КОНКУРЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА И ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ.

Плясунов А.В.

Институт математики СО РАН

Молодежная научная школа-семинар
"Дискретные модели и методы принятия решений "

г.Новосибирск, 21-23 июня 2013

Конкурентные задачи размещения: предыстория

Hotelling, H.

Stability in competition // The Economic Journal, 1929. Vol. 39. P. 41 – 57.

Последовательная конкуренция в задачах размещения

Hay, D.A.(1976), Prescott, E.C., Vissher, M.(1977)

Конкурентное размещение и ценообразование

Eiselt, H.A., Laporte, G., Thisse J.-F.(1993), Kress, D., Pesch, E.(2012)

Конкурентное размещение + модель ценообразования Бертрана

Pelegrin, B., Fernandez, P., Garcia M.D., Cano S.(2012)

Стратегии ценообразования:

Фабричное ценообразование (mill pricing)

На каждом предприятии своя цена

Равномерное ценообразование

На всех предприятиях одна и та же цена

Дискриминационное ценообразование

На каждом предприятии разные цены для разных покупателей

Игра Штакельберга + модель Бертрана

Верхний уровень

Лидер размещает p предприятий (производящих однородную продукцию)

Нижний уровень

Конкурент размещает r предприятий

Ценовой "пинг-понг"

Раздел рынков между игроками на основе модели ценовой конкуренции Бертрана

Цель игры

Цель игры лидера – выбрать такое множество из p предприятий, которое позволяет монополизировать рынки, доставляющие максимальную суммарную прибыль.

$I = \{1, ..., m\}$ — множество пунктов размещения для предприятий лидера и конкурента;

$K = \{1, ..., n\}$ — множество рынков;

$w_k^{max} \geq 0$ — максимальная цена, которую готовы платить клиенты рынка k за продукт;

$q_k(w) \geq 0$ — функция спроса для рынка k, зависящая от цены продажи w, $0 \leq w \leq w_k^{max}$;

Математическая модель – данные

p — количество предприятий размещаемых лидером;

r — количество предприятий размещаемых конкурентом;

$c_i \geq 0$ — затраты на производство в пункте i;

$t_{ik} \geq 0$ — транспортные затраты для перевозки продукции из пункта i на рынок k;

$c_{ik} = c_i + t_{ik} (\leq w_k^{max})$ — себестоимость обслуживания k-го рынка из пункта i.

Математическая модель – переменные:

Выбор лидера:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если лидер размещает в пункте } i \text{ свое предприятие,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Выбор конкурента:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если конкурент размещает в пункте } i \text{ свое предприятие,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Монопольная цена

Минимальная себестоимость обслуживания рынка k предприятиями лидера

$$c_k(x) = \min\{c_{ik} \mid x_i = 1\}$$

Доход монополиста (D_k):

$$d_k(w) = q_k(w)\,(w - c_k(x)) \longrightarrow \max_w$$

$$c_k(x) \le w \le w_k^{max}.$$

Оптимальное решение задачи $w_k^m(c_k(x), w_k^{max})$ – монопольная цена.

Математическая модель: доход монополиста

Монополист – лидер $c_k(x) \le c_k(y)$:

$$w_k^*(c_k(x), c_k(y)) = \begin{cases} w_k^m(c_k(x), w_k^{max}), & \text{если } w_k^m(c_k(x), w_k^{max}) \le c_k(y), \\ c_k(y) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Если $c_{ik} \le c_{jk}$, то

$$d_{ikj} = \begin{cases} d_k(w_k^m(c_{ik}, w_k^{max})), & \text{если } w_k^m(c_{ik}, w_k^{max}) \le c_{jk}, \\ d_k(c_{jk}) & \text{если } w_k^m(c_{ik}, w_k^{max}) > c_{jk} \end{cases}$$

