

Метод регулярных разбиений для задач целочисленного программирования

Колоколов А. А.

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Введение

Доклад посвящен обзору исследований, выполненных в области целочисленного программирования с использованием метода регулярных разбиений.

Метод регулярных разбиений был предложен как новый подход к исследованию задач и алгоритмов ЦП, основанных на применении релаксационных множеств (алгоритмов отсечения, некоторых алгоритмов ветвей и границ и ряда других). Он возник в связи с анализом первого алгоритма Гомори. Вначале основное внимание уделялось построению оценок числа итераций для двойственных алгоритмов отсечения и исследованию структуры релаксационных множеств задач относительно рассматриваемых разбиений.

Введение (продолжение)

В дальнейшем в рамках данного подхода были построены и изучены алгоритмы решения ряда задач ЦП, исследованы некоторые вопросы их устойчивости.

В последнее время нами строятся оценки в среднем числа итераций алгоритмов ЦП, изучается применение метода регулярных разбиений в сочетании с унимодулярными преобразованиями, которые позволяют улучшить структуру задач и повысить эффективность алгоритмов их решения.

Следует также отметить, что метод развит и для задач частично-целочисленного программирования. На его основе получены теоретические результаты для задач и алгоритмов их решения.

Постановка задачи ЦЛП

$$f(x) = (c, x) \rightarrow \max \quad (1)$$

при условиях

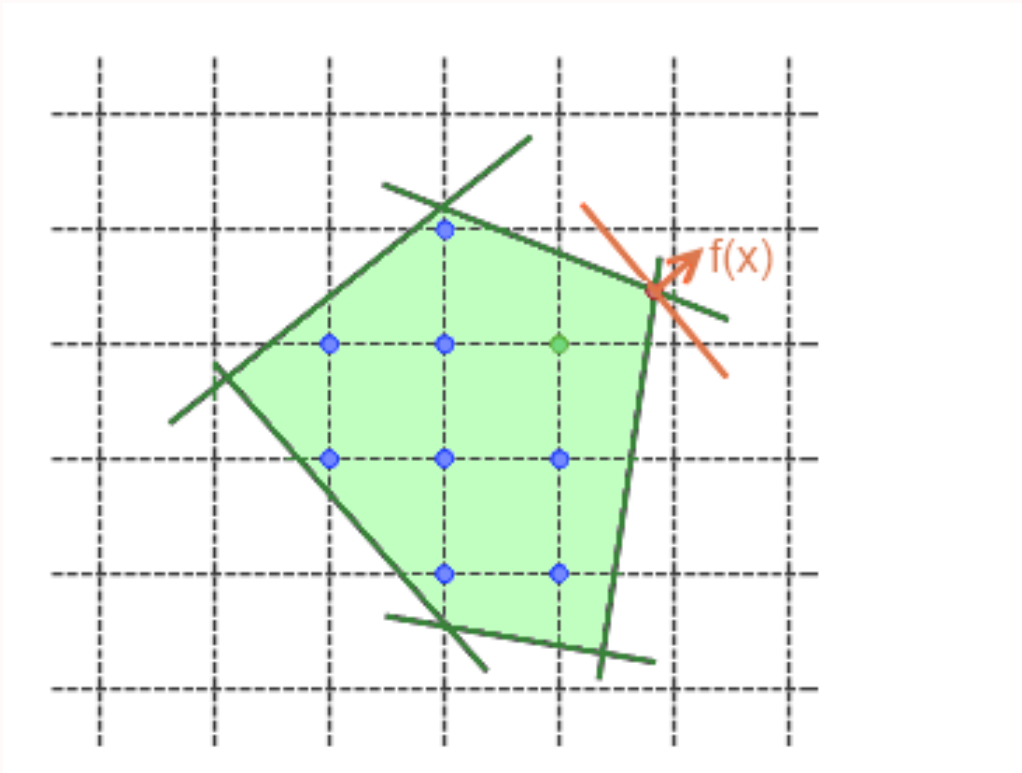
$$Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad (2)$$

$$x \in Z^n, \quad (3)$$

где $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$; $c = (c_1, \dots, c_n)$, $b = (b_1, \dots, b_m)^T$,
 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$.

