 4W^2\alpha^4 + 4(n+1)(r^4 - \alpha^4 - r^4W^2)$, и сделана замена $dr/dt = W$. Данное уравнение без труда интегрируется:

$$W^2 = \frac{(r^4-\alpha^4)^{n+1}+C}{r^4(r^4-\alpha^4)^n},$$

где C — константа интегрирования, сдвигом по r ее можно фиксировать, и следует положить $-(1-\alpha^4)^{n+1}$, тогда $r \geqslant 1$ и $W(1) = 0$. При подстановке найденной функции компоненты R_0 и R_f, имеющие второй порядок по W, автоматически обращаются в ноль.

Рассмотрим далее следующую 2-форму:

$$\Omega = r\,dr\wedge\lambda + 2r^2\nu_1\wedge\nu_2 - (r^2+\alpha^2)\Sigma_{1\beta}\wedge\Sigma_{2\beta} + (r^2-\alpha^2)\sigma_{1\beta}\wedge\sigma_{2\beta}.$$

Используя соотношения на внешнюю алгебру форм из [19], несложно проверить, что данная форма замкнута и является с точностью до умножения на $1/2$ кэлеровой формой метрики (4.2). Из обращения в ноль тензора Риччи и замкнутости кэлеровой формы Ω следует утверждение теоремы о голономии.

Исследуем далее топологию пространств, на которых определены найденные метрики. Рассмотрим комплексное пространство $\mathbb{C}^{n+2}$ и на нем диагональное действие окружности S^1. Данное действие определяет класс эквивалентности, будем обозначать такой класс квадратными скобками, например, $[u]$, $[V]$, где $u,\ V$ — векторы или целые подпространства.

Рассмотрим пространство $\tilde{H} = \{(u_1, u_2, V)|\ |u_1| = 1, u_1 \perp_{\mathbb{C}} u_2 \perp_{\mathbb{C}} V\} \subset S^{2n+3} \times \mathbb{C}^{n+2} \times G_n(\mathbb{C}^{n+2})$. Рассмотрим также проекцию $\tilde{\pi} : (u_1, u_2, V) \to (u_1, V)$ пространства $\tilde{H}$ на пространство $\tilde{F} = \{(u_1, V)|\ |u_1| = 1, u_1 \perp_{\mathbb{C}} V\}$. Пространство сферического подрасслоения $\tilde{H}^1 = \{(u_1, u_2, V)|\ |u_i| = 1, u_1 \perp_{\mathbb{C}} u_2 \perp_{\mathbb{C}} V\}$ можно отождествить с $SU(n+2)/SU(n)$. При помощи диагонального действия окружности S^1 расслоение $\tilde{\pi}$ порождает линейное комплексное расслоение $\pi : H = \tilde{H}/S^1 \to F = \tilde{F}/S^1$. Сферическое подрасслоение π совпадает с отображением $\pi^1 : H^1 = SU(n+2)/S[U(n) \times U(1)] \to F = SU(n+2)/T$, где

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & \bar{z} \det \bar{A} & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} |z \in U(1), A \in U(n) \right\}.$$

Заметим, что H^1 является 3-сасакиевым многообразием, совпадающим с пространством Алоффа–Уоллаха при $n = 1$, а π^1 — его расслоение над соответствующим твисторным пространством $\mathcal{Z} = \mathcal{F}$ — пространством комплексных флагов $\{([u], V)|\ u \in S^{2n+3}, V \in G_n(\mathbb{C}^{n+2}), u \perp_{\mathbb{C}} V\}$ в $\mathbb{C}^{n+2}$. Несложно проверить, что длина в метрике $\bar{G}_\alpha$ характеристического векторного поля, отвечающего форме η_1, в начальный момент времени $r = 1$ равна $2(n+1)$. Для корректного определения метрики $\bar{G}_\alpha$ окружность, порождаемая соответствующим характеристическим векторным полем, должна быть профакторизована по дискретной подгруппе $\mathbb{Z}_{n+1}$, так как в 3-сасакиевом расслоении π^1 уже «проведена» соответствующая факторизация по $\mathbb{Z}_2$, см. [1]. Следовательно, метрики $\bar{G}_\alpha$ при $0 \leqslant \alpha < 1$ определены на тензорной степени π^{n+1}. Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном обзоре мы проиллюстрировали некоторые методы построения метрик со специальными голономиями. Насколько нам известно, большинство известных к настоящему времени примеров таких метрик либо неявны, т. е. не выписаны в алгебраической форме и обеспечиваются из теорем существования в пространствах Соболева, либо определены на некомпактных пространствах (случай данного обзора).

