ОПТИМИЗАЦИЯ И РАВНОВЕСНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

О.В. Хамисов

Иститут систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск

Молодёжная научная школа-семинар
“Дискретные модели и методы принятия решений”
21-23 июня 2013, г. Новосибирск (Академгородок)

ОПТИМИЗАЦИЯ: основные моменты

- ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ (дань традиции, стереотип мышления)
- СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА (современные требования)

ОПТИМИЗАЦИЯ: дифференцируемость

Задача безусловной минимизации

$$f(x) \to \min,$$

$$x \in \mathbb{R}^n.$$

Необходимое условие оптимальности (теорема Ферма)

$$f'(x) = 0 \;\; (\nabla f(x) = 0).$$

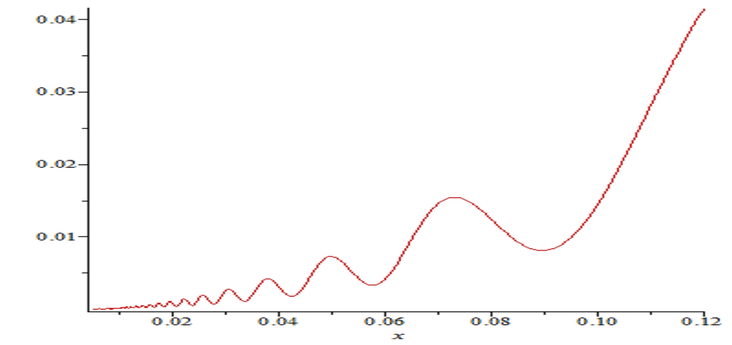
$$\Downarrow$$

Необходима дифференцируемость (=гладкость) f

ОПТИМИЗАЦИЯ: дифференцируемость

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



$$x^* = 0,\ f(x^*) = 0$$

ОПТИМИЗАЦИЯ: дифференцируемость

Пример. Производная

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Две последовательности, сходящиеся к решению,

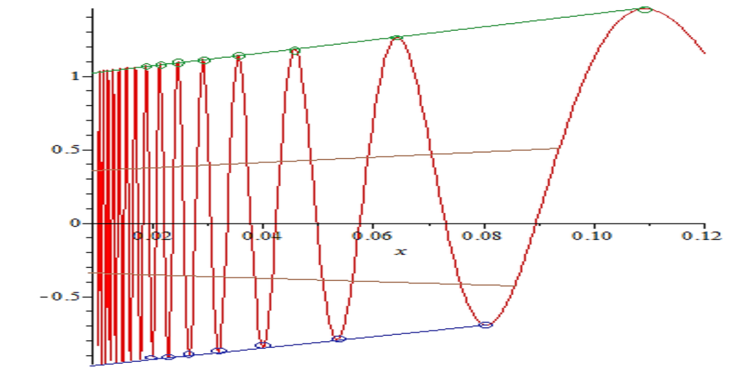
$$x_k = \frac{1}{\pi + 2\pi k} \to 0, \; y_k = \frac{1}{2\pi k} \to 0.$$

Тем не менее!

$$f'(x_k) \to 1 \neq 0, \; f'(y_k) \to -1 \neq 0.$$

ОПТИМИЗАЦИЯ: дифференцируемость

Пример. Геометрическая интерпретация $f'(x)$



$f(x_k) \to 1$, $f(y_k) \to -1$

ОПТИМИЗАЦИЯ: дифференцируемость

Пример. f дифференцируема, но f' не является непрерывной.

ОПТИМИЗАЦИЯ: дифференцируемость

Пример. f дифференцируема, но f' не является непрерывной.

$$\Downarrow$$

С методической точки зрения f должна быть *непрерывно* дифференцируемой, $f \in C^1$.

ОПТИМИЗАЦИЯ: дифференцируемость

Пример. f дифференцируема, но f' не является непрерывной.

$$\Downarrow$$

С методической точки зрения f должна быть *непрерывно* дифференцируемой, $f \in C^1$.

$$\Downarrow$$

Любая предельная точка метода наискорейшего спуска для $f \in C^1$ *является стационарной (удовлетворяет теореме Ферма)*

ОПТИМИЗАЦИЯ: дифференцируемость

Задача безусловной минимизации

$$f(x) \to \min,$$

$$x \in \mathbb{R}^n,$$

$f \in C^1$.

Методический подход
Итеративная информация: $f(x^k)$, $f'(x^k)$, $k = 0, 1, \dots$

Гарантия: нахождение стационарной точки x^*: $f'(x^*) = 0$.

Вопрос: насколько сильно отличается значение $f(x^*)$ от (глобально) минимального значения?

