3009_P

УДК 517.956

СООТНОШЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Шарафутдинов

Аннотация. Для решения (u,p) стационарных уравнений Эйлера движения идеальной жидкости получена бесконечная серия соотношений ортогональности, каждое из которых приравнивает к нулю некоторую линейную комбинацию интегральных моментов степени m функций u_iu_j и p. В частности, соотношения ортогональности нулевой степени утверждают, что компоненты u_i поля скоростей попарно L^2-ортогональны и имеют одинаковые L^2-нормы. Соотношения ортогональности степени m справедливы для решения, принадлежащего весовому соболевскому пространству с зависящим от m весом.

DOI 10.17377/smzh.2060.01.001

Ключевые слова: уравнения Эйлера, стационарное течение идеальной жидкости, интегральные моменты.

1. Введение

При $n=2$ и $n=3$ уравнения Эйлера

$$\sum_{j=1}^{n} u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=0 \quad (i=1,\dots,n), \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} u=0 \tag{1.2}$$

описывают стационарное течение идеальной жидкости. С математической точки зрения эти уравнения представляют определенный интерес и в произвольной размерности $n\ge 2$. Здесь $u=(u_1(x),\dots,u_n(x))$ — векторное поле на $\mathbb{R}^n$ (скорость течения) и p — скалярная функция на $\mathbb{R}^n$ (давление). Известно несколько элементарных точных решений этих уравнений (прямая струя, деформационный поток, вихрь, закручивающаяся струя) [1, § 1.4]. Каждое из этих решений не ограничено во всем $\mathbb{R}^n$ и потому физически осмыслено лишь в ограниченных областях. Такие модельные решения обычно используются для локальной аппроксимации общего решения. В настоящей статье мы заинтересованы в изучении решений уравнений (1.1), (1.2), определенных и в некотором смысле ограниченных во всем $\mathbb{R}^n$.

Следующий пример в произвольной четной размерности найден Я. В. Базайкиным (частное сообщение) по просьбе автора. Скорее всего, он был известен и ранее.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 17–51–150001).

Пусть $(x_1,\dots,x_{2n})$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^{2n}$. Положим

$$u_{2i-1}(x)=-\varphi(|x|)\,x_{2i},\ u_{2i}(x)=\varphi(|x|)\,x_{2i-1}\ (i=1,\dots,n),\quad p(x)=\psi(|x|).$$

Легко проверить выполнимость уравнений (1.1), (1.2), если функции φ и ψ связаны уравнением $\psi'(r)=r\varphi^2(r)$. В частности, выбрав $\varphi\in C_0^\infty[0,\infty)$ так, что $\varphi(r)=0$ при $r\le r_0$ для некоторого $r_0>0$, и положив $\psi(r)=-\int\limits_r^\infty s\varphi^2(s)\,ds$, получим решение $u,p\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ уравнений Эйлера, имеющее компактный носитель. Заметим, что $\langle u(x),x\rangle=0$ (стандартное скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$ обозначается через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ — соответствующая норма). Поэтому интегральные кривые векторного поля u (траектории частиц) являются окружностями с центром в начале координат. Каждая сфера $\mathbb{S}^{2n-1}=\{x\in\mathbb{R}^{2n}\mid |x|=\mathrm{const}>0\}$ расслаивается на траектории частиц. Это хорошо известное расслоение Хопфа $\mathbb{S}^{2n-1}\to\mathbb{C}P^{n-1}$ нечетномерной сферы над комплексным проективным пространством.

В нечетных размерностях не известно примеров достаточно гладких ограниченных решений уравнений Эйлера. Приведем точную формулировку давно поставленного, но до сих пор открытого вопроса.

Гипотеза 1.1. *Любое гладкое финитное решение $u_i,p\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ $(i=1,2,3)$ уравнений Эйлера на $\mathbb{R}^3$ (более общо, на $\mathbb{R}^n$ при нечетном n) тождественно равно нулю.*

Читателя, интересующегося историей вопроса, отсылаем к статье Н. Надирашвили и С. Владуца [2], где предлагается интересный интегрально-геометрический подход к этой проблеме. Сравнительно недавно Н. Надирашвили [3] доказал гипотезу 1.1 для потоков Бельтрами (решение (u,p) уравнений Эйлера на $\mathbb{R}^3$ называется *потоком Бельтрами*, если $\operatorname{curl} u=\lambda u$ для некоторой скалярной функции λ).

Пусть $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ — пространство Шварца (бесконечно) гладких функций, быстро убывающих на бесконечности вместе со всеми производными. Гипотеза 1.1 равным образом может быть сформулирована для $u_i,p\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

В силу (1.2) уравнения (1.1) могут быть написаны в дивергентном виде

$$\sum_{j=1}^n\frac{\partial(u_iu_j)}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=0\quad(i=1,\dots,n).\tag{1.3}$$

Введя симметричное тензорное поле $f=(f_{ij})$ равенством $f_{ij}=u_iu_j$, запишем (1.3) так:

$$\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=0\quad(i=1,\dots,n).\tag{1.4}$$

Уравнения (1.4) линейны по f и p. Назовем (1.4) *уравнениями Надирашвили — Владуца*. Насколько известно автору, эти уравнения впервые систематически использованы в [2]. Разумеется, переход от (1.1), (1.2) к (1.4) является очень формальной линеаризацией. Тем не менее следующее обстоятельство достойно упоминания. Действительная и мнимая части комплекснозначного решения (u,p) уравнений (1.1), (1.2) не могут быть разделены, поскольку левая часть уравнения (1.1) квадратично зависит от u. Поэтому, говоря о решениях уравнений (1.1), (1.2), всегда будем предполагать, что (u,p) действительны. С другой стороны, все наши результаты о линейных уравнениях (1.4) справедливы и для комплекснозначных решений (f,p).

Сразу подчеркнем, что основные результаты настоящей статьи — приводимые далее теоремы 1.2–1.4 — относятся к линейным уравнениям Надирашвили — Владуца (1.4), хотя теоремы 1.2 и 1.3 сформулированы в терминах решения (u,p) исходных уравнений Эйлера (1.1), (1.2).

В принципе, линейные уравнения (1.4) могут быть эффективно решены. Действительно, предположив, что $f_{ij}, p \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, применим преобразование Фурье к (1.4) и придем к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \hat{f}_{ij}(y) + y_i \hat{p}(y) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \tag{1.5}$$

(Фурье-двойственная к x переменная обозначается через y). Для простоты рассмотрим случай, когда u и p (а следовательно, и f) имеют компактные носители. В этом случае функции $\hat{f}_{ij}$ и $\hat{p}$ аналитичны и, следовательно, однозначно определяются своими рядами Тейлора

$$\hat{f}_{ij}(y) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k_1,\dots,k_m=1}^{n} \frac{\partial^m \hat{f}_{ij}}{\partial y_{k_1} \dots \partial y_{k_m}}(0)\, y_{k_1} \dots y_{k_m}, \tag{1.6}$$

$$\hat{p}(y) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k_1,\dots,k_m=1}^{n} \frac{\partial^m \hat{p}}{\partial y_{k_1} \dots \partial y_{k_m}}(0)\, y_{k_1} \dots y_{k_m}. \tag{1.7}$$

Для определенности коэффициенты внутренних сумм в (1.6), (1.7) именуем *коэффициентами Тейлора степени* m. В разд. 3, 4 найдем полную систему линейных соотношений между коэффициентами рядов (1.6) и (1.7), эквивалентную системе (1.5), причем эта бесконечная система состоит из последовательности конечных систем линейных однородных уравнений, связывающих коэффициенты Тейлора фиксированной степени m. Найдем общее решение каждой из этих конечных систем, зависящее от нескольких произвольных постоянных. Тем самым будет найдено общее решение уравнений Надирашвили — Владуца (1.4), зависящее от счетного набора произвольных постоянных (конечный набор постоянных для каждого $m = 0, 1, \dots$).

Предположим, что мы нашли общее решение (f,p) линейных уравнений Надирашвили — Владуца (1.4). Конечно, общее решение будет включать несколько произвольных параметров (постоянных или функций). Теперь гипотеза 1.1 сводится к вопросу: можно ли эти произвольные параметры выбрать так, что система

$$u_i u_j = f_{ij} \tag{1.8}$$

допускает решение, удовлетворяющее уравнению $\operatorname{div} u = 0$? По крайней мере одно необходимое условие очевидно: $\operatorname{rank}(f_{ij}(x)) \le 1$ в любой точке $x \in \mathbb{R}^n$.

К сожалению, вместо (f,p) можно более или менее явно описать преобразование Фурье $(\hat{f}, \hat{p})$ общего решения. Тем самым (1.8) заменяется системой

$$\hat{u}_i * \hat{u}_j = \hat{f}_{ij}, \tag{1.9}$$

где $*$ обозначает свертку. Вопрос об условиях совместности для системы (1.9) гораздо труднее, чем для (1.8).

Что можно сделать в настоящее время, так это выписать некоторые интегральные тождества для решения (f,p) уравнений Надирашвили — Владуца, соответствующие вышеупомянутым соотношениям между коэффициентами

Тейлора функций $\hat{f}_{ij}$ и $\hat{p}$. Полагая $f_{ij} = u_i u_j$, приходим к интегральным тождествам, справедливым для действительных решений (u, p) уравнений Эйлера (1.1), (1.2). Каждое из этих тождеств будет квадратичным по u и линейным по p. Такие тождества будут называться *соотношениями ортогональности*, название оправдывается приведенной ниже теоремой 1.2. Точное определение соотношений ортогональности приводится ниже после теоремы 1.3.

Прежде чем приводить формулировки наших основных результатов, обсудим вопрос о слабых решениях уравнений Эйлера. Это позволит сформулировать наши результаты в максимальной общности. Через

$$(\varphi, \psi)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx$$

обозначается L^2-скалярное произведение и $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ — соответствующая норма. Напомним, что гильбертово пространство $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ (обозначение $H^1(\mathbb{R}^n)$ также широко используется для этого пространства) может быть определено как пополнение пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|\varphi\|^2_{W_2^1(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Банахово пространство $W_1^1(\mathbb{R}^n)$ определяется как пополнение пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|\varphi\|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Отметим, что уравнения Эйлера (1.1), (1.2) имеют смысл для $u_i \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$ $(i = 1, \dots, n)$ и $p \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$, где левые части рассматриваются как функции из $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1.2. *Если действительные функции $u_i \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$ $(i = 1, \dots, n)$ и $p \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$ образуют решение уравнений Эйлера, то*

$$(u_i, u_j)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0 \quad (i \neq j), \tag{1.10}$$

$$\|u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \dots = \|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} p(x)\,dx. \tag{1.11}$$

В частности, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} p(x)\,dx \le 0$. Здесь равенство достигается тогда и только тогда, когда $u \equiv 0$ и $p \equiv 0$.

Формулы (1.10), (1.11) представляют соотношения ортогональности нулевой степени. Доказательство теоремы 1.2 приведено в разд. 3 для полноты изложения. Этот результат не является новым. Например, Чае и Константин [4] доказывают утверждение, отличающееся от теоремы 1.2 лишь незначительными различиями в условиях. Наше доказательство теоремы 1.2 совпадает с доказательством, приведенным в [4], с единственным различием: мы не используем преобразование Рисса. Основываясь на теореме 1.2, Чае и Константин затем приводят очень короткое и элегантное доказательство гипотезы 1.1 для бельтрамиевых потоков в размерности три. Первоначальное доказательство Н. Надирашвили более сложное, хотя оно справедливо при более слабых предположениях.