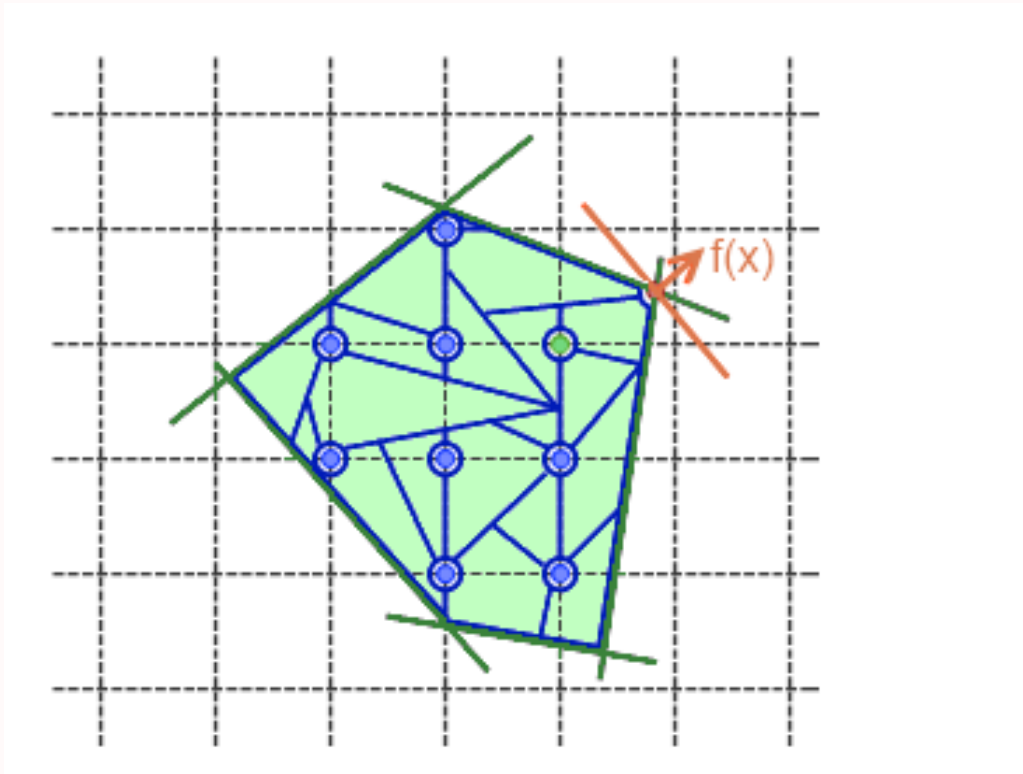
Все исходные данные задачи предполагаются рациональными, а в ряде случаев – целочисленными.

Идея метода регулярных разбиений



Идея метода регулярных разбиений

(продолжение)



Метод регулярных разбиений

Для анализа задачи (4), её дробного накрытия и методов решения вводится разбиение F пространства $\mathbb{R}^n$, которое индуцирует разбиение релаксационного множества Ω и обладает рядом хороших свойств, связанных со спецификой задач ЦП:

- 1) каждая точка $z \in \mathbb{Z}^n$ образует отдельный класс разбиения, остальные классы состоят только из нецелочисленных точек и называются дробными;
- 2) если множество $X \subset \mathbb{R}^n$ ограничено, то фактор-множество X/F конечно;
- 3) для любого $X \subset \mathbb{R}^n$ и любого вектора $z \in \mathbb{Z}^n$ имеет место $(X + z)/F = X/F + z$.

Элементы из X/F называются F -классами, а множество Ω_*/F — F -накрытием задачи (4).

Разбиения, удовлетворяющие 1)–3), называются регулярными.