ОПТИМИЗАЦИЯ: дифференцируемость

Задача безусловной минимизации

$$f(x) \to \min,$$

$$x \in \mathbb{R}^n,$$

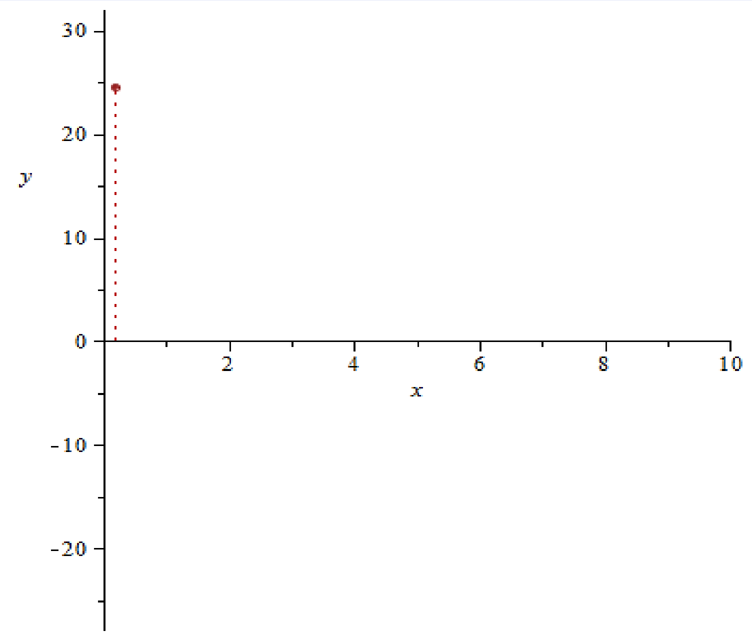
$f \in C^1.$

Методический подход
Итеративная информация: $f(x^k)$, $f'(x^k)$, $k = 0, 1, \ldots$

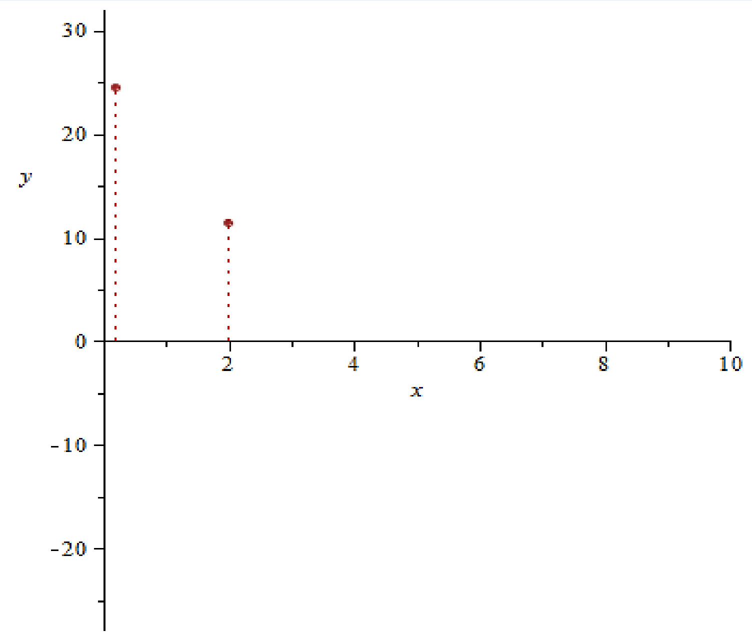
Гарантия: нахождение стационарной точки x^*: $f'(x^*) = 0$.

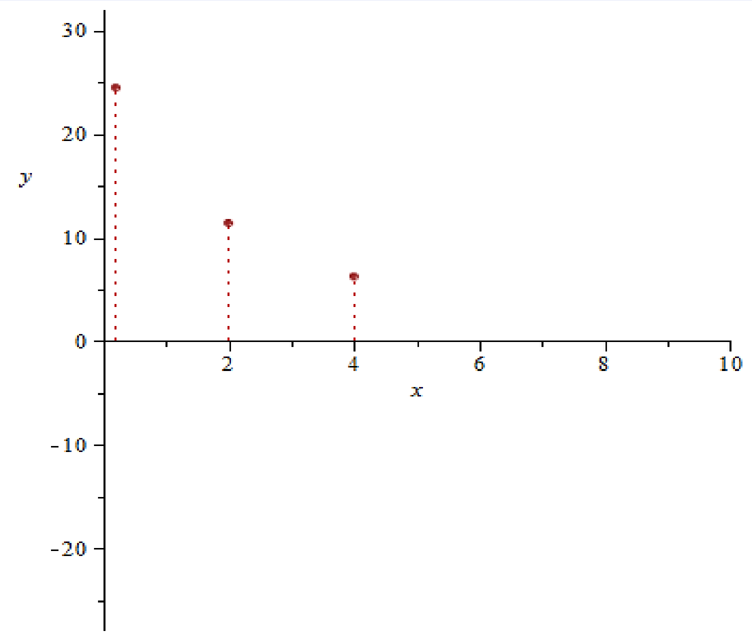
Вопрос: насколько сильно отличается значение $f(x^*)$ от (глобально) минимального значения?