Помимо подробно описанных в разд. 2–4 примеров построения специальных метрик упомянем в конце обзора и о других результатах, эксплуатирующих ту же довольно общую идею: умножить «хорошее» многообразие на полупрямую и на полученном конусе продеформировать метрику конуса так, чтобы голономия стала исключительной. В работе [1] Я. В. Базайкиным был исследован случай $B(t) = C(t)$ в системе (5), который отвечает ситуации, когда кватернионно-кэлеров орбифолд 3-сасакиева многообразия M не обладает дополнительной кэлеровой структурой, как, например, в случае хопфовского расслоения S^7 над S^4. В частности, если M однородно, то M — либо семимерная сфера, либо многообразие Алоффа–Уоллаха $SU(3)/U(1)$, которое расслаивается над кэлеровым $\mathbb{C}P^2$. При этом система (5) сводится к системе $(3.2')$. Данная система была полностью исследована, и было доказано существование однопараметрического семейства метрик с голономией $\mathrm{Spin}(7)$, задаваемое начальными данными $A_1(0) = 0$, $0 < -A_2(0) = A_3(0) < B(0)$, $A_1(0)^2 + A_2(0)^2 + A_3(0)^2 + B(0)^2 = 1$. Однако оно не было выписано в алгебраической форме. При $A_1(0) = 0$, $-A_2(0) = A_3(0) = B(0) > 0$ метрика из данного семейства будет совпадать с метрикой Калаби с голономией $SU(4)$, выписанной в [32]. Строго говоря, в работе [1] и была развита техника анализа подобных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с однородной правой частью.

Мы упомянули, что особенность системы (как системы (3.2), так и системы $(3.2')$) при $t = 0$ может быть разрешена двумя способами: когда при $t \to 0$ схлопывается трехмерная сфера S^3 из 3-сасакиева расслоения, мы получаем пространство $\mathcal{M}_1$; когда при $t \to 0$ затягивается лишь окружность $S^1 \subset S^3$, то мы получаем пространство $\mathcal{M}_2$. Случай $\mathcal{M}_1$ в данном обзоре не рассматривался. В работе [2] Я. В. Базайкин исследовал вопрос существования метрик, отвечающих системе $(3.2')$ и определенных на пространстве $\mathcal{M}_1$. Было доказано существование двупараметрического семейства метрик с голономией $\mathrm{Spin}(7)$, оно также не выписано в явном виде и может быть параметризовано значениями функций $A_i(t_0)$ в сколь угодно малый момент времени t_0:

Теорема. *Пусть M — семимерное компактное 3-сасакиево многообразие. Тогда существует двупараметрическое семейство попарно негомотетичных римановых метрик на $\mathcal{M}_1$ с группой голономии $\mathrm{Spin}(7)$, удовлетворяющих начальным условиям $A_1(0) = A_2(0) = A_3(0) = 0$, $A_1'(0) = A_2'(0) = A_3'(0) = -1$, $B(0) > 0$, $B'(0) = 0$. Семейство метрик параметризуется тройкой чисел $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ таких, что $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \epsilon^2$ для достаточно малого $\epsilon > 0$. Для каждой такой тройки существует значение переменной $t = t_0$, при котором траектория (A_1, A_2, A_3) проходит через эту тройку, т. е. $A_1(t_0) = \lambda_1$, $A_2(t_0) = \lambda_2$, $A_3(t_0) = \lambda_3$.*