Математическая модель: доход монополиста

Монополист – конкурент $c_k(y) < c_k(x)$:

$$w_k^*(c_k(y), c_k(x)) = \begin{cases} w_k^m(c_k(y), w_k^{max}), & \text{если } w_k^m(c_k(y), w_k^{max}) \le c_k(x), \\ c_k(x) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Если $c_{ik} > c_{jk}$, то

$$d_{ikj} = \begin{cases} d_k(w_k^m(c_{jk}, w_k^{max})), & \text{если } w_k^m(c_{jk}, w_k^{max}) \le c_{ik}, \\ d_k(c_{ik}) & \text{если } w_k^m(c_{jk}, w_k^{max}) > c_{ik} \end{cases}$$

Математическая модель – переменные:

$$z_{ikj}^L = \begin{cases} 1, & \text{если } k\text{-й рынок обслуживается } i\text{-м предприятием лидера} \\ & \text{при условии, что на } j\text{-м предприятии конкурента достига-} \\ & \text{ется минимум его себестоимости,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$z_{ikj}^F = \begin{cases} 1, & \text{если } k\text{-й рынок обслуживается } j\text{-м предприятием} \\ & \text{конкурента при условии, что на } i\text{-м предприятии лидера} \\ & \text{достигается минимум его себестоимости,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Задача конкурентного размещения производства и ценообразования

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} d_{ikj} z_{ikj}^L \to \max_{x,y,z^L,z^F} \tag{1}$$

$$\sum_{i\in I} x_i = p; \tag{2}$$

$$(y, z^L, z^F) \in \mathcal{F}^*(x); \tag{3}$$

$$x_i \in \{0,1\}; i \in I. \tag{4}$$

Задача конкурента:

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} d_{ikj} z^F_{ikj} \to \max_{y,z^L,z^F} \tag{5}$$

$$\sum_{i\in I} y_i = r; \tag{6}$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} z^F_{ikj} \leq \sum_{i\in I_k(x)} y_i; k \in K; \tag{7}$$

$$x_i + y_i \leq 1; i \in I; \tag{8}$$

$$\sum_{i,j\in I} (z^L_{ikj} + z^F_{ikj}) = 1; k \in K; \tag{9}$$

Задача конкурента:

$$z^L_{ikj} \le x_i; z^L_{ikj} \le y_j; i,j \in I, k \in K; \quad (10)$$

$$c_{ik} z^L_{ikj} \le c_{i'k} x_{i'} + (1 - x_{i'})\overline{C}; i,j \in I, k \in K, i' \in I; \quad (11)$$

$$c_{jk} z^L_{ikj} \le c_{i'k} y_{i'} + (1 - y_{i'})\overline{C}; i,j \in I, k \in K, i' \in I; \quad (12)$$

$$z^F_{ikj} \le x_i; z^F_{ikj} \le y_j; i,j \in I, k \in K; \quad (13)$$

$$c_{ik} z^F_{ikj} \le c_{i'k} x_{i'} + (1 - x_{i'})\overline{C}; i,j \in I, k \in K, i' \in I; \quad (14)$$

$$c_{jk} z^F_{ikj} \le c_{i'k} y_{i'} + (1 - y_{i'})\overline{C}; i,j \in I, k \in K, i' \in I; \quad (15)$$

$$z^L_{ikj}, z^F_{ikj}, y_i, u_k \in \{0,1\}; i,j \in I, k \in K. \quad (16)$$

Задача PLP_φ

$$d_{ik} = \varphi_k(c_k(x))$$

Доход монополиста от k-го рынка при условии, что $c_k(x) = c_{ik}$.

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} d_{ik} z_{ik}^L \to \max_{x, y, z^L, z^F}$$

$$\sum_{i \in I} x_i = p;$$

$$(y, z^L, z^F) \in \mathcal{F}^*(x);$$

$$x_i \in \{0, 1\}; i \in I.$$

Задача конкурента

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in I} d_{ik} z^F_{ik} \to \max_{y, z^L, z^F}$$