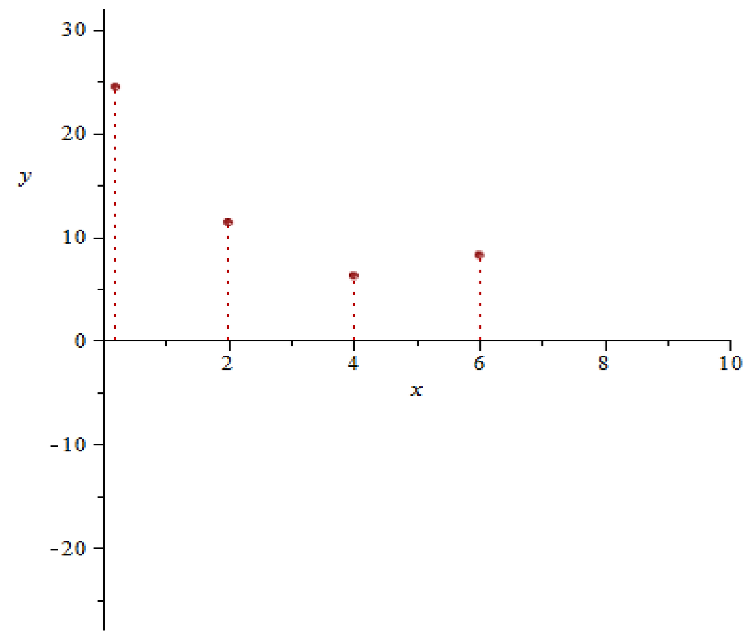
Ответ: насколько угодно!!!