Для обсуждения соотношений ортогональности степени $m \geq 1$ понадобятся весовые соболевские пространства. Для действительного числа α гильбертово пространство $W^1_{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ определяется как пополнение пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|\varphi\|_{W^1_{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)} = \|(1+|x|^2)^{\alpha/2}\varphi\|_{W^1_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Банахово пространство $W^1_{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ определяется как пополнение пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|\varphi\|_{W^1_{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)} = \|(1+|x|^2)^{\alpha/2}\varphi\|_{W^1_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Если $\varphi, \psi \in W^1_{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, то произведение $\varphi\psi$ и свертка $\varphi * \psi$ принадлежат пространству $W^1_{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Если $\varphi \in W^1_{1,m}(\mathbb{R}^n)$ для некоторого целого $m \geq 0$, то $\hat{\varphi} \in C^m(\mathbb{R}^n)$. Этих свойств вполне достаточно для обобщения наших соотношений ортогональности степени m на действительные решения $u_i \in W^1_{2,m}(\mathbb{R}^n)$ $(i = 1,\dots,n)$, $p \in W^1_{1,m}(\mathbb{R}^n)$ уравнений Эйлера.

Соотношения ортогональности первой степени описываются следующим утверждением.

Теорема 1.3. *Если действительные функции $u_i \in W^1_{2,1}(\mathbb{R}^n)$ $(i = 1,\dots,n)$ и $p \in W^1_{1,1}(\mathbb{R}^n)$ образуют решение уравнений Эйлера, то*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_k u_i(x) u_j(x)\,dx = 0 \quad (i \neq j), \tag{1.12}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_k u_i^2(x)\,dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_k p(x)\,dx \tag{1.13}$$

для всех индексов $(i \neq j, k)$.

Переходя к обсуждению соотношений ортогональности высших степеней, сначала введем несколько предварительных понятий. По большей части ограничимся рассмотрением уравнений Надирашвили — Владуца (1.4) на пространстве Шварца, поскольку нас в первую очередь интересуют алгебраические свойства решений этих уравнений. Введем в рассмотрение топологическое векторное пространство

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n; S^2 \oplus \mathbb{C}) = \underbrace{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}_{n(n+1)/2+1}.$$

Это обозначение будет объяснено в конце разд. 2 наряду с другими тензорными обозначениями. Элементы пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n; S^2 \oplus \mathbb{C})$ обозначаем парами (f, p), где $f = (f_{ij})$, $f_{ij} = f_{ji}$ и $f_{ij}, p \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq i, j \leq n)$.

Ниже в разд. 4 покажем, что если пара $(f,p) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n; S^2 \oplus \mathbb{C})$ является решением уравнений Надирашвили — Владуца (1.4), то преобразования Фурье $\hat{f}_{ij}, \hat{p}$ удовлетворяют уравнениям

$$\sigma(jk_1 \dots k_m)\left(\frac{\partial^m \hat{f}_{ij}}{\partial y_{k_1} \dots \partial y_{k_m}}(0) + \delta_{ij}\,\frac{\partial^m \hat{p}}{\partial y_{k_1} \dots \partial y_{k_m}}(0)\right) = 0 \tag{1.14}$$

для всех $m = 0, 1, \dots$ и для всех значений индексов $1 \leq i, j, k_1, \dots, k_m \leq n$. Здесь δ_{ij} — символ Кронекера и $\sigma(jk_1 \dots k_m)$ — симметрирование по индексам $(j, k_1, \dots, k_m)$. Напомним определение частичного симметрирования:

$$\sigma(i_1 \dots i_r) g_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} = \frac{1}{r!} \sum_{\pi \in \Pi_r} g_{i_{\pi(1)} \dots i_{\pi(r)} j_1 \dots j_s},$$

где суммирование производится по множеству Π_r всех перестановок множества $\{1,\dots,r\}$.

Будем говорить, что пара $(f,p)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n;S^2\oplus\mathbb{C})$ является *формальным решением уравнений Надирашвили — Владуца*, если она удовлетворяет уравнениям (1.14) для всех $m=0,1,\dots$. Обозначим через $L\subset\mathscr{S}(\mathbb{R}^n;S^2\oplus\mathbb{C})$ пространство всех формальных решений уравнений Надирашвили — Владуца. Пространство L рассматривается как топологическое векторное пространство с индуцированной из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n;S^2\oplus\mathbb{C})$ топологией. Пусть L^* — сопряженное пространство.

Для целого $m\ge 0$ *интегральными моментами степени* m называем любые линейные комбинации функционалов $\mathbb{F}^m_{ij|k_1\dots k_m}\in L^*$ и $\mathbb{P}^m_{k_1\dots k_m}\in L^*$, определенных для всех значений индексов $1\le i,j,k_1,\dots,k_m\le n$ равенствами

$$\mathbb{F}^m_{ij|k_1\dots k_m}(f,p)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}x_{k_1}\dots x_{k_m}\,f_{ij}(x)\,dx, \tag{1.15}$$

$$\mathbb{P}^m_{k_1\dots k_m}(f,p)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}x_{k_1}\dots x_{k_m}\,p(x)\,dx. \tag{1.16}$$

Вертикальная черта в обозначении $\mathbb{F}^m_{ij|k_1\dots k_m}$ подчеркивает, что тензор $\mathbb{F}^m=\big(\mathbb{F}^m_{ij|k_1\dots k_m}\big)$ симметричен по первым двум и последним m индексам. Обозначим через L^*_m пространство всех интегральных моментов степени m. Это конечномерное подпространство в L^*.

Подчеркнем, что функционалы $\mathbb{F}^m_{ij|k_1\dots k_m},\mathbb{P}^m_{k_1\dots k_m}\in L^*$ подчинены некоторым линейным зависимостям. Например, $\mathbb{F}^0_{ij}=0$ при $i\ne j$, как видно из теоремы 1.2. Для каждого целого $m\ge 0$ найдем размерность $N(m,n)$ пространства L^*_m и выберем некоторый базис этого пространства. Для всех значений индексов $1\le i,j,k_1,\dots,k_m\le n$ выпишем явные формулы, выражающие $\mathbb{F}^m_{ij|k_1\dots k_m}\in L^*$ и $\mathbb{P}^m_{k_1\dots k_m}\in L^*$ через выбранный базис. Последние формулы, равно как и любые их линейные комбинации, будут называться *соотношениями ортогональности степени* m. Другими словами, соотношения ортогональности степени m — это линейные зависимости между интегралами (1.15), (1.16), вытекающие из уравнений Надирашвили — Владуца.

Введем следующие линейные комбинации интегральных моментов (1.15):

$$\mathbb{Q}^m_{ij|k_1\dots k_m}=\frac{m-1}{m+1}\sigma(ij)\sigma(k_1\dots k_m)\big(\mathbb{F}^m_{ij|k_1\dots k_m}-2\mathbb{F}^m_{ik_1|jk_2\dots k_m}+\mathbb{F}^m_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}\big). \tag{1.17}$$

Теорема 1.4. *Для каждого целого $m\ge 2$ интегральные моменты степени m удовлетворяют соотношениям ортогональности*

$$\begin{aligned}\mathbb{F}^m_{ij|k_1\dots k_m}&=\mathbb{Q}^m_{ij|k_1\dots k_m}-\frac{1}{m+1}\sigma(ij)\sigma(k_1\dots k_m)\\&\quad\times\big(2\delta_{ij}\mathbb{P}^m_{k_1\dots k_m}+2(m-1)\delta_{ik_1}\mathbb{P}^m_{jk_2\dots k_m}-(m-1)\delta_{k_1k_2}\mathbb{P}^m_{ijk_3\dots k_m}\big).\end{aligned} \tag{1.18}$$

Тензор $\mathbb{Q}^m=\big(\mathbb{Q}^m_{ij|k_1\dots k_m}\big)$ имеет $\frac{n(m-1)}{2}\binom{n+m-1}{m+1}$ линейно независимых компонент, а тензор $\mathbb{P}^m=\big(\mathbb{P}^m_{k_1\dots k_m}\big)$ имеет $\binom{n+m-1}{m}$ линейно независимых компонент. Эти тензоры независимы друг от друга, т. е. любая линейная зависимость между компонентами этих тензоров сводится к двум линейным зависимостям, одна *из которых связывает компоненты тензора $\mathbb{Q}^m$ и не содержит компонент тензора $\mathbb{P}^m$, а вторая связывает компоненты тензора $\mathbb{P}^m$ и не содержит компонент тензора $\mathbb{Q}^m$. Таким образом, размерность $N(m,n)$ пространства интегральных моментов степени m равна*

$$N(m,n) = \frac{n(m-1)}{2}\binom{n+m-1}{m+1} + \binom{n+m-1}{m}. \tag{1.19}$$

Любой интегральный момент степени m представим в виде линейной комбинации компонент тензора $\mathbb{F}^m$.

Пространство $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n; S^2 \oplus \mathbb{C})$ плотно в банаховом пространстве

$$W^1_{1,m}(\mathbb{R}^n; S^2 \oplus \mathbb{C}) = \underbrace{W^1_{1,m}(\mathbb{R}^n) \times \dots \times W^1_{1,m}(\mathbb{R}^n)}_{n(n+1)/2+1}$$

для любого целого $m \geq 0$. Обозначим через $\widetilde{L}_m \subset W^1_{1,m}(\mathbb{R}^n; S^2 \oplus \mathbb{C})$ пространство всех решений уравнений (1.14), рассматриваемое как банахово пространство с индуцированной из $W^1_{1,m}(\mathbb{R}^n; S^2 \oplus \mathbb{C})$ нормой. Элементы пространства $\widetilde{L}_m$ именуем *слабыми формальными решениями уравнений Надирашвили – Владуца*. Как видно из (1.10), (1.11), компоненты тензоров $\mathbb{F}^m$ и $\mathbb{P}^m$ могут рассматриваться в качестве непрерывных линейных функционалов на пространстве $\widetilde{L}_m$. Пространство L^*_m интегральных моментов степени m можно отождествить с подпространством в $(\widetilde{L}_m)^*$, порожденным компонентами тензоров $\mathbb{F}^m$ и $\mathbb{P}^m$.

Если $u_i \in W^1_{2,m}(\mathbb{R}^n), p \in W^1_{1,m}(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq i \leq n)$ — решение уравнений Эйлера (1.1), (1.2), то $(f,p) \in W^1_{1,m}(\mathbb{R}^n; S^2 \oplus \mathbb{C})$ — решение уравнений Надирашвили — Владуца, где $f_{ij} = u_i u_j$. Тем самым $\mathbb{P}^m_{k_1\dots k_m}$ и

$$\mathbb{F}^m_{ij|k_1\dots k_m}(u,p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_{k_1}\dots x_{k_m}\, u_i(x) u_j(x)\, dx \tag{1.20}$$

могут рассматриваться в качестве функционалов на многообразии решений уравнений Эйлера.

Следствие 1.5. *Фиксируем целое число $m \geq 0$. Пусть действительные функции $u_i \in W^1_{2,m}(\mathbb{R}^n)$ $(i = 1,\dots,n)$ и $p \in W^1_{1,m}(\mathbb{R}^n)$ образуют решение уравнений Эйлера* (1.1), (1.2). *Тогда справедливы соотношения ортогональности* (1.18), *если считать, что $\mathbb{Q}^0_{ij} = 0$ и $\mathbb{Q}^1_{ij|k} = 0$ для всех значений индексов (i,j,k). В частности,*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i^m\, u_i(x) u_j(x)\, dx = 0 \quad (i \neq j). \tag{1.21}$$

Формула (1.21) есть частный случай формулы (1.18), поскольку $\mathbb{Q}^m_{ij|i\dots i} = 0$, как видно из (1.12).

Отметим, что в случаях $m = 0$ и $m = 1$ следствие 1.5 совпадает с теоремами 1.2 и 1.3 соответственно, если считать, что $\mathbb{Q}^0 = 0$ и $\mathbb{Q}^1 = 0$.