В работе [4] Я. В. Базайкин и О. А. Богоявленская рассмотрели конус над $S^3 \times S^3$ с целью поиска метрик с голономией G_2 вида

$$d\bar{s}^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^{3} A_i(t)^2(\eta_i + \bar{\eta}_i)^2 + \sum_{i=1}^{3} B_i(t)^2(\eta_i - \bar{\eta}_i)^2,$$

где η_i и $\bar{\eta}_j$ — характеристические 1-формы на двух трехмерных сферах. Поиск метрик данного вида и на таком многообразии уже осуществлялся в [14], а также в [15], где были найдены частные решения. С помощью уже развитых методов было строго показано существование однопараметрического семейства в случае, когда $A_2(t) = A_3(t)$, $B_2(t) = B_3(t)$. Возникающая в данном случае система обыкновенных дифференциальных уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1' &= \frac{1}{2}\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - \frac{A_1^2}{B_2^2}\right), \\ A_2' &= \frac{1}{2}\left(\frac{B_2^2 - A_2^2 + B_1^2}{B_1 B_2} - \frac{A_1}{A_2}\right), \\ B_1' &= \frac{A_2^2 + B_2^2 - B_1^2}{A_2 B_2}, \\ B_2' &= \frac{1}{2}\left(\frac{A_2^2 - B_2^2 + B_1^2}{A_2 B_1} + \frac{A_1}{B_2}\right). \end{aligned}$$

Рассмотренная метрика $d\bar{s}^2$ будет определена на $H^4 \times S^3$, где H^4 — четвертая тензорная степень канонического расслоения над $S^2 = \mathbb{C}P^1$:

Теорема. *Существует однопараметрическое семейство попарно негомотетичных полных римановых метрик $d\bar{s}^2$ с группой голономии G_2 на $H^4 \times S^3$, причем метрики можно параметризовать набором начальных данных $(A_1(0), A_2(0), B_1(0), B_2(0)) = (\mu, \lambda, 0, \lambda)$, где $\mu, \lambda > 0$ и $\mu^2 + 2\lambda^2 = 1$. При $t \to \infty$ метрики данного семейства сколь угодно близко аппроксимируются прямым произведением $S^1 \times C(S^2 \times S^3)$, где $C(S^2 \times S^3)$ — конус над произведением сфер. При этом сфера S^2 возникает как факторизация диагонально вложенной в $S^3 \times S^3$ трехмерной сферы по действию окружности, соответствующей векторному полю, сопряженному 1-форме $\eta_1 + \bar{\eta}_1$.*

Рассмотренный в данной теореме тип разрешения особенности $B_1(0) = 0$ соответствует типу $\mathcal{M}_2$, когда при $t \to 0$ затягивается одномерная окружность.

В статье [11] О. А. Богоявленская рассмотрела способ разрешения особенности, соответствующий $\mathcal{M}_1$, когда затягивается трехмерная сфера: $A_i(0) = 0$, $B_j(0) \neq 0$. Была доказана следующая

Теорема. *Для каждого параметра $p < 0$ существует полная риманова метрика вида $d\bar{s}^2$ с группой голономии G_2 на $S^3 \times \mathbb{R}^4$ такая, что*

$$p = \frac{12}{B_1^2(0)(A_1'''(0) - A_2'''(0))}.$$

При $t \to \infty$ метрики данного семейства сколь угодно близко аппроксимируются прямым римановым произведением $S^1 \times C(S^2 \times S^3)$, где $C(S^2 \times S^3)$ — конус над произведением сфер.