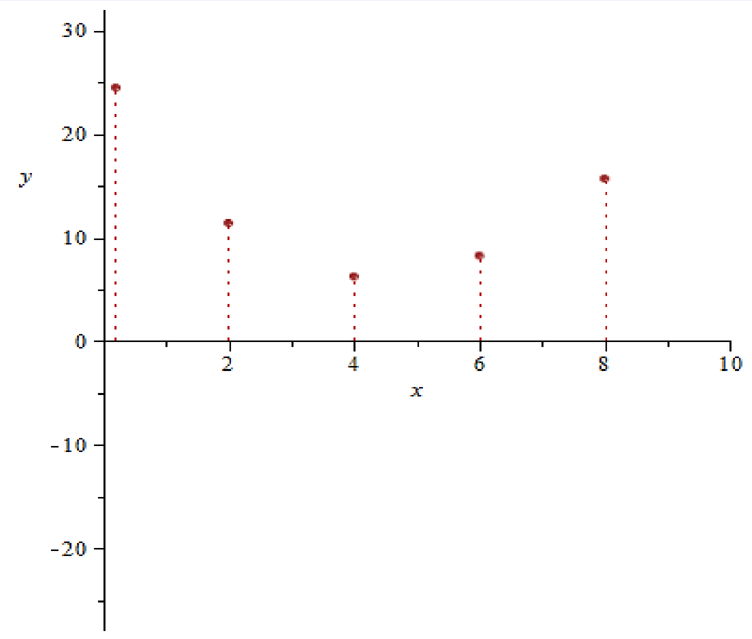
30
20
10
0
−10
−20
y
2
4
6
8
10
x

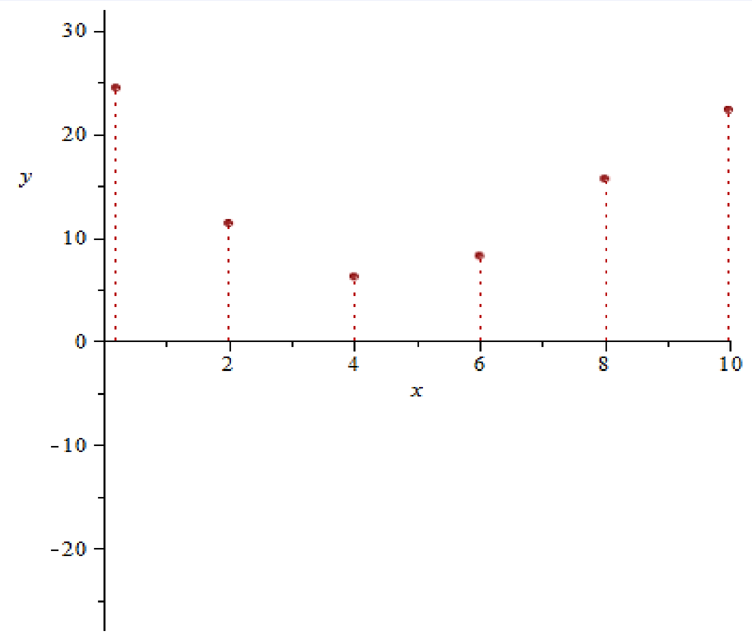

30
20
y
10
0
−10
−20
2
4
6
8
10
x

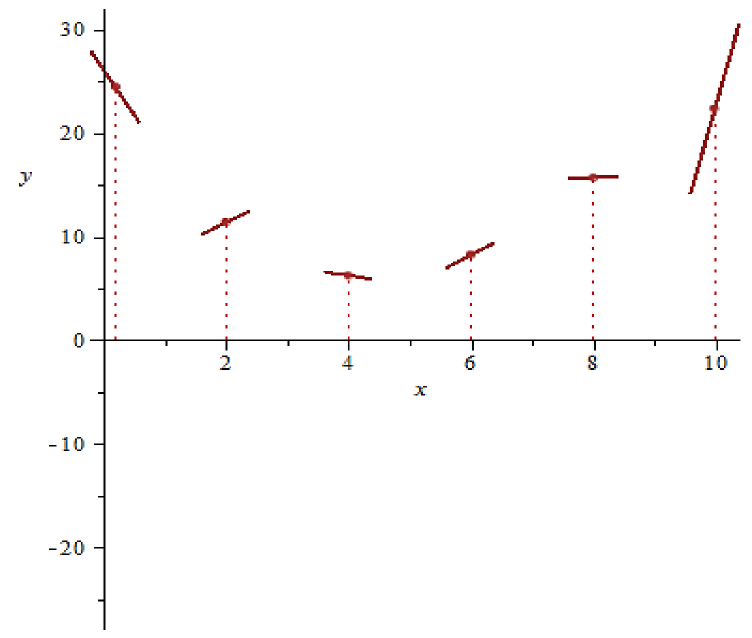

30
20
10
0
-10
-20
y
2
4
6
8
10
x



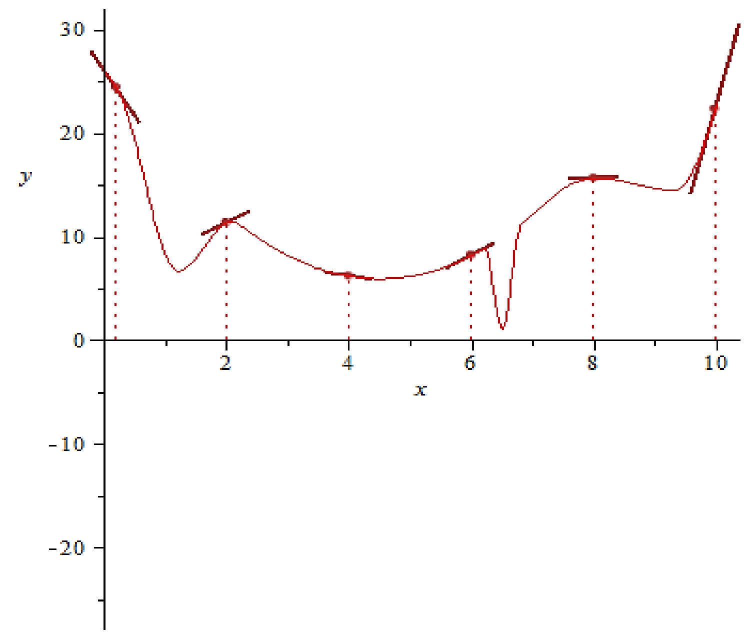
30
20
10
0
-10
-20
y
2
4
6
8
10
x

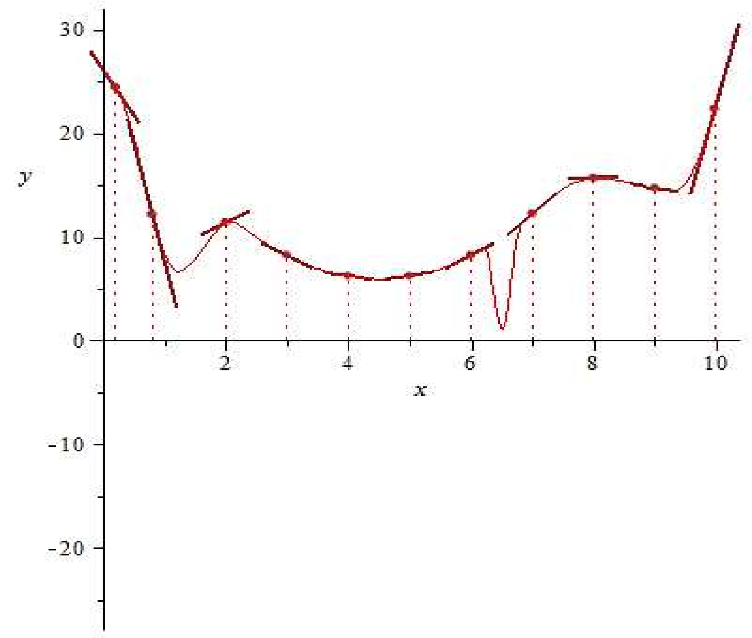

30
20
10
0
-10
-20
y
2
4
6
8
10
x

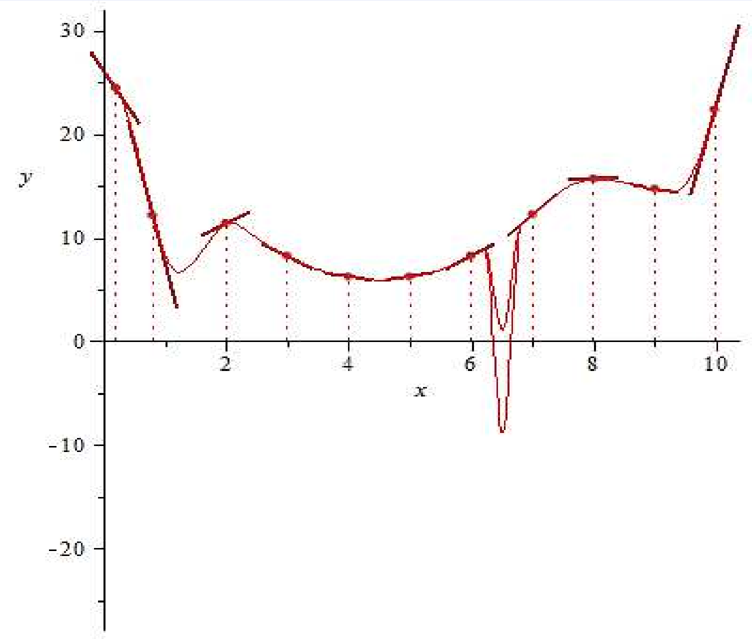

30
20
10
0
-10
-20
y
2
4
6
8
10
x

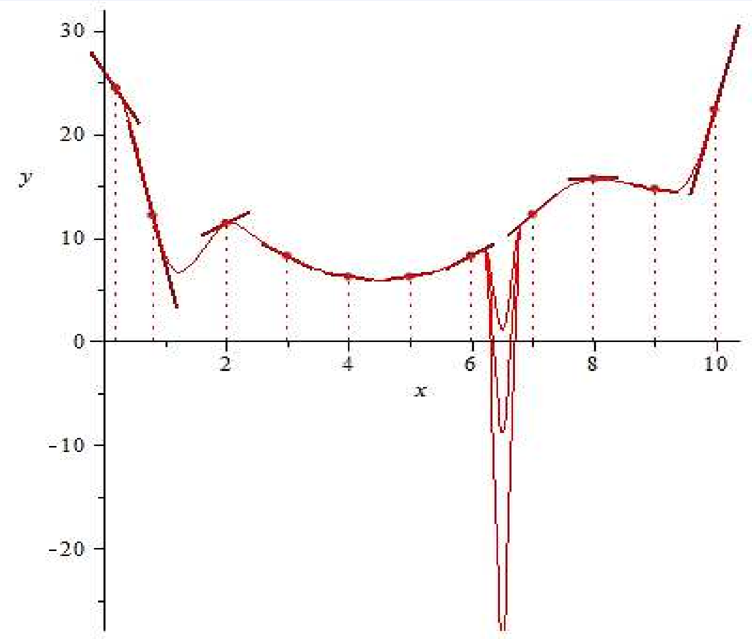


30
20
10
0
-10
-20
y
2
4
6
8
10
x


30
20
10
0
-10
-20
y
2
4
6
8
10
x


30
20
10
0
−10
−20
y
2
4
6
8
10
x


30
20
10
0
−10
−20
y
2
4
6
8
10
x


30
20
10
0
-10
-20
y
2
4
6
8
10
x

ОПТИМИЗАЦИЯ: дифференцируемость

Задача безусловной минимизации

$$f(x) \to \min,$$

$$x \in \mathbb{R}^n.$$

Вопрос: изменится ли ситуация, если предположить $f \in C^k$, $k \geq 1$.

ОПТИМИЗАЦИЯ: дифференцируемость

Задача безусловной минимизации

$$f(x) \to \min,$$

$$x \in \mathbb{R}^n.$$

Вопрос: изменится ли ситуация, если предположить $f \in C^k$, $k \geq 1$.

Ответ: Нет!!!

ОПТИМИЗАЦИЯ: дифференцируемость

Задача безусловной минимизации

$$f(x) \to \min,$$

$$x \in \mathbb{R}^n.$$

Вопрос: изменится ли ситуация, если предположить $f \in C^k$, $k \geq 1$.

Ответ: Нет!!!

Теорема Уитни. *Пусть* $A \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество. Тогда существует функция $h \in C^\infty$ такая, что

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}.$$

ОПТИМИЗАЦИЯ: дифференцируемость

Главный вывод: необходима дополнительная информация (структурные свойства)