Подчеркнем основное различие между теоремой 1.4 и следствием 1.5: мы не можем определить максимальное число линейно независимых интегральных моментов степени m, рассматриваемых в качестве функционалов на многообразии решений (u,p) уравнений Эйлера. Например, все такие моменты равны нулю, если справедливо следующее усиление гипотезы 1.1, содержащее целый параметр $m \geq 0$.

Гипотеза 1.6. *Не существует нетривиального решения* $u_i \in W^1_{2,m}(\mathbb{R}^3)$ $(i = 1,2,3)$, $p \in W^1_{1,m}(\mathbb{R}^3)$ *уравнений Эйлера на* $\mathbb{R}^3$ *(более общо, на* $\mathbb{R}^n$ *при нечетном* n*).*

По мнению автора, теоремы 1.2–1.4 представляют некоторый самостоятельный интерес. Как отмечено выше, теорема 1.2 была использована для доказательства гипотезы 1.1 для потоков Бельтрами в размерности три [4]. С другой стороны, теоремы 1.2–1.4 сами по себе, без привлечения дополнительных аргументов, недостаточны для доказательства гипотезы 1.1 в общей случае. Действительно, подчеркнем, что теоремы 1.2–1.4 справедливы в любой размерности, они не различают случаи четного и нечетного n.

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. В разд. 2 напоминаем основные свойства свертки и затем показываем, как произвольное линейное соотношение между коэффициентами рядов Тейлора (1.6), (1.7) влечет соответствующее соотношение ортогональности. Разд. 2 завершается кратким обсуждением симметричных тензоров. Остальная часть статьи имеет чисто алгебраический характер. Теоремы 1.2 и 1.3 доказываются в разд. 3, эти доказательства очень элементарны. В разд. 4 рассматриваются соотношения ортогональности высших степеней, здесь немного используется специфическая тензорно-алгебраическая техника. Заключительный разд. 5 посвящен соотношениям ортогональности второй степени, представляющим, по мнению автора, наибольший интерес. Теорема 5.1 повторяет в упрощенных обозначениях теорему 1.4 для случая $m = 2$. Также приведено важное предложение 5.3 о матрице Гессе функции $\hat p(y)$ в точке $y = 0$. Кроме того, в разд. 5 объясняется происхождение формулы (1.17). В случае $m = 2$ тензор $\big(\mathbb{Q}^2_{ij|k\ell}\big)$ совпадает с точностью до постоянного множителя со значением $(\widetilde{W}\hat f)(0)$ оператора Сен-Венана $\widetilde{W}$. Этот оператор был введен в [5, гл. 2] для изучения системы

$$\sigma(i_1\dots i_k)\Big(\frac{\partial u_{i_1\dots i_{k-1}}}{\partial x_{i_k}}\Big) = f_{i_1\dots i_k}.$$

Равенство $\widetilde{W}f = 0$ является необходимым и достаточным условием разрешимости этой системы в односвязной области пространства $\mathbb{R}^n$. В случае $k = 2$ это условие совместности деформаций, хорошо известное в теории упругости. Оно было найдено Сен-Венаном.

2. Свертка и интегральные моменты

Напомним некоторые стандартные свойства свертки. Для $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ свертка

$$(\varphi * \psi)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(y-z)\psi(z)\,dz$$

также принадлежит $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Свертка ассоциативна, коммутативна и обладает следующими свойствами:

$$(\varphi * \psi)(0) = (\varphi, \overline{\widetilde{\psi}})_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (\psi, \overline{\widetilde{\varphi}})_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.1}$$

где $\widetilde{\varphi}(y) = \varphi(-y)$;

$$\widehat{\varphi * \psi} = (2\pi)^{n/2}\widehat{\varphi}\widehat{\psi}, \quad \widehat{\varphi\psi} = (2\pi)^{-n/2}\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}; \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial(\varphi*\psi)}{\partial y_i}=\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}*\psi=\varphi*\frac{\partial\psi}{\partial y_i}.$$

Последняя формула влечет аналогичное соотношение для высших производных:

$$D^\alpha(\varphi*\psi)=(D^\alpha\varphi)*\psi=\varphi*(D^\alpha\psi) \tag{2.3}$$

для любого мультииндекса $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, где $D^\alpha=(-i)^{|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_1^{\alpha_1}\dots\partial y_n^{\alpha_n}}$.

Заметим,что $\widetilde{\widehat{\psi}}=\overline{\widehat{\psi}}$ для действительной функции ψ. Поэтому из (2.1) и формулы Планшереля следует, что

$$(\widehat{\varphi}*\widehat{\psi})(0)=(\widehat{\varphi},\widehat{\psi})_{L^2(\mathbb{R}^n)}=(\varphi,\psi)_{L^2(\mathbb{R}^n)}\quad \text{для действительной } \psi.$$

Вместе с (2.3) это дает

$$(D^\alpha(\widehat{\varphi}*\widehat{\psi}))(0)=(\widehat{x^\alpha\varphi}*\widehat{\psi})(0)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}x^\alpha\varphi(x)\psi(x)\,dx\quad \text{для действительной } \psi. \tag{2.4}$$

Покажем, как формула (2.4) может быть использована для вывода соотношений ортогональности. Зафиксируем целое число $m\ge 0$. Пусть действительные функции $u_i\in W^1_{2,m}(\mathbb{R}^n)$ и $p\in W^1_{1,m}(\mathbb{R}^n)$ образуют решение уравнений Эйлера. Определим тензорное поле $f\in W^1_{1,m}(\mathbb{R}^n;S^2\mathbb{R}^n)$ равенством $f_{ij}=u_iu_j$ (определение пространства $S^2\mathbb{R}^n$ приведено в конце настоящего раздела). Тогда

$$\hat f_{ij}=(2\pi)^{-n/2}\hat u_i*\hat u_j.$$

Предположим, что преобразования Фурье $\hat f$ и $\hat p$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i,j=1}^n(P_{ij}(D)\hat f_{ij})(0)+(Q(D)\hat p)(0)=0, \tag{2.5}$$

где $P_{ij}(D)=\sum\limits_{|\alpha|=m}p_{ij,\alpha}D^\alpha$ и $Q(D)=\sum\limits_{|\alpha|=m}q_\alpha D^\alpha$ — однородные дифференциальные операторы порядка m с постоянными коэффициентами. Согласно (2.2) и (2.4)

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n(P_{ij}(D)\hat f_{ij})(0)&=(2\pi)^{-n/2}\sum_{i,j=1}^n(P_{ij}(D)(\hat u_i*\hat u_j))(0)\\&=(2\pi)^{-n/2}\sum_{i,j=1}^n\int\limits_{\mathbb{R}^n}P_{ij}(x)u_i(x)u_j(x)\,dx.\end{aligned}$$

Кроме того,

$$(Q(D)\hat p)(0)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q(x)p(x)\,dx.$$

Подставив эти значения в (2.5), приходим к соотношению ортогональности

$$\sum_{i,j=1}^n\int\limits_{\mathbb{R}^n}P_{ij}(x)u_i(x)u_j(x)\,dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q(x)p(x)\,dx=0.$$

Каждое такое соотношение квадратично по u и линейно по p.

Для целого числа $r \geq 0$ пусть

$$\otimes^r \mathbb{R}^n = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n}_{r}$$

— комплексное векторное пространство тензоров валентности r на $\mathbb{R}^n$. В координатах тензор $g \in \otimes^r \mathbb{R}^n$ представляется в виде $g = (g_{i_1 \dots i_r})$, где *координаты* (или *компоненты*) $g_{i_1 \dots i_r} \in \mathbb{C}$ тензора g определены для всех $1 \leq i_\alpha \leq n$ ($\alpha = 1, \dots, r$). Используем только декартовы координаты, так что нет различия между ко- и контравариантными тензорами. Поэтому иногда индексы тензора будут писаться в верхних позициях, т. е. уславливаемся, что $g^{i_1 \dots i_r} = g_{i_1 \dots i_r}$. Это соглашение позволяет использовать правило суммирования Эйнштейна: суммирование от 1 до n предполагается по каждому индексу, повторяющемуся в мономе в верхней и нижней позициях. Скалярное произведение на $\otimes^r \mathbb{R}^n$ вводится формулой

$$\langle g, h \rangle = g^{i_1 \dots i_r} \bar{h}_{i_1 \dots i_r},$$

где $\bar{h}_{i_1 \dots i_r} = \overline{h_{i_1 \dots i_r}}$.

Пусть $S^r \mathbb{R}^n$ — подпространство пространства $\otimes^r \mathbb{R}^n$, состоящее из симметричных тензоров g, координаты которых $g_{i_1 \dots i_r}$ не меняются при любой перестановке индексов. Размерность этого пространства равна $\binom{n+r-1}{r}$. Обозначение $S^r \mathbb{R}^n$ чаще всего будем сокращать до S^r, считая размерность n фиксированной. Будем также использовать тензоры, обладающие частичными симметриями, т. е. симметричные по одной или двум группам своих индексов. Например, определенный формулой (1.15) тензор $\mathbb{F} = (\mathbb{F}_{ij|k_1 \dots k_m})$ принадлежит пространству $S^2 \otimes S^m$. Этот факт подчеркивается вертикальной чертой в обозначении $\mathbb{F}_{ij|k_1 \dots k_m}$.

Пусть $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n; S^2 \oplus \mathbb{C})$ — топологическое векторное пространство функций (f, p) класса C^∞ на $\mathbb{R}^n$ со значениями в конечномерном векторном пространстве $S^2 \oplus \mathbb{C}$, быстро убывающих на бесконечности вместе со всеми производными. Упорядочив компоненты тензора $f = (f_{ij})$, имеем отождествление

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n; S^2 \oplus \mathbb{C}) = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \otimes (S^2 \oplus \mathbb{C}) = \underbrace{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \times \dots \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}_{n(n+1)/2+1}.$$

3. Соотношения ортогональности нулевой и первой степеней

Доказательство теоремы 1.2. В предположении, что $u_i \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$, $p \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$, преобразования Фурье $\hat{f}$ и $\hat{p}$ непрерывны на $\mathbb{R}^n$. Поэтому можно написать

$$\hat{f}_{ij}(y) = \hat{f}_{ij}(0) + o(1), \quad \hat{p}(y) = \hat{p}(0) + o(1) \quad \text{при } y \to 0.$$

Подставив эти выражения в (1.5), получим

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{f}_{ij}(0) y_j + \hat{p}(0) y_i = o(|y|) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Это можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} (\hat{f}_{ij}(0) + \delta_{ij} \hat{p}(0)) y_j = o(|y|) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Таким образом, линейные по y формы, стоящие в левых частях этих уравнений, должны быть тождественно равны нулю. Приравнивая к нулю коэффициенты форм, приходим к соотношениям

$$\hat f_{ij}(0) + \delta_{ij}\,\hat p(0) = 0 \quad (1 \le i, j \le n).$$

По схеме, представленной в разд. 2, эти соотношения дают

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_i(x)u_j(x)\,dx + \delta_{ij}\int\limits_{\mathbb{R}^n} p(x)\,dx = 0 \quad (1 \le i, j \le n),$$

что эквивалентно равенствам (1.10), (1.11). $\square$

Доказательство теоремы 1.3. В предположении, что $u_i \in W^1_{2,1}(\mathbb{R}^n)$, $p \in W^1_{1,1}(\mathbb{R}^n)$, преобразования Фурье $\hat f_{ij}$ и $\hat p$ принадлежат $C^1(\mathbb{R}^n)$. Поэтому

$$\hat f_{ij}(y) = -\delta_{ij}\hat p(0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \hat f_{ij}}{\partial y_k}(0)\,y_k + o(|y|), \quad \hat p(y) = \hat p(0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \hat p}{\partial y_k}(0)\,y_k + o(|y|).$$