Области применения метода

С использованием таких разбиений

- оценивается "сложность" решения задачи ЦП,
- изучается строение релаксационных множеств,
- описываются классы отсечений и исследуется их глубина,
- разрабатываются и сравниваются алгоритмы,
- анализируются последовательности приближений,
- строятся оценки числа итераций и отсечений,
- проводятся экспериментальные исследования алгоритмов и тестовых задач.

Постановка задачи

Рассматривается задача целочисленного программирования (ЦП) в лексикографической постановке:

$$\text{найти } z^* = \text{lexmax}(\Omega \cap \mathbb{Z}^n), \quad (4)$$

где $\Omega \neq \emptyset$ – выпуклое, замкнутое, ограниченное сверху множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, т.е. существует вектор $d \in \mathbb{R}^n$ такой, что $x \leq d$ для всех $x \in \Omega$.

Множество Ω называется релаксационным множеством задачи.

В алгоритмах отсечения и ряде других методов решения задач ЦП, основанных на аппарате непрерывной оптимизации, в процессе решения задачи (4) из Ω должны быть исключены все точки множества

$$\Omega_* = \{x \in \Omega \mid x \succ z \text{ для всех } z \in \Omega \cap \mathbb{Z}^n\},$$

которое называется *дробным накрытием* задачи.

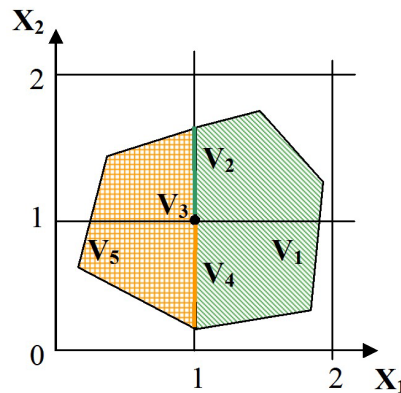
Исследуемые алгоритмы ЦП можно рассматривать как определенные способы "снятия" дробного накрытия.

L -разбиение

Значительное число результатов получено на основе L -разбиения, которое является регулярным и тесно связано с понятием делимости векторов.

Будем говорить, что $x, y \in R^n$ ($x \succeq y$) *отделимы*, если имеется $z \in Z^n$ такая, что $x \succeq z \succeq y$. Точку z назовем *отделяющей*.

Каждая точка из Z^n образует отдельный L -класс, т.е. элемент L -разбиения. Точки $x, y \in R^n$ ($x \succ y$ и $x, y \notin Z^n$) принадлежат одному *дробному* L -классу, если не существует отделяющей их $z \in Z^n$.



Здесь $V_1 \succ V_2 \succ V_3 \succ V_4 \succ V_5$.

L -структура

Пусть $X \subset R^n$ и $X_0 = X \cap Z^n$. Фактор-множество X/L называется L -структурой X , а его мощность обозначается через $|X/L|$.

Для ограниченного множества X можно записать

$$X/L = \{V_1, \dots, V_r\}, \text{ при этом } V_i \succ V_{i+1}, \quad i = 1, \dots, r-1.$$

Здесь $V_i \succ V_{i+1}$ означает, что для любых $x \in V_i$, $y \in V_{i+1}$ выполнено $x \succ y$.

Подмножество $Q = \{V_k, V_{k+1}, \dots, V_l\}$ дробных классов из X/L называется L -комплексом в X/L , если не существует $z \in X \cap Z^n$, такой, что $V_k \succ z \succ V_l$.

Пусть $\Psi(X) = \max\{|Q| : Q \in C(X)\}$, где $C(X)$ – совокупность всех L -комплексов, порождаемых X .

L -структура (продолжение)

Выпуклое множество $X \subset R^n$ имеет *альтернирующую* L -структуру, если $\Psi(X) \leq 1$, а лексикографически максимальный и минимальный элементы множества X/L являются целочисленными (при условии, что они существуют).

Альтернирующей L -структурой обладают параллелепипеды, симплексы, слои и некоторые другие многогранники, релаксационные множества ряда известных задач целочисленного линейного программирования, в частности, задач об упаковке и покрытии множеств, задачи стандартизации, задачи максимальной выполнимости логической формулы.