Метрики, определенные на некомпактных пространствах, как правило, находятся при анализе систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Можно рассмотреть значительно более абстрактную формулировку задачи: искать метрики с голономией $\mathrm{Spin}(7)$ (или G_2) на пространстве $T^i \times M^{8-i}$ (или, соответственно, $T^i \times M^{7-i}$), где T — пространство переменных, от которых будет зависеть деформация метрики на M. Грубо говоря, за счет увеличения числа переменных можно упрощать пространство M. Во всех упоминавшихся работах был рассмотрен лишь случай $T = \mathbb{R}_+$ и некоторых «хороших» M. Именно за счет одномерности T изучение сводилось к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, а не уравнений в частных производных. Попытки добавить новую независимую переменную пока приводили к системам, сводящимся к уже изученным. Было бы, например, интересно выписать систему (2.1) для случая $T = S^3$ и $M = \mathbb{C}P^2$, а начальные данные для соответствующей системы задавать в $\mathbf{1} \in T$. Это должна быть система в частных производных на две функции, зависящие от трех переменных. Как известно, никаких общих подходов к явному интегрированию подобных систем не существует.

Дадим здесь также краткий обзор групп голономии в псевдоримановом и, в частности, в лоренцевом случае. Если метрика на многообразии M является псевдоримановой с сигнатурой (p, q), где $p, q > 0$, то, как и в римановом случае, существует каноническая связность Леви-Чивита, задающая параллельный перенос. Это позволяет определить группу голономии H ровно таким же образом, как и в римановом случае, группа H при этом является подгруппой в псевдоортогональной группе $O(p, q)$. Но дальше начинаются различия. Даже в односвязном случае группа голономии H не будет подгруппой Ли, т. е. может быть замкнутой подгруппой, не являющейся подмногообразием (типичным примером таких подгрупп является плотная обмотка двумерного тора).

Следующее различие оказывается принципиальным для неримановой голономии. А именно, в римановом случае наличие инвариантного собственного подпространства $V \subset T_pM$ влечет инвариантное разложение $T_pM = V \oplus V^{\perp}$. Однако если метрика псевдориманова, то ортогональное дополнение к подпространству V может иметь ненулевое пересечение с самим V и в сумме с ним не давать T_pM. Например, ортогональное дополнение к изотропной прямой содержит саму эту прямую. Таким образом, в общем псевдоримановом случае следует различать неприводимое представление голономии (касательное пространство T_pM не обладает собственными инвариантными относительно H подпространствами) и неразложимое представление голономии (T_pM не может быть разложено в сумму инвариантных подпространств). Теорема де Рама в псевдоримановом случае [34] формулируется именно для понятия разложимости: если представление голономии псевдориманова многообразия разложимо, то многообразие локально является прямым произведением; более того, если многообразие геодезически полно, то такое разложение в прямое произведение можно сделать глобальным.

Таким образом, при классификации нeримановых групп голономии можно сразу потребовать неразложимость. Если дополнительно потребовать неприводимость (более сильное свойство), то список кандидатов в группы голономии был также получен Берже в [8], см. также [16], где были построены реализации псевдоримановыми многообразиями. Промежуточная ситуация приводимого, но неразложимого псевдориманова многообразия чрезвычайно сложна: на данный момент в общей ситуации отсутствует список кандидатов в группы голономии, подобный списку Берже. Исключение составляет лоренцев случай сигнатуры $(1, n)$.

В лоренцевом случае описаны типы подалгебр в $so(1, n)$, к которым должны принадлежать алгебры групп голономии лоренцевых пространств (аналог списка Берже) [9]. Любой подалгебре $\mathbf{h} \subset \mathbf{so(n)}$ можно четырьмя способами сопоставить алгебру $\mathbf{g} \subset \mathbf{so(1, n+1)}$, которая может быть алгеброй голономии лоренцева многообразия. При этом $\mathbf{h}$ называется ортогональной частью $\mathbf{g}$.