Подставив эти выражения в (1.5), получим

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial \hat f_{ij}}{\partial y_k}(0)\,y_j y_k + y_i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \hat p}{\partial y_k}(0)\,y_k = o(|y|^2) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Это можно записать в виде

$$\sum_{j,k=1}^{n}\Big(\frac{\partial \hat f_{ij}}{\partial y_k}(0) + \delta_{ij}\frac{\partial \hat p}{\partial y_k}(0)\Big)y_j y_k = o(|y|^2) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Симметризовав коэффициенты квадратичной формы в левой части, перепишем еще раз в виде

$$\sum_{j,k=1}^{n}\Big(\frac{\partial \hat f_{ij}}{\partial y_k}(0) + \frac{\partial \hat f_{ik}}{\partial y_j}(0) + \delta_{ij}\frac{\partial \hat p}{\partial y_k}(0) + \delta_{ik}\frac{\partial \hat p}{\partial y_j}(0)\Big)y_j y_k = o(|y|^2) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Таким образом, квадратичные формы, стоящие в левых частях этих уравнений, должны быть тождественно равны нулю. Приравнивая к нулю коэффициенты форм, приходим к соотношениям

$$\frac{\partial \hat f_{ij}}{\partial y_k}(0) + \frac{\partial \hat f_{ik}}{\partial y_j}(0) = -\delta_{ij}\frac{\partial \hat p}{\partial y_k}(0) - \delta_{ik}\frac{\partial \hat p}{\partial y_j}(0),$$

которые должны выполняться для всех индексов (i, j, k). По схеме, представленной в разд. 2, эти соотношения дают

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_k\,u_i(x)u_j(x)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_j\,u_i(x)u_k(x)\,dx = -\delta_{ij}\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_k\,p(x)\,dx - \delta_{ik}\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_j\,p(x)\,dx. \tag{3.1}$$

При $j \ne i \ne k$ равенство (3.1) дает

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_k\,u_i(x)u_j(x)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_j\,u_i(x)u_k(x)\,dx = 0 \quad (j \ne i \ne k). \tag{3.2}$$

В частности, положив $j = k \neq i$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_k\, u_i(x) u_k(x)\, dx = 0 \quad (i \neq k). \tag{3.3}$$

При $i = j$ равенство (3.1) выглядит так:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_k\, u_i^2(x)\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i\, u_i(x) u_k(x)\, dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_k\, p(x)\, dx - \delta_{ik} \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i\, p(x)\, dx. \tag{3.4}$$

Если $i \neq k$, то это дает

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_k\, u_i^2(x)\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i\, u_i(x) u_k(x)\, dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_k\, p(x)\, dx \quad (i \neq k).$$

Второй интеграл в левой части равен нулю в силу (3.3). Таким образом, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_k\, u_i^2(x)\, dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_k\, p(x)\, dx \quad (i \neq k). \tag{3.5}$$

С другой стороны, полагая $i = k$ в (3.4), видим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i\, u_i^2(x)\, dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i\, p(x)\, dx. \tag{3.6}$$

Равенства (3.5) и (3.6) эквивалентны формуле (1.13).

Остается доказать формулу (1.12). Ввиду равенства (3.3) достаточно доказать формулу (1.12) в случае, когда индексы (i, j, k) попарно различны. Воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_k u_i u_j\, dx &= \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_k u_i u_j\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_j u_i u_k\, dx\Big)\\ &+ \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_k u_i u_j\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i u_j u_k\, dx\Big) - \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_j u_i u_k\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i u_j u_k\, dx\Big).\end{aligned}$$

Если индексы (i, j, k) попарно различны, то правая часть равна нулю в силу (3.2). $\square$

4. Соотношения ортогональности высших степеней

Фиксируем целое число $m \geq 0$. Пусть действительные функции $u_i \in W^1_{2,m}(\mathbb{R}^n)$ $(i = 1, \dots, n)$, $p \in W^1_{1,m}(\mathbb{R}^n)$ представляют решение уравнений Эйлера. Определим тензорное поле $f \in W^1_{1,m}(\mathbb{R}^n; S^2)$ равенством $f_{ij} = u_i u_j$. Тогда $(f, p) \in W^1_{1,m}(\mathbb{R}^n; S^2 \oplus \mathbb{C})$. Преобразования Фурье $\hat{f}_{ij}$ и $\hat{p}$ принадлежат пространству $C^m(\mathbb{R}^n)$. Поэтому можем написать

$$\begin{aligned}\hat{f}_{ij}(y) &= \sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!} \hat{f}_{ij\,;\,k_1\dots k_\ell}(0)\, y^{k_1} \dots y^{k_\ell} + o(|y|^m),\\ \hat{p}(y) &= \sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!} \hat{p}_{\,;\,k_1\dots k_\ell}(0)\, y^{k_1} \dots y^{k_\ell} + o(|y|^m),\end{aligned} \tag{4.1}$$

где использованы тензорные обозначения частных производных:

$$\hat{f}_{ij\,;\,k_1\ldots k_\ell} = \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_\ell}\hat{f}_{ij}}{\partial y_{k_1}\ldots\partial y_{k_\ell}}, \quad \hat{p}_{\,;\,k_1\ldots k_\ell} = \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_\ell}\hat{p}}{\partial y_{k_1}\ldots\partial y_{k_\ell}}.$$

Кроме того, $y^k = y_k$ и правило суммирования Эйнштейна использовано в (4.1). Подставляя выражения (4.1) в уравнение (1.5), получаем

$$\sum_{\ell=0}^{m}\frac{1}{\ell!}(\hat{f}_{ij\,;\,k_1\ldots k_\ell}(0)y^j y^{k_1}\ldots y^{k_\ell}+y_i\,\hat{p}_{\,;\,k_1\ldots k_\ell}(0)\,y^{k_1}\ldots y^{k_\ell}) = o(|y|^{m+1})\ (i=1,\ldots,n).$$

Это может быть записано так:

$$\sum_{\ell=0}^{m}\frac{1}{\ell!}(\hat{f}_{ij\,;\,k_1\ldots k_\ell}(0)+\delta_{ij}\,\hat{p}_{\,;\,k_1\ldots k_\ell}(0))y^j y^{k_1}\ldots y^{k_\ell} = o(|y|^{m+1}) \quad (i=1,\ldots,n).$$

Будучи однородной формой степени $\ell+1$ по y, ℓ-е слагаемое этой суммы должно быть тождественно равным нулю. В частности, при $\ell = m$

$$(\hat{f}_{ij\,;\,k_1\ldots k_m}(0)+\delta_{ij}\hat{p}_{\,;\,k_1\ldots k_m}(0))y^j y^{k_1}\ldots y^{k_m} = 0 \quad (i=1,\ldots,n).$$

Можно приравнять коэффициенты этой формы к нулю после симметризации их по индексам $(j,k_1,\ldots,k_m)$. Таким образом приходим к уравнениям

$$\sigma(jk_1\ldots k_m)(\hat{f}_{ij\,;\,k_1\ldots k_m}(0)+\delta_{ij}\,\hat{p}_{\,;\,k_1\ldots k_m}(0)) = 0, \tag{4.2}$$

справедливым для всех значений индексов $(i,j,k_1,\ldots,k_m)$. Эти уравнения были выписаны во введении в виде (1.14). Напомним, что решения $(f,p)\in W^1_{1,m}(\mathbb{R}^n;S^2\oplus\mathbb{C})$ этих уравнений были названы слабыми формальными решениями уравнений Надирашвили — Владуца (см. абзац после теоремы 1.4). Тем самым установлено, что любое решение $(f,p)\in W^1_{1,m}(\mathbb{R}^n;S^2\oplus\mathbb{C})$ уравнений Надирашвили — Владуца является слабым формальным решением этих уравнений.

Если $(f,p)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n;S^2\oplus\mathbb{C})$ — решение уравнений Надирашвили — Владуца, то уравнения (4.2) справедливы для всех $m=0,1,\ldots$, т. е. (f,p) принадлежит пространству L формальных решений уравнений Надирашвили — Владуца, введенному после теоремы 1.3.

По схеме, представленной в разд. 2, уравнения (4.2) приводят к равенствам

$$\sigma(jk_1\ldots k_m)(F_{ij|k_1\ldots k_m}+\delta_{ij}\,P_{k_1\ldots k_m}) = 0, \tag{4.3}$$

где $F=\mathbb{F}^m(f,p)\in S^2\otimes S^m$ и $P=\mathbb{P}^m(f,p)\in S^m$.

Введя в рассмотрение линейный оператор

$$\Sigma : S^2\otimes S^m \to S^1\otimes S^{m+1} = \mathbb{C}^n\otimes S^{m+1}$$

равенством

$$(\Sigma F)_{i|jk_1\ldots k_m} = \sigma(jk_1\ldots k_m)F_{ij|k_1\ldots k_m},$$

запишем уравнение (4.3) в инвариантном виде

$$\Sigma(F+\delta\otimes P) = 0. \tag{4.4}$$

Следующее утверждение показывает, что исследование интегральных моментов является чисто алгебраической задачей.

Предложение 4.1. *Для целого $m \ge 0$ определим непрерывный линейный оператор*

$$\alpha : L \to (S^2 \otimes S^m) \oplus S^m, \quad \alpha(f,p) = (\mathbb{F}^m(f,p), \mathbb{P}^m(f,p)).$$

Образ $\operatorname{Ran}\alpha$ этого оператора совпадает с пространством решений (F,P) уравнения (4.4). Пространство L^*_m интегральных моментов степени m может быть отождествлено с пространством $(\operatorname{Ran}\alpha)^*$, сопряженным к $\operatorname{Ran}\alpha$. При этом каждый из функционалов $\mathbb{F}^m_{ij|k_1\dots k_m} \in L^*_m$ отождествляется с функционалом

$$\operatorname{Ran}\alpha \ni (F,P) \mapsto F_{ij|k_1\dots k_m}, \tag{4.5}$$

а каждый из функционалов $\mathbb{P}^m_{k_1\dots k_m} \in L^*_m$ — с функционалом

$$\operatorname{Ran}\alpha \ni (F,P) \mapsto P_{k_1\dots k_m}. \tag{4.6}$$

Доказательство. Мы уже доказали, что все $(F,P) \in \operatorname{Ran}\alpha$ удовлетворяют уравнению (4.4). Обратно, пусть $(F,P) \in (S^2 \otimes S^m) \oplus S^m$ удовлетворяет уравнению (4.4). Найдутся функции $\hat f_{ij}, \hat p \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, для которых ряды Тейлора имеют вид

$$\hat f_{ij}(y) \sim \frac{1}{m!} F_{ij\,;\,k_1\dots k_m}\, y^{k_1}\dots y^{k_m}, \quad \hat p(y) \sim \frac{1}{m!} P_{k_1\dots k_m}\, y^{k_1}\dots y^{k_m}.$$

Пусть $f_{ij}, p \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ — обратные преобразования Фурье функций $\hat f_{ij}$ и $\hat p$ соответственно. Обратив рассуждения, приведшие к (4.4), убедимся в справедливости уравнений (4.2). Это означает, что (f,p) является формальным решением уравнений Надирашвили — Владуца. Следовательно, $(F,P) = (\mathbb{F}^m(f,p), \mathbb{P}^m(f,p))$ принадлежит $\operatorname{Ran}\alpha$.

Таким образом, α определяет непрерывный сюръективный линейный оператор $\tilde\alpha : L \to \operatorname{Ran}\alpha$. Следовательно, сопряженный оператор $\tilde\alpha^* : (\operatorname{Ran}\alpha)^* \to L^*$ инъективен.