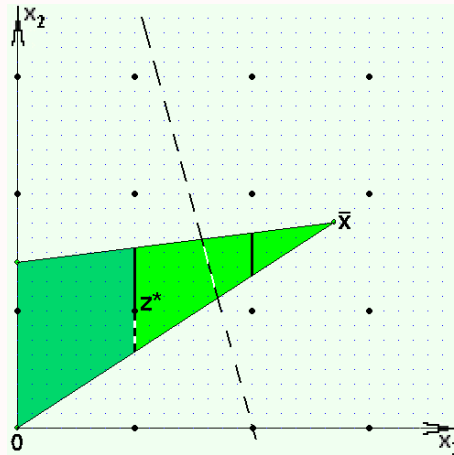
Имеются задачи, в которых мощности L -комплексов ограничены сверху полиномом от числа переменных. Для задачи о рюкзаке получена оценка $\Psi(X) \leq n$. Построены также семейства задач ЦЛП с более мощными L -комплексами, в том числе экспоненциально растущими с увеличением n .

L -накрытие

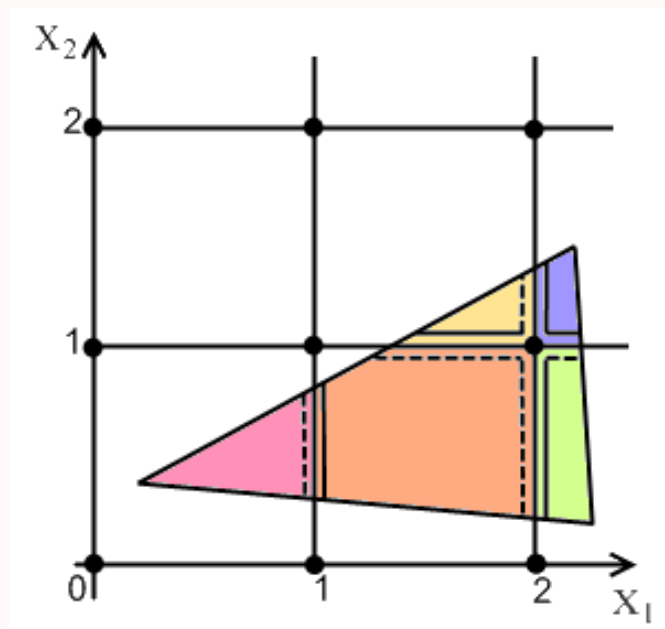
Во многих случаях сложность задач ЦП определяется мощностью L -разбиения дробного накрытия (L -накрытия) задачи.

В задачах, релаксационное множество которых не содержит целочисленной точки, L -накрытие совпадает с L -структурой.

Алгоритм считается *регулярным относительно разбиения*, если в ходе его работы строится последовательность приближений такая, что в каждый класс разбиения попадает не более одного ее элемента.



Кубическое разбиение



Кубическое разбиение

К регулярным разбиениям пространства R^n относятся также кубические разбиения, тесно связанные с "округлениями" нецелочисленных точек.

Пусть $B^n = \{x \in R^n \mid 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, \dots, n\}$, $B_0^n = B^n \cap Z^n$, $\delta \in B_0^n$.

Округлением вектора $x \in R^n$ в соответствии с δ назовем вектор $z \in Z^n$ такой, что $z_j = \lfloor x_j \rfloor$, если $\delta_j = 0$, и $z_j = \lceil x_j \rceil$, иначе, $j = 1, \dots, n$. Далее его будем обозначать через $\delta(x)$.

Разбиение, порождаемое $\delta \in B_0^n$, определяется следующим образом:

- 1) каждая точка $z \in Z^n$ образует отдельный класс,
- 2) точки $x, y \notin Z^n$ принадлежат одному дробному классу разбиения, если $\delta(x) = \delta(y)$.

Этот класс разбиений был использован при построении оценок числа итераций для алгоритмов ветвей и границ.