Естественным образом возникает вопрос: могут ли все эти алгебры быть реализованы лоренцевыми многообразиями? Положительный ответ был дан А. Галаевым в [24]. Однако метрики, построенные в [24], определены лишь локально. Следующий вопрос, который здесь возникает: можно ли построить глобально определенные лоренцевы метрики с предописанными алгебрами голономии? Однако до конца не ясно, как понимать «глобальность» метрик: геодезическая полнота не является в лоренцевой геометрии таким важным свойством, как в римановой (например, аналог теоремы Хопфа–Ринова о существовании кратчайшей кривой в случае геодезической полноты здесь неверен). Одним из вариантов понимания глобальности является глобальная гиперболичность лоренцевой метрики [10]. Во многих физических приложениях лоренцевой геометрии глобальная гиперболичность играет важную роль, и в [7] был поставлен вопрос о реализуемости групп голономии глобально гиперболическими лоренцевыми многообразиями. В [7] были реализованы некоторые лоренцевы группы голономии, как группы голономии лоренцевых цилиндров, см. теорему 3 и пример 3. В статье [3] Я. В. Базайкиным была доказана следующая

Теорема. *Пусть H — группа голономии риманова пространства, представление голономии которой не содержит в качестве прямого множителя представление изотропии кэлерова симметрического пространства ранга, большего единицы. Тогда для любой специальной лоренцевой группы голономии G с ортогональной частью H существует глобально гиперболическое лоренцево многообразие с группой голономии G.*

Заметим что, по-видимому, наличие специальной группы голономии лоренцева пространства является менее жестким условием, чем в римановом случае. Например, принадлежность ни к одному типу лоренцевой голономии не влечет эйнштейновости без дополнительных ограничений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Базайкин Я. В.* О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии $\mathrm{Spin}(7)$ // Сибирск. матем. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 11–32.
2. *Базайкин Я. В.* Некомпактные римановы пространства с группой голономии $\mathrm{Spin}(7)$ и 3-сасакиевы многообразия // Геометрия, топология и математическая физика. I: Сб. ст. К 70-летию со дня рождения акад. Сергея Петровича Новикова. Тр. МИАН. М., 2008. Т. 263. С. 6–17.
3. *Базайкин Я. В.* Глобально гиперболические лоренцевы пространства со специальными группами голономии // Сибирск. матем. журн. 2009. Т. 50, № 4. С. 721–736.
4. *Базайкин Я. В., Богоявленская О. А.* Полные римановы метрики с группой голономии G_2 на деформациях конусов над $S^3 \times S^3$ // Матем. заметки. 2013. Т. 95, № 3. С. 645–657.
5. *Базайкин Я. В., Малькович Е. Г.* Метрики с группой голономии G_2, связанные с 3-сасакиевым многообразием // Сибирск. матем. журн. 2008. Т. 49, № 1. С. 3–7.
6. *Базайкин Я. В., Малькович Е. Г.* $\mathrm{Spin}(7)$-структуры на комплексных линейных расслоениях и явные римановы метрики с группой голономии $SU(4)$ // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 4. С. 3–30.
7. *Baum H., Muller O.* Codazzi Spinors and Globally Hyperbolic Lorentzian Manifolds with Special Holonomy // Math. Zeitschrift. 2008. V. 258. P. 185–211.
8. *Berger M.* Sur les groupes d'holonomie des varietes a connexion affine et des varieetes Riemanniennes // Bull. Soc. Math. France. 1955. V. 83. P. 279–330.
9. *Berard-Bergery L., Ikemakhen A.* On the Holonomy of Lorentzian Manifolds // Differential Geometry: Geometry in Mathematical Physics and Related Topics: Proc. of Symp. Pure Math. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1993. V. 54. P. 27–40.
10. *Бим Дж., Эрлих П.* Глобальная лоренцева геометрия. М.: Мир, 1985.
11. *Богоявленская О. А.* Об одном новом семействе полных римановых метрик на $S^3 \times \mathbb{R}^4$ с группой голономии G_2 // Сибирск. матем. журн. 2013. Т. 54, № 3.
12. *Boyer C. P., Galicki K.* 3-Sasakian Manifolds // Surveys in Differential Geometry: Essays on Einstein Manifolds, Surv. Differ. Geom., VI. Boston, MA: Intern. Press, 1999. P. 123–184.
13. *Boyer C. P., Galicki K., Mann B. M.* The Geometry and Topology of 3-Sasakian Manifolds // J. reine angrew. Math. 1994. V. 455. P. 183–220.
14. *Brandhuber A., Gomis J., Gubser S. S., Gukov S.* Gauge Theory at Large N and New G_2 Holonomy Metrics // Nucl. Phys. B. 2011. V. 611, No. 1–3. P. 179–204.
15. *Bryant R. L., Salamon S. L.* On the Construction of Some Complete Metrics with Exceptional Holonomy // Duke Math. J. 1989. V. 58, No. 3. P. 829–850.
16. *Bryant R.* Classical, Exceptional and Exotic Holonomies: A Status Report // Actes de la table ronde de géométrie différentielle en l'honneur de Marcel Berger. Collection SMF Séminaires and congrès 1 (Soc. Math. France). Paris, 1996. P. 93–166.