Пусть $F_{ij|k_1\dots k_m} \in (\operatorname{Ran}\alpha)^*$ и $P_{k_1\dots k_m} \in (\operatorname{Ran}\alpha)^*$ — функционалы (4.5) и (4.6) соответственно. Очевидно, что

$$\tilde\alpha^*(F_{ij|k_1\dots k_m}) = \mathbb{F}_{ij|k_1\dots k_m}, \quad \tilde\alpha^*(P_{k_1\dots k_m}) = \mathbb{P}_{k_1\dots k_m}.$$

Поэтому $\tilde\alpha^*$ является изоморфизмом между пространствами $(\operatorname{Ran}\alpha)^*$ и L^*_m. $\square$

Переходим к исследованию уравнения (4.4).

Лемма 4.2. *Оператор Σ сюръективен.*

Доказательство. Найдем сопряженный к Σ оператор. Для $f \in S^2 \otimes S^m$ и $g \in S^1 \otimes S^{m+1}$

$$\langle \Sigma f, g\rangle = (\sigma(jk_1\dots k_m) f^{ij|k_1\dots k_m})\bar g_{i|jk_1\dots k_m}.$$

Симметрирование $\sigma(jk_1\dots k_m)$ в первом множителе может быть опущено, так как второй множитель симметричен по этим индексам. Итак,

$$\langle \Sigma f, g\rangle = f^{ij|k_1\dots k_m}\bar g_{i|jk_1\dots k_m}.$$

Поскольку первый множитель симметричен по индексам (i,j), это можно записать так:

$$\langle \Sigma f, g\rangle = f^{ij|k_1\dots k_m}(\sigma(ij)\bar g_{i|jk_1\dots k_m}) = \langle f, \sigma(ij) g\rangle.$$

Таким образом,

$$(\Sigma^* g)_{ij|k_1\dots k_m} = \sigma(ij) g_{i|jk_1\dots k_m}.$$

Сюръективность оператора Σ эквивалентна инъективности оператора Σ^*. Предположим, что тензор $g \in S^1 \otimes S^{m+1}$ принадлежит ядру оператора Σ^*, т. е.

$$g_{i|jk_1\dots k_m} + g_{j|ik_1\dots k_m} = 0. \tag{4.7}$$

Тогда можно написать цепочку равенств

$$g_{i|jk_1\dots k_m} = g_{i|k_1jk_2\dots k_m} = -g_{k_1|ijk_2\dots k_m} = -g_{k_1|jik_2\dots k_m} = g_{j|k_1ik_2\dots k_m} = g_{j|ik_1\dots k_m}.$$

Тем самым

$$g_{i|jk_1\dots k_m} - g_{j|ik_1\dots k_m} = 0.$$

Вместе с (4.7) это дает $g = 0$. $\square$

Дальнейшее исследование уравнения (4.4) проводим в предположении $m \geq 2$. Случаи $m = 0$ и $m = 1$ малоинтересны, поскольку соотношения ортогональности степеней 0 и 1 уже описаны теоремами 1.2 и 1.3. Впрочем, все утверждения настоящего раздела справедливы с очевидными изменениями и для $m \in \{0, 1\}$.

Определим линейный оператор

$$W : S^2 \otimes S^m \to S^2 \otimes S^m$$

равенством

$$\begin{aligned}(Wf)_{ij|k_1\dots k_m} = \frac{m-1}{m+1}&\sigma(k_1\dots k_m)\\ &\times (f_{ij|k_1\dots k_m} - f_{ik_1|jk_2\dots k_m} - f_{jk_1|ik_2\dots k_m} + f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}).\end{aligned} \tag{4.8}$$

Лемма 4.3. *Будучи определенным формулой* (4.8), *оператор* W *является ортогональным проектированием на ядро оператора* Σ.

Доказательство. Определенный формулой (4.8) тензор Wf принадлежит ядру оператора Σ. Действительно,

$$\begin{aligned}(\Sigma Wf)_{i|jk_1\dots k_m} = \frac{m-1}{m+1}&\sigma(jk_1\dots k_m)\\ &\times [f_{ij|k_1\dots k_m} - f_{ik_1|jk_2\dots k_m} - f_{jk_1|ik_2\dots k_m} + f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}].\end{aligned}$$

Ввиду присутствия симметрирования $\sigma(jk_1\dots k_m)$ перед правой частью можно переставлять индекс j с k_1 и с k_2 в каждом из слагаемых, стоящих в квадратных скобках. Все слагаемые попарно сократятся после таких перестановок, и получим $\Sigma Wf = 0$.

Покажем, что W является самосопряженным оператором. Для двух произвольных тензоров $f, g \in S^2 \otimes S^m$

$$\langle Wf, g\rangle = (Wf)^{ij|k_1\dots k_m} \bar g_{ij|k_1\dots k_m}.$$

Подставим значение (4.8) тензора Wf:

$$\begin{aligned}\langle Wf, g\rangle = \frac{m-1}{m+1}[\sigma(k_1\dots k_m)(f^{ij|k_1\dots k_m} - f^{ik_1|jk_2\dots k_m}\\ - f^{jk_1|ik_2\dots k_m} + f^{k_1k_2|ijk_3\dots k_m})]\bar g_{ij|k_1\dots k_m}.\end{aligned}$$

Симметрирование $\sigma(k_1 \dots k_m)$ может быть опущено, поскольку второй множитель $\bar g_{ij|k_1\dots k_m}$ симметричен по индексам $(k_1,\dots,k_m)$. Итак,

$$\langle Wf,g\rangle=\frac{m-1}{m+1}\big(f^{ij|k_1\dots k_m}\bar g_{ij|k_1\dots k_m}-f^{ik_1|jk_2\dots k_m}\bar g_{ij|k_1\dots k_m}\\ -f^{jk_1|ik_2\dots k_m}\bar g_{ij|k_1\dots k_m}+f^{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}\bar g_{ij|k_1\dots k_m}\big).$$

После изменения обозначений для индексов суммирования это приводится к виду

$$\langle Wf,g\rangle=\frac{m-1}{m+1}\big(f^{ij|k_1\dots k_m}\bar g_{ij|k_1\dots k_m}-f^{ij|k_1\dots k_m}\bar g_{ik_1|jk_2\dots k_m}\\ -f^{ij|k_1\dots k_m}\bar g_{jk_1|ik_2\dots k_m}+f^{ij|k_1\dots k_m}\bar g_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}\big)$$

или

$$\langle Wf,g\rangle=\frac{m-1}{m+1}f^{ij|k_1\dots k_m}\big(\bar g_{ij|k_1\dots k_m}-\bar g_{ik_1|jk_2\dots k_m}-\bar g_{jk_1|ik_2\dots k_m}+\bar g_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}\big).$$

Поскольку первый множитель $f^{ij|k_1\dots k_m}$ симметричен по индексам $(k_1,\dots,k_m)$, можно вставить симметрирование $\sigma(k_1\dots k_m)$ перед вторым множителем и записать последнюю формулу в виде

$$\langle Wf,g\rangle=f^{ij|k_1\dots k_m}\bigg[\frac{m-1}{m+1}\sigma(k_1\dots k_m)\big(\bar g_{ij|k_1\dots k_m}\\ -\bar g_{ik_1|jk_2\dots k_m}-\bar g_{jk_1|ik_2\dots k_m}+\bar g_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}\big)\bigg].$$

Согласно (4.8) правая часть совпадает с $\langle f,Wg\rangle$.

Докажем, что $W^2=W$. Для произвольного тензора $f\in S^2\otimes S^m$ положим $w=Wf$, т. е.

$$w_{ij|k_1\dots k_m}=\frac{m-1}{m+1}\sigma(k_1\dots k_m)\\ \times\big(f_{ij|k_1\dots k_m}-f_{ik_1|jk_2\dots k_m}-f_{jk_1|ik_2\dots k_m}+f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}\big). \tag{4.9}$$

Согласно той же формуле (4.8)

$$(W^2f)_{ij|k_1\dots k_m}=(Ww)_{ij|k_1\dots k_m}=\frac{m-1}{m+1}\sigma(k_1\dots k_m)\\ \times\big(w_{ij|k_1\dots k_m}-w_{ik_1|jk_2\dots k_m}-w_{jk_1|ik_2\dots k_m}+w_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}\big). \tag{4.10}$$

Подставим значения (4.9) величин $w_{ij|k_1\dots k_m}$ в (4.10):

$$(W^2f)_{ij|k_1\dots k_m}=\frac{(m-1)^2}{(m+1)^2}\sigma(k_1\dots k_m)[\sigma(k_1\dots k_m)(f_{ij|k_1\dots k_m}\\ -f_{ik_1|jk_2\dots k_m}-f_{jk_1|ik_2\dots k_m}+f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m})\\ -\sigma(jk_2\dots k_m)(f_{ik_1|jk_2\dots k_m}-f_{ij|k_1\dots k_m}-f_{jk_1|ik_2\dots k_m}+f_{jk_2|ik_1k_3\dots k_m})\\ -\sigma(ik_2\dots k_m)(f_{jk_1|ik_2\dots k_m}-f_{ij|k_1\dots k_m}-f_{ik_1|jk_2\dots k_m}+f_{ik_2|jk_1k_3\dots k_m})\\ +\sigma(ijk_3\dots k_m)(f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}-f_{ik_1|jk_2\dots k_m}-f_{ik_2|jk_1k_3\dots k_m}+f_{ij|k_1\dots k_m})].$$

Используя симметрирование $\sigma(ij)$, это можно записать чуть короче:

$$(W^2f)_{ij|k_1\dots k_m}=\frac{(m-1)^2}{(m+1)^2}\sigma(ij)\sigma(k_1\dots k_m)\\ \times[\sigma(k_1\dots k_m)(f_{ij|k_1\dots k_m}-2f_{ik_1|jk_2\dots k_m}+f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m})\\ -2\sigma(jk_2\dots k_m)(f_{ik_1|jk_2\dots k_m}-f_{ij|k_1\dots k_m}-f_{jk_1|ik_2\dots k_m}+f_{jk_2|ik_1k_3\dots k_m})\\ +\sigma(ijk_3\dots k_m)(f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}-f_{ik_1|jk_2\dots k_m}-f_{ik_2|jk_1k_3\dots k_m}+f_{ij|k_1\dots k_m})].$$

Ввиду присутствия симметрирования $\sigma(k_1\dots k_m)$ перед квадратными скобками то же симметрирование внутри квадратных скобок может быть опущено и формула приобретает вид

$$\begin{aligned}(W^2f)_{ij|k_1\dots k_m} = \frac{(m-1)^2}{(m+1)^2}&\sigma(ij)\sigma(k_1\dots k_m)\\ &\times[f_{ij|k_1\dots k_m} - 2f_{ik_1|jk_2\dots k_m} + f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}\\ -2\sigma(jk_2\dots k_m)&(f_{ik_1|jk_2\dots k_m} - f_{ij|k_1\dots k_m} - f_{jk_1|ik_2\dots k_m} + f_{jk_2|ik_1k_3\dots k_m})\\ +\sigma(ijk_3\dots k_m)&(f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m} - f_{ik_1|jk_2\dots k_m} - f_{ik_2|jk_1k_3\dots k_m} + f_{ij|k_1\dots k_m})].\end{aligned}$$

Еще одно упрощение возможно в силу очевидных равенств

$$\sigma(jk_2\dots k_m)f_{ik_1|jk_2\dots k_m} = f_{ik_1|jk_2\dots k_m},$$

$$\sigma(ijk_3\dots k_m)f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m} = f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}.$$

Таким образом, предыдущая формула записывается так:

$$\begin{aligned}(W^2f)_{ij|k_1\dots k_m} = \frac{(m-1)^2}{(m+1)^2}&\sigma(ij)\sigma(k_1\dots k_m)\\ \times[f_{ij|k_1\dots k_m} - 4f_{ik_1|jk_2\dots k_m} &+ 2f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m} + 2\sigma(jk_2\dots k_m)f_{ij|k_1\dots k_m}\\ &+2\sigma(jk_2\dots k_m)f_{jk_1|ik_2\dots k_m} - 2\sigma(jk_2\dots k_m)f_{jk_2|ik_1k_3\dots k_m}\\ &-\sigma(ijk_3\dots k_m)f_{ik_1|jk_2\dots k_m} - \sigma(ijk_3\dots k_m)f_{ik_2|jk_1k_3\dots k_m}\\ &+\sigma(ijk_3\dots k_m)f_{ij|k_1\dots k_m}].\end{aligned}\tag{4.11}$$