Например:

- *линейность*
- *квадратичность*
- *выпуклость*
- ...?

$$\Downarrow$$

Выделить класс так называемых хорошо структурированных задач

ОПТИМИЗАЦИЯ: структурированность

$$f(x) \to \min,$$

$$g_i(x) \le 0, i = 1, \dots, m,$$

$$h_i(x) = 0, i = 1, \dots, k,$$

$$x \in X \subset \mathbb{R}^n.$$

ОПТИМИЗАЦИЯ: структурированность

$$f(x) \to \min,$$

$$g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m,$$

$$h_i(x) = 0, i = 1, \ldots, k,$$

$$x \in X \subset \mathbb{R}^n.$$

Теоретически (!) задачи оптимизации обязаны быть хорошо структурированными.

ОПТИМИЗАЦИЯ: структурированность

$$f(x) \to \min,$$
$$g_i(x) \le 0, i = 1, \dots, m,$$
$$h_i(x) = 0, i = 1, \dots, k,$$
$$x \in X \subset \mathbb{R}^n.$$

Теоретически (!) задачи оптимизации обязаны быть хорошо структурированными.

Хорошая структурированность = эффективное решение задач большой размерности

$$n \backsim 10^6$$

ОПТИМИЗАЦИЯ: структурированность

- Задачи линейного программирования

$$c^T x \to \min,$$

$$Ax \leq b,$$

$$c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m.$$

- Сложность $O(n^2 m)$, $m \geq n$.
- $n \sim 100\,000\,000$

ОПТИМИЗАЦИЯ: структурированность

- Задачи выпуклого программирования

$$f_0(x) \to \min,$$

$$f_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m,$$

$$f_i,\ \ i = 1, \ldots, m \text{ выпуклые функции.}$$

- Сложность $O(\max\{n^3, n^2 m, F\})$, F — сложность вычисления f, f' (∇f), f'' $(\nabla^2 f)$.
- $n \sim 10\,000\,000$ для "самосогласованных"задач.
- $n \sim 1000$ в общем случае.