17. *Calabi E.* Metriques kahleriennes et fibres holomorphes // Ann. Ecol. Norm. Sup. 1979. V. 12. P. 269–294.

18. *Cartan E.* Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann // Bull. Soc. Math. France. 1926. V. 54. P. 214–264; 1927. V. 55. P. 114–134; ou Oeuvres completes. t. I, V. 2. P. 587–659.

19. *Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N.* Hyper-Kähler Calabi Metrics, L^2 Harmonic Forms, Resolved M2-branes, and AdS_4/CFT_3 Correspondence // Nucl. Phys. B. 2001. V. 617. P.151–197.

20. *Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N.* Cohomogeneity One Manifolds of $\mathrm{Spin}(7)$ and G_2 Holonomy // Phys. Rev. D. 2002. V. 65, No. 10. P. 106004.

21. *Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N.* New Complete Noncompact $\mathrm{Spin}(7)$ Manifolds // Nucl. Phys. B. 2002. V. 620, No. 1–2. P. 29–54.

22. *Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N.* New Cohomogeneity One Metrics with $\mathrm{Spin}(7)$ Holonomy // J. Geom. Phys. 2004. V. 49, No. 3–4. P. 350–365.

23. *Eschenburg J. H.* Inhomogeneous Spaces of Positive Curvature // Diff. Geom. Appl. 1992. V. 2. P. 123–132.

24. *Galaev A. S.* Metrics that Realize All Lorentzian Holonomy Algebras // Intern. J. Geom. Methods Mod. Phys. 2006. V. 3, No. 5–6. P. 1025–1045.

25. *Gukov S., Sparks J.* M-Theory on $\mathrm{Spin}(7)$ Manifolds // Nucl. Phys. B. 2002. V. 625, No. 1–2. P. 3–69.

26. *Gray A.* Weak Holonomy Groups // Math. Z. 1971. V. 123. P. 290–300.

27. *Joyce D. D.* Compact Riemannian 8-manifolds with Holonomy $\mathrm{Spin}(7)$ // Invent. Math. 1996. V. 123, No. 3. P. 507–552.

28. *Kanno H., Yasui Y.* On $\mathrm{Spin}(7)$ Holonomy Metric Based on $SU(3)/U(1)$ // J. Geom. Phys. 2002. V. 43, No. 4. P. 293–309.

29. *Kanno H., Yasui Y.* On $\mathrm{Spin}(7)$ Holonomy Metric Based on $SU(3)/U(1)$ // Ibid. P. 310–326.

30. *Kovalev A.* Twisted Connected Sums and Special Riemannian Holonomy // J. Reine Angew. Math. 2003. V. 565. P. 125–160.

31. *Малькович Е. Г.* О новых явных римановых метриках с группой голономии $SU(2(n+1))$ // Сибирск. матем. журн. 2011. Т. 52, № 1. С. 95–99.

32. *Page D., Pope C.* Inhomogeneous Einstein Metrics on Complex Line Bundles // Class. Quan. Grav. 1987. V. 4. P. 213–225.

33. *de Rham G.* Sur la reductibilite d'un espace de Riemann // Commun. Math. Helv. 1952. V. 26. P. 328–344.

34. *Wu H.* On the de Rham Decomposition Theorem // Illinois J. Math. 1964. V. 8, No. 2. P. 291–311.