Для дальнейших преобразований формулы (4.11) будет использована

Лемма 4.4. *Для произвольного тензора* $f=(f_{ij|k_1\dots k_m})\in S^2\otimes S^m$ *справедливы следующие соотношения:*

$$\sigma(jk_2\dots k_m)f_{ij|k_1\dots k_m} = \frac{1}{m}\sigma(k_2\dots k_m)(f_{ij|k_1\dots k_m} + (m-1)f_{ik_2|jk_1k_3\dots k_m}),\tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}&\sigma(jk_2\dots k_m)f_{jk_2|ik_1k_3\dots k_m}\\ &\qquad= \frac{1}{m}\sigma(k_2\dots k_m)(2f_{jk_2|ik_1k_3\dots k_m} + (m-2)f_{k_2k_3|ijk_1k_4\dots k_m}),\end{aligned}\tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}&\sigma(ijk_3\dots k_m)f_{ik_1|jk_2\dots k_m}\\ &\qquad= \frac{1}{m}\sigma(ij)\sigma(k_3\dots k_m)(2f_{ik_1|jk_2\dots k_m} + (m-2)f_{k_1k_3|ijk_2k_4\dots k_m}),\end{aligned}\tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}\sigma(ijk_3\dots k_m)f_{ij|k_1\dots k_m} &= \frac{1}{m(m-1)}\sigma(ij)\sigma(k_3\dots k_m)\\ \times(2f_{ij|k_1\dots k_m} &+ 4(m-2)f_{ik_3|jk_1k_2k_4\dots k_m} + (m-2)(m-3)f_{k_3k_4|ijk_1k_2k_5\dots k_m}).\end{aligned}\tag{4.15}$$

Формулы (4.12), (4.13) являются частными случаями леммы 2.4.1 из [5], где подобные соотношения названы формулами разложения симметрирования $\sigma(jk_2\dots k_m)$ по индексу j. Аналогично формулы (4.14), (4.15) представляют два варианта разложения симметрирования $\sigma(ijk_3\dots k_m)$ по индексам i и j. Подчеркнем, что формулы (4.14), (4.15) не сводятся к формулам (4.12), (4.13).

Доказательство леммы 4.4. Приведем лишь доказательство формулы (4.15), формулы (4.12)–(4.14) доказываются аналогично. Прежде всего заметим, что каждый из индексов k_1 и k_2 расположен на одних и тех же позициях во всех слагаемых формулы (4.15) и не участвует в симметрированиях. Поэтому зафиксируем значения индексов k_1 и k_2 и введем тензор $u \in S^2 \otimes S^{m-2}$ равенством $u_{i_1i_2|i_3\dots i_m} = f_{i_1i_2|i_3\dots i_m k_1k_2}$. В терминах тензора u формула (4.15) выглядит так:

$$\sigma(i_1\dots i_m)u_{i_1i_2|i_3\dots i_m} = \frac{1}{m(m-1)}\sigma(i_1i_2)\sigma(i_3\dots i_m)$$
$$\times\,(2u_{i_1i_2|i_3\dots i_m} + 4(m-2)u_{i_1i_3|i_2i_4\dots k_m} + (m-2)(m-3)u_{i_3i_4|i_1i_2i_5\dots i_m}). \quad (4.16)$$

Согласно определению симметрирования

$$\sigma(i_1\dots i_m)u_{i_1i_2|i_3\dots i_m} = \frac{1}{m!}\sum_{\pi\in\Pi_m} u_{i_{\pi(1)}i_{\pi(2)}|i_{\pi(3)}\dots i_{\pi(m)}}. \quad (4.17)$$

Сгруппирум слагаемые этой суммы в соответствии с позициями индексов i_1 и i_2. Для этого представим множество Π_m в виде объединения непересекающихся подмножеств

$$\Pi_m = \Pi_m^1 \cup \Pi_m^2 \cup \Pi_m^3 \cup \Pi_m^4,$$

где Π_m^1 состоит из таких перестановок π, что $\{\pi(1),\pi(2)\} = \{1,2\}$; множество Π_m^2 (множество Π_m^3) состоит из перестановок, удовлетворяющих $\pi(1) \le 2$ и $\pi(2) > 2$ (удовлетворяющих $\pi(1) > 2$ и $\pi(2) \le 2$), а Π_m^4 состоит из перестановок π, удовлетворяющих $\pi(1) > 2$ и $\pi(2) > 2$. В соответствии с этим представлением формула (4.17) записывается так:

$$\sigma(i_1\dots i_m)u_{i_1i_2|i_3\dots i_m} = \frac{1}{m!}\Big(\sum_{\pi\in\Pi_m^1} u_{i_{\pi(1)}i_{\pi(2)}|i_{\pi(3)}\dots i_{\pi(m)}} + \sum_{\pi\in\Pi_m^2} u_{i_{\pi(1)}i_{\pi(2)}|i_{\pi(3)}\dots i_{\pi(m)}}$$
$$+ \sum_{\pi\in\Pi_m^3} u_{i_{\pi(1)}i_{\pi(2)}|i_{\pi(3)}\dots i_{\pi(m)}} + \sum_{\pi\in\Pi_m^4} u_{i_{\pi(1)}i_{\pi(2)}|i_{\pi(3)}\dots i_{\pi(m)}}\Big).$$

В силу симметрий тензора u это можно записать в виде

$$\sigma(i_1\dots i_m)u_{i_1i_2|i_3\dots i_m} = \frac{1}{m!}\sigma(i_3\dots i_m)\big(c_m^1 u_{i_1i_2|i_3i_4\dots i_m} + c_m^2 u_{i_1i_3|i_2i_4\dots i_m}$$
$$+ c_m^3 u_{i_2i_3|i_1i_4\dots i_m} + c_m^4 u_{i_3i_4|i_1i_2i_5\dots i_m}\big),$$

где c_m^α $(\alpha = 1,2,3,4)$ — число перестановок в множестве Π_m^α. Эти числа легко находятся:

$$c_m^1 = 2(m-2)!, \quad c_m^2 = c_m^3 = 2(m-2)(m-2)!, \quad c_m^4 = (m-2)(m-3)(m-2)!.$$

Таким образом, получаем

$$\sigma(i_1\dots i_m)u_{i_1i_2|i_3\dots i_m} = \frac{1}{m(m-1)}\sigma(i_3\dots i_m)(2u_{i_1i_2|i_3i_4\dots i_m} + 2(m-2)u_{i_1i_3|i_2i_4\dots i_m}$$
$$+ 2(m-2)u_{i_2i_3|i_1i_4\dots i_m} + (m-2)(m-3)u_{i_3i_4|i_1i_2i_5\dots i_m}),$$

что эквивалентно формуле (4.16). □

Продолжаем доказательство леммы 4.3. Переставив индексы i и k_1 в (4.12), имеем

$$\sigma(jk_2\dots k_m)f_{jk_1|ik_2\dots k_m} = \frac{1}{m}\sigma(k_2\dots k_m)(f_{jk_1|ik_2\dots k_m} + (m-1)f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}), \quad (4.18)$$

Переставив индексы k_1 и k_2 в (4.14), получаем

$$\sigma(ijk_3\dots k_m)f_{ik_2|jk_1k_3\dots k_m} = \frac{1}{m}\sigma(ij)\sigma(k_3\dots k_m)(2f_{ik_2|jk_1k_3\dots k_m}+(m-2)f_{k_2k_3|ijk_1k_4\dots k_m}). \quad (4.19)$$

Заменим последние 6 слагаемых в правой части формулы (4.11) их значениями (4.12)–(4.15), (4.18), (4.19):

$$\begin{aligned}(W^2f)_{ij|k_1\dots k_m} &= \frac{(m-1)^2}{(m+1)^2}\sigma(ij)\sigma(k_1\dots k_m)[f_{ij|k_1\dots k_m}-4f_{ik_1|jk_2\dots k_m}+2f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}\\ &+\frac{2}{m}\sigma(k_2\dots k_m)(f_{ij|k_1\dots k_m}+(m-1)f_{ik_2|jk_1k_3\dots k_m})\\ &+\frac{2}{m}\sigma(k_2\dots k_m)(f_{jk_1|ik_2\dots k_m}+(m-1)f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m})\\ &-\frac{2}{m}\sigma(k_2\dots k_m)(2f_{jk_2|ik_1k_3\dots k_m}+(m-2)f_{k_2k_3|ijk_1k_4\dots k_m})\\ &-\frac{1}{m}\sigma(ij)\sigma(k_3\dots k_m)(2f_{ik_1|jk_2\dots k_m}+(m-2)f_{k_1k_3|ijk_2k_4\dots k_m})\\ &-\frac{1}{m}\sigma(ij)\sigma(k_3\dots k_m)(2f_{ik_2|jk_1k_3\dots k_m}+(m-2)f_{k_2k_3|ijk_1k_4\dots k_m})\\ &+\frac{1}{m(m-1)}\sigma(ij)\sigma(k_3\dots k_m)(2f_{ij|k_1\dots k_m}+4(m-2)f_{ik_3|jk_1k_2k_4\dots k_m}\\ &\qquad+f_{k_3k_4|ijk_1k_2k_5\dots k_m})].\end{aligned}$$

Теперь можно опустить все симметрирования внутри квадратных скобок ввиду присутствия оператора $\sigma(ij)\sigma(k_1\dots k_m)$ перед скобками. По той же причине индексы (i,j) и $(k_1,\dots,k_m)$ могут быть написаны в лексиграфическом порядке в каждом мономе внутри квадратных скобок. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}(W^2f)_{ij|k_1\dots k_m} &= \frac{(m-1)^2}{(m+1)^2}\sigma(ij)\sigma(k_1\dots k_m)\\ &\times\Big[f_{ij|k_1\dots k_m}-4f_{ik_1|jk_2\dots k_m}+2f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}+\frac{2}{m}f_{ij|k_1\dots k_m}\\ &+\frac{2(m-1)}{m}f_{ik_1|jk_2\dots k_m}+\frac{2}{m}f_{ik_1|jk_2\dots k_m}+\frac{2(m-1)}{m}f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}-\frac{4}{m}f_{ik_1|jk_2\dots k_m}\\ &-\frac{2(m-2)}{m}f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}-\frac{2}{m}f_{ik_1|jk_2\dots k_m}-\frac{m-2}{m}f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}-\frac{2}{m}f_{ik_1|jk_2\dots k_m}\\ &-\frac{m-2}{m}f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}+\frac{2}{m(m-1)}f_{ij|k_1\dots k_m}+\frac{4(m-2)}{m(m-1)}f_{ik_1|jk_2\dots k_m}\\ &+\frac{(m-2)(m-3)}{m(m-1)}f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}\Big].\end{aligned}$$

После приведения подобных это равенство приобретает вид

$$(W^2f)_{ij|k_1\dots k_m} = \frac{(m-1)}{(m+1)}\sigma(ij)\sigma(k_1\dots k_m) \times(f_{ij|k_1\dots k_m}-2f_{ik_1|jk_2\dots k_m}+f_{k_1k_2|ijk_3\dots k_m}).$$

Сравнивая это с (4.8), видим, что $W^2f=Wf$. Тем самым равенство $W^2=W$ доказано.