ОПТИМИЗАЦИЯ: структурированность

- Задачи нелинейного программирования, имеющие структуру задачи линейного программирования (SDP[1])

$$C \bullet X \to \min,$$

$$A^i \bullet X \leq b_i, i = 1, \dots, l,$$

$$X \succcurlyeq 0 \;\; (\lambda_{min}(X) \geq 0),$$

X – симметричная $n \times n$ матрица.

- Задачи квадратичного программирования, представимые в виде (SDP)

[1] SemiDefinite Programming – полуопределённое программирование

ОПТИМИЗАЦИЯ: структурированность

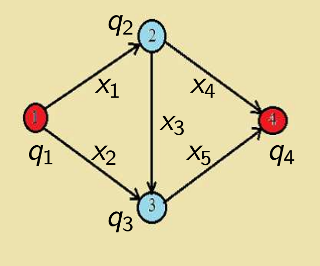
- Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию. – М.: МЦНМО, 2010.
- Boyd S., Vanderberghe L. Convex optimization. — Cambridge University Press, 2004.

ОТ ОПТИМИЗАЦИИ К РАВНОВЕСИЮ

Пример. Задача потокораспределения

q_i — спрос (узлы 2, 3):const/ производство (узлы 1, 4):const.

x_j — перетоки: var



$$
\begin{aligned}
q_1 &= x_1 + x_2 \\
x_1 &= q_2 + x_3 + x_4 \\
x_2 + x_3 &= q_3 + x_5 \\
q_4 + x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

— — — — — — — — — — — — ——

$$Ax = q$$

$$a_{ij} \in \{1, -1, 0\}$$

Структурированная задача вып. прогр.

$$f(x) \to \min,$$

$$Ax = q,$$

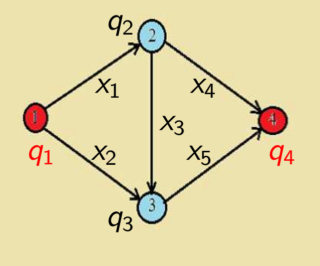
$f(x)$ — затраты, строго вып., коэрц. функция.

ОТ ОПТИМИЗАЦИИ К РАВНОВЕСИЮ

Пример. Задача потокораспределения:либерализация

q_i — спрос (узлы 2, 3):const/ производство (узлы 1, 4): var.

x_j — перетоки: var



$$q_1 = x_1 + x_2$$
$$x_1 = q_2 + x_3 + x_4$$
$$x_2 + x_3 = q_3 + x_5$$
$$q_4 + x_4 + x_5 = 0$$

– – – – – – – – – – – – – –

p_1, p_4 — цены

поведение (1,4) = макс. прибыль

Задача оптимизации с экстремальными включениями

$$f(x) \to \min,$$
$$Ax = q,$$
$$q_j \in Argmax\{p_j q_j - c_j(q_j) : q_j \in [0, \overline{q}_j]\}, j = 1, 4.$$

ОТ ОПТИМИЗАЦИИ К РАВНОВЕСИЮ

Итоговая постановка

$$f(x) \to \min,$$

$$Ax = q,$$

и $q_j, j = 1, 4:$

$$\Pi_j(q_j) = p_j q_j - c_j(q_j) \to \max,$$

$$0 \le q_j \le \overline{q}_j,$$

$c_j(q_j)$ — издержки, квадратичная функция.

$$\Updownarrow$$

Набор из трёх задач оптимизации, каждая из которых хорошо структурирована

ОТ ОПТИМИЗАЦИИ К РАВНОВЕСИЮ

"Обработка"задач-генераторов
Функция Лагранжа

$$L_j(q_j, \mu_j^-, \mu_j^+) = \Pi_j(q_j) + \mu_j^- q_j - \mu_j^+ (q_j - \overline{q}_j),$$

Стационарность

$$\Pi_j'(q_j) + \mu_j^- - \mu_j^+ = 0,$$

дополняющая нежёсткость

$$\mu_j^- q_j = 0,\ \mu_j^+ (q_j - \overline{q}_j) = 0,$$

допустимость

$$0 \le q_j \le \overline{q}_j,\ \mu_j^- \ge 0,\ \mu_j^+ \ge 0.$$

ОТ ОПТИМИЗАЦИИ К РАВНОВЕСИЮ

Результирующая задача оптимизации

$$f(x) \to \min,$$

$$Ax = q,$$

$$\Pi_j'(q_j) + \mu_j^- - \mu_j^+ = 0,\ j = 1,4,$$

$$\mu_j^- q_j = 0,\ \mu_j^+(q_j - \overline{q}_j) = 0,\ j = 1,4,$$

$$0 \le q_j \le \overline{q}_j,\ \mu_j^- \ge 0,\ \mu_j^+ \ge 0\ j = 1,4.$$

ОТ ОПТИМИЗАЦИИ К РАВНОВЕСИЮ

Результирующая задача оптимизации

$$f(x) \to \min,$$

$$Ax = q,$$

$$\Pi_j'(q_j) + \mu_j^- - \mu_j^+ = 0,\ j = 1, 4,$$

$$\mu_j^- q_j = 0,\ \mu_j^+(q_j - \overline{q}_j) = 0,\ j = 1, 4,$$

$$0 \leq q_j \leq \overline{q}_j,\ \mu_j^- \geq 0,\ \mu_j^+ \geq 0\ j = 1, 4.$$

$\Pi_j'(q_j)$ — линейная функция.