$$\sum_{i\in I} y_i = r;$$

$$\sum_{i\in I} z^F_{ik} \le \sum_{i\in I_k(x)} y_i; k \in K;$$

$$x_i + y_i \le 1; i \in I;$$

$$\sum_{i\in I} (z^L_{ik} + z^F_{ik}) = 1; k \in K;$$

Задача конкурента

$$z_{ik}^L \le x_i; i \in I, k \in K;$$
$$c_{ik} z_{ik}^L \le c_{i'k} x_{i'} + (1 - x_{i'})\overline{C}; i \in I, k \in K, i' \in I;$$
$$z_{ik}^F \le y_i; i \in I, k \in K;$$
$$c_{ik} z_{ik}^F \le c_{i'k} y_{i'} + (1 - y_{i'})\overline{C}; i \in I, k \in K, i' \in I;$$
$$z_{ik}^L, z_{ik}^F, y_i \in \{0, 1\}; i \in I, k \in K.$$

Полиномиальная иерархия

Теорема 1.

Задача PLP_φ является $\sum_2^P$-трудной.

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma_2^p & & \Pi_2^p \\
& \Delta_2^p \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
\Sigma_1^p \arrow[uu] \arrow[ur] & & \Pi_1^p \arrow[uu] \arrow[ul] \\
& \Delta_1^p \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$$\Sigma_2^p = NP^{NP}, \quad \Pi_2^p = co - NP^{NP};$$

$$\Delta_2^p = P^{NP} = P^{co-NP};$$

$$\Sigma_1^p = NP, \quad \Pi_1^p = co - NP;$$

$$\Delta_1^p = \Sigma_0^p = \Pi_0^p = P.$$

Теорема 2.

Задача конкурента является NP-трудной в сильном смысле.

Теорема 3.

Задача PLP_φ принадлежит классу **Poly-APX**$(\sum_2^P)$.

Альтернирующая эвристика

Шаг 1.

Построить начальное решение. Положить наилучшее значение целевой функции (рекорд) равным нулю. Перейти на шаг 3.

Шаг 2.

Найти новое размещение лидера, решив внутреннюю задачу $Inner(y)$, где в качестве параметра выступает найденное на шаге 3 размещение конкурента. Перейти на шаг 3.

Шаг 3.

Решить задачу конкурента для текущего решения лидера . Если новое значение целевой функции задачи PLP_φ больше чем текущий рекорд, то запоминаем его. Если число итераций не превосходит заданную величины, то перейти на шаг 2.

Гибридная эвристика

Шаг 1.

Построить начальное размещение (x_0, y_0) предприятий лидера и конкурента. Положить наилучшее значение целевой функции (рекорд) равным нулю.

Шаг 2.

Найти локальный максимум для задачи размещения предприятий лидера по окрестности $Swap(x, y)$.

Шаг 3.

Решить задачу конкурента для текущего решения лидера x. Если новое значение целевой функции задачи PLP_φ больше чем текущий рекорд, то поменять рекорд. Если число итераций не превосходит заданную величины перейти на шаг 2.

Вычислительный эксперимент: данные

Число возможных мест открытия предприятий

20

Число рынков

50

Выбор d_{ik} и c_{ik}

Значения порождались равновероятно из целочисленного интервала [0, 100]

Вычислительный эксперимент

	r = p = 2				r = p = 3			
	Alt		Hyb		Alt		Hyb	
	value	time	value	time	value	time	value	time
1	2206	54	2332	22	2382	76	2382	22
2	2067	54	2067	44	2211	96	2265	107
3	1874	54	2304	32	2511	138	2532	65
4	2388	75	2388	32	2426	74	2536	32
5	2140	32	2438	54	2621	118	2317	22
6	1988	54	2356	87	2126	119	2499	32
7	2011	97	2060	55	2177	53	2277	53
8	1979	140	2162	23	2150	75	2273	161
9	2239	54	2135	57	2313	140	2397	65
10	2180	75	2235	68	2337	203	2382	32

Таблица 1

	r = p = 4			
	Alt		Hyb	
	value	time	value	time
1	2325	32	2407	23
2	2372	118	2091	22
3	2389	138	2657	56
4	2464	96	2657	55
5	2081	75	2799	34
6	2668	139	2651	67
7	2237	53	2477	22
8	2257	140	2359	145
9	2552	139	2444	79
10	2445	202	2250	34

Таблица 1: продолжение

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