Итак, $W^* = W$ и $W^2 = W$. Следовательно, оператор W является ортогональным проектированием на его образ $\operatorname{Ran} W$. Также доказали, что $\Sigma W = 0$, т. е. что

$$\operatorname{Ran} W \subset \operatorname{Ker} \Sigma. \tag{4.20}$$

Покажем, что в (4.20) на самом деле имеет место равенство. Пусть $f \in \operatorname{Ker} \Sigma \ominus \operatorname{Ran} W$. Тогда $\Sigma f = 0$ и $\langle f, Wg \rangle = 0$ для любого тензора $g \in S^2 \otimes S^m$. Из последнего уравнения с помощью равенства $W^* = W$ вытекает, что $\langle Wf, g \rangle = 0$ для любого g, т. е. что $Wf = 0$. Итак, надо доказать, что система

$$\Sigma f = 0, \quad Wf = 0$$

имеет только нулевое решение.

Уравнение $\Sigma f = 0$ в координатах пишется так:

$$\sigma(jk_1 \dots k_m) f_{ij|k_1 \dots k_m} = 0.$$

Разлагая симметрирование $\sigma(jk_1 \dots k_m)$ по индексу j, приводим это уравнение к виду

$$f_{ij|k_1 \dots k_m} = -m\, \sigma(k_1 \dots k_m) f_{ik_1|jk_2 \dots k_m}. \tag{4.21}$$

Переставим здесь индексы i и j:

$$f_{ij|k_1 \dots k_m} = -m\, \sigma(k_1 \dots k_m) f_{jk_1|ik_2 \dots k_m}.$$

Из двух последних формул следует, что

$$f_{ij|k_1 \dots k_m} = -m\, \sigma(ij)\sigma(k_1 \dots k_m) f_{ik_1|jk_2 \dots k_m}. \tag{4.22}$$

Переставив индексы i и k_1, а также j и k_2 в (4.21), получим также

$$f_{k_1k_2|ijk_3 \dots k_m} = -m\, \sigma(ijk_3 \dots k_m) f_{ik_1|jk_2 \dots k_m}.$$

С помощью (4.14) это дает

$$f_{k_1k_2|ijk_3 \dots k_m} = -\sigma(ij)\sigma(k_3 \dots k_m)(2 f_{ik_1|jk_2 \dots k_m} + (m-2) f_{k_1k_3|ijk_2k_4 \dots k_m}). \tag{4.23}$$

Уравнение $Wf = 0$ в координатах пишется так:

$$\sigma(ij)\sigma(k_1 \dots k_m)(f_{ij|k_1 \dots k_m} - 2 f_{ik_1|jk_2 \dots k_m} + f_{k_1k_2|ijk_3 \dots k_m}) = 0. \tag{4.24}$$

Подставив значение (4.22) для первого слагаемого в левой части, получим

$$\sigma(ij)\sigma(k_1 \dots k_m)[-m\, \sigma(ij)\sigma(k_1 \dots k_m) f_{ik_1|jk_2 \dots k_m} \\ - 2 f_{ik_1|jk_2 \dots k_m} + f_{k_1k_2|ijk_3 \dots k_m}] = 0.$$

Оператор $\sigma(ij)\sigma(k_1 \dots k_m)$ внутри квадратных скобок может быть опущен ввиду присутствия этого оператора перед скобками. Таким образом, получаем

$$\sigma(ij)\sigma(k_1 \dots k_m)[-(m+2) f_{ik_1|jk_2 \dots k_m} + f_{k_1k_2|ijk_3 \dots k_m}] = 0. \tag{4.25}$$

Подставим значение (4.23) для второго слагаемого из левой части:

$$\sigma(ij)\sigma(k_1 \dots k_m)[-(m+2) f_{ik_1|jk_2 \dots k_m} \\ - \sigma(ij)\sigma(k_3 \dots k_m)(2 f_{ik_1|jk_2 \dots k_m} + (m-2) f_{k_1k_3|ijk_2k_4 \dots k_m})] = 0.$$

Опять вычеркиваем оператор $\sigma(ij)\sigma(k_3 \dots k_m)$ внутри квадратных скобок и пишем это в виде

$$\sigma(ij)\sigma(k_1 \dots k_m)[(m+4) f_{ik_1|jk_2 \dots k_m} + (m-2) f_{k_1k_3|ijk_2k_4 \dots k_m}] = 0. \tag{4.26}$$

Сравнивая формулы (4.25) и (4.26), видим, что

$$\sigma(ij)\sigma(k_1 \dots k_m) f_{ik_1|jk_2 \dots k_m} = 0, \quad \sigma(ij)\sigma(k_1 \dots k_m) f_{k_1k_3|ijk_2k_4 \dots k_m} = 0.$$

Вместе с (4.24) это дает

$$f_{ij|k_1 \dots k_m} = \sigma(ij)\sigma(k_1 \dots k_m) f_{ij|k_1 \dots k_m} = 0,$$

т. е. $f = 0$. $\square$

Лемма 4.5. *Для $m \geq 2$ оператор*

$$S^m \to S^2 \otimes S^m, \quad f \mapsto (W - I)(\delta \otimes f)$$

инъективен. Здесь I — тождественный оператор.

Доказательство. Согласно (4.8)

$$((W-I)(\delta \otimes f))_{ij|k_1\dots k_m} = -\delta_{ij} f_{k_1\dots k_m}$$
$$+ \frac{m-1}{m+1}\sigma(k_1\dots k_m)(\delta_{ij} f_{k_1\dots k_m} - \delta_{ik_1} f_{jk_2\dots k_m} - \delta_{jk_1} f_{ik_2\dots k_m} + \delta_{k_1k_2} f_{ijk_3\dots k_m}).$$

После простых преобразований эта формула приобретает вид

$$((W-I)(\delta \otimes f))_{ij|k_1\dots k_m} = -\frac{1}{m+1}\sigma(ij)\sigma(k_1\dots k_m)$$
$$\times (2\delta_{ij} f_{k_1\dots k_m} + 2(m-1)\delta_{ik_1} f_{jk_2\dots k_m} - (m-1)\delta_{k_1k_2} f_{ijk_3\dots k_m}). \quad (4.27)$$

Пусть тензор $f \in S^m$ удовлетворяет уравнению $(W-I)(\delta \otimes f) = 0$. Согласно (4.27) это уравнение в координатах выглядит так:

$$\sigma(ij)\sigma(k_1\dots k_m)(2\delta_{ij} f_{k_1\dots k_m} + 2(m-1)\delta_{ik_1} f_{jk_2\dots k_m} - (m-1)\delta_{k_1k_2} f_{ijk_3\dots k_m}) = 0.$$

Умножим это уравнение на δ^{ij} и просуммируем по i и j. В результате получим

$$f_{k_1\dots k_m} = \frac{m-1}{2(n+m-1)}\sigma(k_1\dots k_m)(\delta_{k_1k_2}\delta^{pq} f_{pqk_3\dots k_m}). \quad (4.28)$$

Обозначим через $i : S^{m-2} \to S^m$ оператор симметричного умножения на тензор Кронекера, задаваемый в координатах равенством

$$(if)_{k_1\dots k_m} = \sigma(k_1\dots k_m)(\delta_{k_1k_2} f_{k_3\dots k_m}).$$

Сопряженный к i оператор $j : S^m \to S^{m-2}$ есть оператор свертки с тензором Кронекера: $(jf)_{k_1\dots k_{m-2}} = \delta^{pq} f_{pqk_1\dots k_{m-2}}$. В терминах этих операторов уравнение (4.28) пишется в виде $ijf = \frac{2(n+m-1)}{m-1} f$. Для завершения доказательства достаточно убедиться, что число

$$\mu = \frac{2(n+m-1)}{m-1} \quad (4.29)$$

не является собственным значением оператора $ij : S^m \to S^m$.

Операторы $ij : S^m \to S^m$ и $ji : S^m \to S^m$ связаны соотношением [6, формула (2.11)]

$$ji = \frac{2(n+2m)}{(m+1)(m+2)} I + \frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)} ij. \quad (4.30)$$

Собственные значения оператора $ji : S^m \to S^m$ известны [6, лемма 2.3]:

$$\lambda_k = \frac{2(k+1)(n+2m-2k)}{(m+1)(m+2)} \quad (k = 0, 1, \dots, [m/2]),$$

где $[m/2]$ — целая часть числа $m/2$. Отсюда с помощью (4.30) следует, что собственными числами оператора $ij : S^m \to S^m$ являются

$$\mu_k = \frac{2}{m(m-1)} k(n+2m-2k-2) \quad (k = 0, 1, \dots, [m/2]). \quad (4.31)$$

Покажем, что определяемое равенством (4.29) число μ не совпадает ни с одним из собственных чисел (4.31) оператора ij. Предположив противное, придем к равенству

$$m(n+m-1)=k(n+2m-2k-2), \tag{4.32}$$

справедливому для некоторого $k\in\{0,1,\dots,[m/2]\}$. Это равенство невозможно при $k=0$. Если $1\le k\le m/2$, то

$$k(n+2m-2k-2)\le\frac{1}{2}m(n+2m-4)<m(n+m-1),$$

что противоречит (4.32). $\square$

Доказательство теоремы 1.4. В силу леммы 4.3 уравнение (4.4) эквивалентно следующему:

$$W(F+\delta\otimes P)=F+\delta\otimes P.$$

Запишем это в виде

$$F=(W-I)(\delta\otimes P)+WF, \tag{4.33}$$

где I — тождественный оператор. Заметим, что последнее слагаемое $Q=WF$ в правой части равенства (4.33) может быть произвольным тензором, принадлежащим образу $\operatorname{Ran}W$. Поэтому равенство (4.33) эквивалентно следующему:

$$F=(W-I)(\delta\otimes P)+Q\quad(Q\in\operatorname{Ran}W). \tag{4.34}$$

Применив оператор W к этому уравнению, имеем

$$Q=WF.$$

Сравнивая формулы (1.17) и (4.8), видим, что $\mathbb{Q}^m$ и Q соответствуют друг другу при отождествлении пространств L_m^* и $(\operatorname{Ran}\alpha)^*$, о котором идет речь в предложении 4.1.

Итак, если (F,P) — решение уравнения (4.4), то равенство (4.34) справедливо с некоторым $Q\in\operatorname{Ran}W$. Обратно, для произвольных тензоров $P\in S^m$ и $Q\in\operatorname{Ran}W$, определив F формулой (4.33), получим решение (F,P) уравнения (4.4). Заметим, что слагаемые в правой части равенства (4.34) ортогональны друг другу, поскольку $Q\in\operatorname{Ran}W$ и $(W-I)(\delta\otimes P)\in\operatorname{Ker}W$. Кроме того, согласно лемме 4.5

$$\dim\{(W-I)(\delta\otimes P)\mid P\in S^m\}=\dim S^m=\binom{n+m-1}{m}.$$

Следовательно, размерность $N(m,n)$ пространства решений уравнения (4.4) равна

$$N(m,n)=\binom{n+m-1}{m}+\dim(\operatorname{Ran}W). \tag{4.35}$$

Последнее слагаемое из правой части этого равенства находится на основании лемм 4.2 и 4.3:

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Ran}W)&=\dim(\operatorname{Ker}\Sigma)=\dim(S^2\otimes S^m)-\dim(S^1\otimes S^{m+1})\\&=\frac{n(n+1)}{2}\binom{n+m-1}{m}-n\binom{n+m}{m+1}=\frac{n(m-1)}{2}\binom{n+m-1}{m+1}.\end{aligned}$$

Подставив это значение в (4.35), имеем

$$N(m,n) = \frac{n(m-1)}{2}\binom{n+m-1}{m+1} + \binom{n+m-1}{m}.$$

В силу предложения 4.1 это эквивалентно утверждению (1.19) теоремы 1.4. Одновременно доказали два других утверждения теоремы 1.4: о числе линейно независимых компонент тензоров $\mathbb{P}^m$ и $\mathbb{Q}^m$ и о независимости этих тензоров друг от друга. Последнее утверждение теоремы 1.4 (любой интегральный момент степени m представим в виде линейной комбинации компонент тензора $\mathbb{F}^m$) также следует из (4.34), поскольку эта формула влечет равенства $Q = WF$ и $(W-I)(\delta\otimes P) = (W-I)F$, означающие, что все компоненты тензоров P и Q представимы в виде линейных комбинаций компонент тензора F.