ОТ ОПТИМИЗАЦИИ К РАВНОВЕСИЮ

Результирующая задача оптимизации

$$f(x) \to \min,$$

$$Ax = q,$$

$$\Pi_j'(q_j) + \mu_j^- - \mu_j^+ = 0,\ j = 1, 4,$$

$$\mu_j^- q_j = 0,\ \mu_j^+ (q_j - \overline{q}_j) = 0,\ j = 1, 4,$$

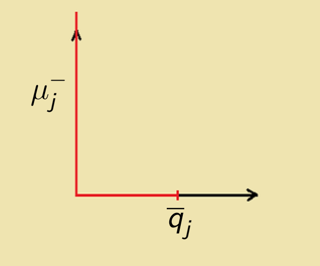
$$0 \le q_j \le \overline{q}_j,\ \mu_j^- \ge 0,\ \mu_j^+ \ge 0\ j = 1, 4.$$

$\Pi_j'(q_j)$ — линейная функция.

ОТ ОПТИМИЗАЦИИ К РАВНОВЕСИЮ

Негативные свойства дополняющей нежёсткости

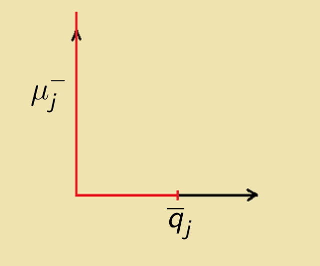
$$\mu_j^- q_j = 0,\ \mu_j^- \geq 0,\ 0 \leq q_j \leq \overline{q}_j$$



ОТ ОПТИМИЗАЦИИ К РАВНОВЕСИЮ

Негативные свойства дополняющей нежёсткости

$$\mu_j^- q_j = 0, \ \mu_j^- \geq 0, \ 0 \leq q_j \leq \overline{q}_j$$

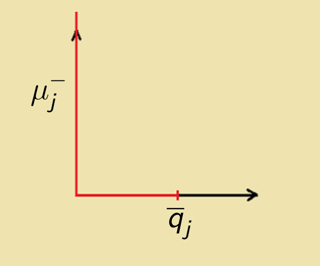


— задают невыпуклое множество

ОТ ОПТИМИЗАЦИИ К РАВНОВЕСИЮ

Негативные свойства дополняющей нежёсткости

$$\mu_j^- q_j = 0,\ \mu_j^- \geq 0,\ 0 \leq q_j \leq \overline{q}_j$$



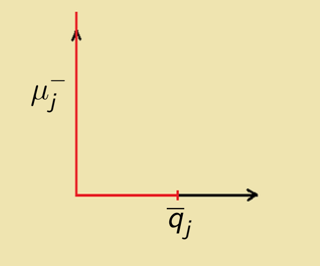
— задают невыпуклое множество

— не имеют внутренней точки

ОТ ОПТИМИЗАЦИИ К РАВНОВЕСИЮ

Негативные свойства дополняющей нежёсткости

$$\mu_j^- q_j = 0,\ \mu_j^- \geq 0,\ 0 \leq q_j \leq \overline{q}_j$$



— задают невыпуклое множество
— не имеют внутренней точки
— не удовлетворяют условиям регулярности

ОТ ОПТИМИЗАЦИИ К РАВНОВЕСИЮ

Возможности итоговой постановки

$$f(x) \to \min,$$
$$Ax = q$$
$$\Downarrow$$
$$\nabla f(x) + \lambda^{\mathsf{T}} A = 0,$$
$$Ax = q$$

ОТ ОПТИМИЗАЦИИ К РАВНОВЕСИЮ

Возможности итоговой постановки: введение новой целевой функции

$$\nabla f(x) + \lambda^{\mathsf{T}} A = 0,$$

$$Ax = q,$$

$$\Pi'_j(q_j) + \mu_j^- - \mu_j^+ = 0,\ j = 1,4,$$

$$\mu_j^- q_j = 0,\ \mu_j^+(q_j - \overline{q}_j) = 0,\ j = 1,4,$$

$$0 \le q_j \le \overline{q}_j,\ \mu_j^- \ge 0,\ \mu_j^+ \ge 0\ j = 1,4,$$

$$\Pi'_j(q_j) = p_j - c'_j(q_j).$$

ОТ ОПТИМИЗАЦИИ К РАВНОВЕСИЮ

Возможности итоговой постановки: введение новой целевой функции

$$\max\{p_j\} \to \min,$$

$$0 \le p_j \le \overline{p}_j,$$

$$\nabla f(x) + \lambda^{\mathsf{T}} A = 0,$$

$$Ax = q,$$

$$\Pi'_j(q_j) + \mu_j^- - \mu_j^+ = 0, \ j = 1, 4,$$

$$\mu_j^- q_j = 0, \ \mu_j^+(q_j - \overline{q}_j) = 0, \ j = 1, 4,$$

$$0 \le q_j \le \overline{q}_j, \ \mu_j^- \ge 0, \ \mu_j^+ \ge 0 \ j = 1, 4,$$

$$\Pi'_j(q_j) = p_j - c'_j(q_j).$$

$$\Downarrow$$

Выявление неэффективных генераторов!

ОТ ОПТИМИЗАЦИИ К РАВНОВЕСИЮ

Нелинейная задача о дополнительности.

$$f(x) \to \min,$$

$$x \geq 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$(0 \leq x \perp \nabla f(x) \geq 0) \Leftrightarrow \left(x^T \nabla f(x) = 0, x \geq 0, \nabla f(x) \geq 0\right).$$

ПОИСК РАВНОВЕСИЯ

Пример. Модель Леонтьева с переменными ценами

- n отраслей
- a_i – объём продукции i-й отрасли (a_i – const.)
- $D_{ij}(x_i)$ – функция спроса отрасли i на продукцию отрасли j

В силу закнутости (расходная часть)

$$p_i a_i = \sum_{j=1}^{n} p_j D_{ij}(p), \quad i = 1, \dots, n.$$

Можно ли за счет выбора цен достичь равновесного функционирования всех отраслей:

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} D_{ij}(p), \quad j = 1, 2, \dots, n?$$

ПОИСК РАВНОВЕСИЯ

Введем вектор-функцию $F(p) = (F_1(p), \dots, F_n(p))^T$:

$$F_j(p) = \sum_{i=1}^{n} D_{ij}(p), \quad j = 1, \dots, n.$$

Условие равновесия

$$a_j = F_j(p), \quad j = 1, \dots, n.$$

Возможен случай

$$a_j > F_j(p).$$

ПОИСК РАВНОВЕСИЯ

Если D_{ij} неотрицательны и непрерывны, то $\exists p^*$:

$$p^* \geq 0, \quad a - F(p^*) \geq 0, \quad (p^*)^T (a - F(p^*)) = 0,$$

т.е.

- если $p_j^* > 0$, то $a_j = F_j(p^*)$;
- если $a_j - F_j(p^*) > 0$, то $p_j^* = 0$.

Товар, не пользующийся спросом, имеет нулевую цену.

Доказательство основано на т. о неподвижной точке – т. Какутани!

ПОИСК РАВНОВЕСИЯ

Неформальное определение равновесного программирования

- Анализируется поведение группы из нескольких участников
- Каждый из участников зависит от остальных
- Каждый участник преследует свою цель
- Цели участников непротиворечивы

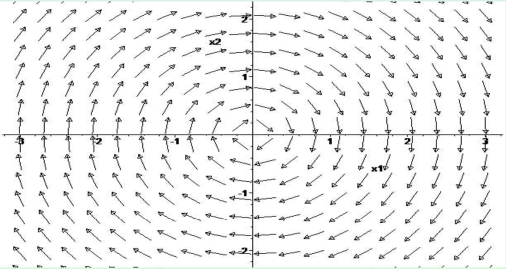
Формализм: участник=задача параметрической оптимизации

Сложность=непотенциальность: невозможность объединить систему задач оптимизации в одну "большую"задачу естественным образом

ПОИСК РАВНОВЕСИЯ

Классический пример непотенциального поля.

$x \in \mathbb{R}^2, F(x) = (x_2, -x_1)$. Равновесие: $F(x) = 0 \Rightarrow x^{eq} = 0$.



Дивергенция $div(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ поле без источников!

ПОИСК РАВНОВЕСИЯ

Задачи оптимизации: системы нелинейных уравнений.

Безусловная минимизация

$$f(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \nabla f(x) = 0.$$

+ограничения-равенства

$$f(x) \to \min,$$

$$g(x) = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$\nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0,$$

$$g(x) = 0.$$

ПОИСК РАВНОВЕСИЯ

Задачи минимизации. Вариационное неравенство.

$$f(x) \to \min,$$

$$x \in X.$$

$$\Updownarrow$$

$$\nabla f(x)^T (y - x) \geq 0 \ \ \forall y \in X.$$

Виды (fashions) “равновесных задач”

- *система уравнений*
- *задача о дополнительности*
- *вариационное неравенство*

Концепция: равновесие=неподвижная точка (некоторого точечно-множественного отображения)

Задача равновесного программирования.

Найти $v^* \in \Omega \subset R^n$:

$$v^* \in Argmin\{\Phi(v^*, w) : w \in \Omega\}. \qquad (EPA)$$

Стандартные условия существования решения:
1. Ω - выпуклый компакт
2. $\Phi(v, w)$ – непрерывна и квазивыпукла по w.

$$\Downarrow$$

Множество равновесных решений задачи (EPA) не пусто.

Решение задачи равновесного программирования – неподвижная точка *экстремального* отображения

Задача равновесного программирования.

Найти $v^* \in \Omega \subset R^n$:

$$v^* \in Argmin\{\Phi(v^*, w) : w \in \Omega\}. \qquad (EPA)$$

Включает

- Поиск седловой точки
- Задачу о дополнительности
- Вариационные неравенства
- Поиск равновесия по Нэшу

Для дальнейшего чтения...

- А.С. Антипин, И.В. Коннов
- Key words: Equilibrium programming, complementarity, variational inequality

Game over

Спасибо за внимание