Используя формулу (4.27), видим, что уравнение (4.34) в координатах выглядит так:

$$F_{ij|k_1\dots k_m} = Q_{ij|k_1\dots k_m}$$
$$-\frac{1}{m+1}\sigma(ij)\sigma(k_1\dots k_m)(2\delta_{ij}P_{k_1\dots k_m} + 2(m-1)\delta_{ik_1}P_{jk_2\dots k_m} - (m-1)\delta_{k_1k_2}P_{ijk_3\dots k_m}).$$

В силу предложения 4.1 это эквивалентно утверждению (1.18) теоремы 1.4. $\square$

5. Соотношения ортогональности второй степени

Интегральные моменты второй степени

$$\mathbb{F}^2_{ij|k\ell}(f,p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_k x_\ell\, f_{ij}(x)\,dx, \quad \mathbb{P}^2_{ij}(f,p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i x_j\, p(x)\,dx \tag{5.1}$$

выражаются через преобразования Фурье $\hat f$ и $\hat p$ равенствами

$$\mathbb{F}^2_{ij|k\ell}(f,p) = -(2\pi)^{n/2}\hat f_{ij\,;\,k\ell}(0), \tag{5.2}$$

$$\mathbb{P}^2_{ij}(f,p) = -(2\pi)^{n/2}\hat p_{\,;\,ij}(0). \tag{5.3}$$

Формула (1.17) при $m=2$ выглядит следующим образом:

$$\mathbb{Q}^2_{ij|k\ell} = \frac{1}{6}\big(2\mathbb{F}^2_{ij|k\ell} - \mathbb{F}^2_{ik|j\ell} - \mathbb{F}^2_{i\ell|jk} - \mathbb{F}^2_{jk|i\ell} - \mathbb{F}^2_{j\ell|ik} + 2\mathbb{F}^2_{k\ell|ij}\big). \tag{5.4}$$

Сравнивая (5.2) и (5.4), видим, что

$$\mathbb{Q}^2_{ij|k\ell}(f,p) = -\frac{(2\pi)^{n/2}}{6}\big(2\hat f_{ij\,;\,k\ell}(0) - \hat f_{ik\,;\,j\ell}(0)$$
$$- \hat f_{i\ell\,;\,jk}(0) - \hat f_{jk\,;\,i\ell}(0) - \hat f_{j\ell\,;\,ik}(0) + 2\hat f_{k\ell\,;\,ij}(0)\big). \tag{5.5}$$

Некоторый дифференциальный оператор $\widetilde W$ порядка m на симметричных тензорных полях валентности m был введен в [5, § 2.1] и назван *оператором Сен-Венана*. При $m=2$ этот оператор определяется равенством

$$(\widetilde W f)_{ijk\ell} = \frac{1}{2}(2f_{ij\,;\,k\ell} - f_{ik\,;\,j\ell} - f_{i\ell\,;\,jk} - f_{jk\,;\,i\ell} - f_{j\ell\,;\,ik} + 2f_{k\ell\,;\,ij}). \tag{5.6}$$

(В [5] этот оператор обозначается через W. Здесь мы используем обозначение $\widetilde W$ для оператора Сен-Венана, чтобы отличить его от оператора (4.8). Эти два оператора тесно связаны друг с другом, но не совпадают.) Равенство $\widetilde{W}f = 0$ является необходимым и достаточным условием разрешимости системы

$$\frac{1}{2}(v_{i\,;\,j} + v_{j\,;\,i}) = f_{ij}$$

в односвязной области пространства $\mathbb{R}^n$. Это условие хорошо известно в теории упругости как *условие совместности деформаций.* Оно было впервые выписано Сен-Венаном.

Сравнивая (5.5) и (5.6), видим, что с точностью до постоянного множителя тензор $\mathbb{Q}^2(f,p)$ совпадает с $(\widetilde{W}\hat{f})(0)$.

Оператор Сен-Венана имеет альтернативную форму R, которая в случае $m = 2$ определяется равенством

$$(Rf)_{ijk\ell} = \frac{1}{4}(f_{ik\,;\,j\ell} - f_{i\ell\,;\,jk} - f_{jk\,;\,i\ell} + f_{jk\,;\,i\ell}).$$

Тензоры $\widetilde{W}f$ и Rf выражаются друг через друга формулами

$$(\widetilde{W}f)_{ijk\ell} = (Rf)_{ikj\ell} + (Rf)_{i\ell jk} + (Rf)_{jki\ell} + (Rf)_{j\ell ik},$$
$$(Rf)_{ijk\ell} = \frac{1}{3}((\widetilde{W}f)_{ikj\ell} - (\widetilde{W}f)_{i\ell jk} - (\widetilde{W}f)_{jki\ell} + (\widetilde{W}f)_{j\ell ik}).$$

В частности, число линейно независимых компонент у тензора $\widetilde{W}f$ то же, что и у Rf.

Тензор Rf обладает симметриями

$$(Rf)_{ijk\ell} = -(Rf)_{jik\ell} = -(Rf)_{ij\ell k} = (Rf)_{k\ell ij},$$
$$(Rf)_{ijk\ell} + (Rf)_{ik\ell j} + (Rf)_{i\ell jk} = 0,$$

которые совпадают с симметриями тензора кривизны риманова многообразия. Хорошо известно, что тензор кривизны n-мерного риманова многообразия имеет $n^2(n^2-1)/12$ линейно независимых компонент. Можно заключить: в случае $m = 2$ тензор $\big(\mathbb{Q}^2_{ij|k\ell}\big)$ имеет $n^2(n^2-1)/12$ линейно независимых компонент. Это наблюдение послужило отправной точкой настоящей работы.

Следующее утверждение является частным случаем теоремы 1.4 для $m = 2$.

Теорема 5.1. *Интегральные моменты второй степени удовлетворяют соотношениям ортогональности*

$$\mathbb{F}^2_{ij|k\ell} = \mathbb{Q}^2_{ij|k\ell} - \frac{1}{6}\big(4\delta_{ij}\mathbb{P}^2_{k\ell} + \delta_{ik}\mathbb{P}^2_{j\ell} + \delta_{i\ell}\mathbb{P}^2_{jk} + \delta_{jk}\mathbb{P}^2_{i\ell} + \delta_{j\ell}\mathbb{P}^2_{ik} - 2\delta_{k\ell}\mathbb{P}^2_{ij}\big). \qquad (5.7)$$

Число линейно независимых интегральных моментов второй степени равно

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{12}n(n+1)(n^2-n+6).$$

Как и ранее, отсюда вытекает

Следствие 5.2. *Пусть действительные функции $u_i \in W^1_{2,2}(\mathbb{R}^n)$ $(i = 1,\dots,n)$ и $p \in W^1_{1,2}(\mathbb{R}^n)$ образуют решение уравнений Эйлера* (1.1), (1.2). *Тогда справедливы соотношения ортогональности* (5.7). *В частности,*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i^2\, u_i(x)u_j(x)\,dx = 0 \quad (i \ne j), \qquad (5.8)$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_ix_j\, u_i^2(x)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_ix_j\, p(x)\,dx = 0. \qquad (5.9)$$

Формулы (5.8) и (5.9) являются частными случаями формулы (5.7), поскольку $\mathbb{Q}^2_{ij|ii} = \mathbb{Q}^2_{ii|ij} = 0$.

Согласно (5.3) тензор $\big(\mathbb{P}^2_{ij}(f,p)\big)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с матрицей Гессе функции $\hat{p}(y)$ в точке $y = 0$. Из той же формулы (5.3) следует, что $(\hat{p}_{\,;\,ij}(0))$ является действительной симметричной матрицей. Число линейно независимых интегральных моментов второй степени может быть уменьшено за счет подходящего выбора декартовых координат. Действительно, если матрица Гессе $(\hat{p}_{\,;\,ij}(0))$ приведена к диагональному виду, то $\mathbb{P}^2_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Предложение 5.3. *Пусть действительные функции* $u_i \in W^1_{2,2}(\mathbb{R}^n)$ $(i = 1,\dots,n)$ *и* $p \in W^1_{1,2}(\mathbb{R}^n)$ *образуют решение уравнений Эйлера, и пусть* $\hat{p}(y)$ *— преобразование Фурье функции* p. *Все собственные числа матрицы* $(\hat{p}_{\,;\,ij}(0))$ *неотрицательны. Более того, если одно из собственных чисел равно нулю, то* $u_1 \equiv \dots \equiv u_n \equiv p \equiv 0$.

Доказательство. Положив $i = j = k = \ell = 1$ в (5.7) и используя равенство $\mathbb{Q}^2_{11|11} = 0$, получим

$$\mathbb{F}^2_{11|11} = -\mathbb{P}^2_{11}.$$

В терминах преобразования Фурье это означает, что

$$\hat{f}_{11\,;\,11}(0) = -\hat{p}_{\,;\,11}(0). \tag{5.10}$$

Чтобы доказать первое утверждение, достаточно продемонстрировать, что

$$\hat{p}_{\,;\,11}(0) \geq 0. \tag{5.11}$$

Действительно, матрица Гессе $(\hat{p}_{\,;\,ij}(0))$ может быть приведена к диагональному виду

$$(\hat{p}_{\,;\,ij}(0)) = \begin{pmatrix} \hat{p}_{\,;\,11}(0) & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \hat{p}_{\,;\,22}(0) & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \hat{p}_{\,;\,nn}(0) \end{pmatrix}$$

подходящим выбором декартовых координат в $\mathbb{R}^n$. Согласно (5.10) неравенство (5.11) эквивалентно следующему:

$$\hat{f}_{11\,;\,11}(0) \leq 0. \tag{5.12}$$

Используя свойства свертки (2.2)–(2.5), выводим из равенства $f_{11} = u_1^2$

$$\begin{aligned} \hat{f}_{11\,;\,11}(0) = -\big(D_1^2 \hat{f}_{11}\big)(0) &= -(2\pi)^{-n/2}\big(D_1^2(\hat{u}_1 * \hat{u}_1)\big)(0) \\ &= -(2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_1^2 u_1^2(x)\,dx \leq 0. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Это доказывает первое утверждение. Если $\hat{p}_{\,;\,11}(0) = 0$, то в (5.13) имеет место равенство, т. е. $u_1 \equiv 0$. Остается воспользоваться теоремой 1.2. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Majda A. J., Bertozzi A. L.* Vorticity and incompressible flow. New York; Melbourne: Camb. Univ. Press, 2002.
2. *Nadirashvili N., Vladuţ S.* Integral geometry of Euler equations // Arnold Math. J. 2017. V. 3, N 3. P. 397–421.

3. *Nadirashvili N.* Liouville-type theorem for Beltrami flow // Geom. Funk. Anal. 2014. V. 24, N 3. P. 912–916.

4. *Chae D., Constantin P.* Remarks on a Liouville-type theorem for Beltrami flows // Int. Math. Res. Not. 2015. V. 2015, N 20. P. 10012–10016.

5. *Шарафутдинов В. А.* Интегральная геометрия тензорных полей. Новосибирск: Наука, 1993.

6. *Даирбеков Н. С., Шарафутдинов В. А.* Конформно киллинговы симметричные тензорные поля на римановых многообразиях // Мат. тр. 2010. Т. 13, № 1. С. 85–145.

Статья поступила 30 сентября 2017 г.

Шарафутдинов Владимир Альтафович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
sharaf@math.nsc.ru