Постановка задачи ЦЛП

$$f(x) = (c, x) \rightarrow \max \quad (5)$$

при условиях

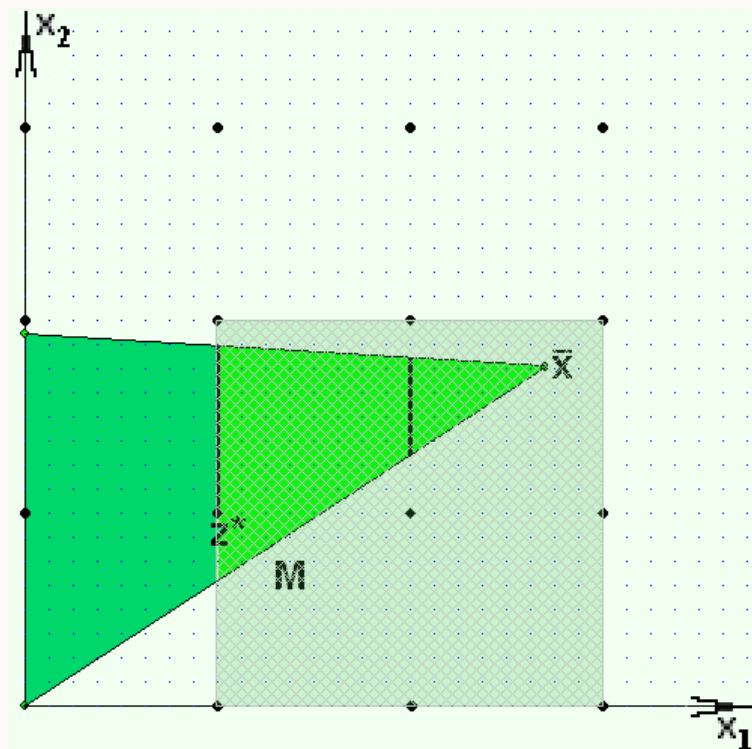
$$Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad (6)$$

$$x \in Z^n, \quad (7)$$

где $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$; $c = (c_1, \dots, c_n)$, $b = (b_1, \dots, b_m)^T$,
 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Все исходные данные задачи предполагаются рациональными, а в ряде случаев – целочисленными.

Построение оценок мощности L -накрытий



Построение оценок мощности L -накрытий

При построении оценок числа итераций для двойственных дробных алгоритмов отсечения, например, первого алгоритма Гомори, и алгоритмов перебора L -классов исследуются множества Ω_*/L и Ω/L .

В качестве общего подхода к оцениванию величины $|\Omega_*/L|$ применялось погружение Ω_* в различные множества с последующей оценкой числа целочисленных точек в них, например, параллелепипеды, симплексы, слои и другие.

Предположим, что дробное покрытие задачи (4) содержится в ограниченном множестве X . Тогда

- 1) $|\Omega_*/L| \leq \Psi(X)(|X_0| + 1)$;
- 2) если X имеет альтернирующую L -структуру и $X_0 \neq \emptyset$, то $|\Omega_*/L| \leq |X_0| - 1$;
- 3) если $A \geq 0$, $b \geq 0$ и $X = \{x \in R^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$, то $|\Omega_*/L| \leq n|X_0|$.

Построение оценок мощности L -накрытий

Пусть $M \neq \emptyset$ – множество, определяемое системой (6), $x' = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ и $M' = \{x' \in R^{n+1} \mid x_0 = (c, x), x \in M\}$.

Тогда лексикографическая задача (4), соответствующая (5)–(7), имеет вид:

$$\text{найти } z^* = \text{lexmax}(M' \cap Z^{n+1}).$$

Рассмотрим параллелепипед

$$\tilde{P} = \{x' \in R^{n+1} \mid \nu \leq x_0 \leq \mu, a_j \leq x_j \leq a'_j, j = 1, \dots, n\}.$$

Здесь $a_j, a'_j \in Z$, $\mu \geq \max\{(c, x) \mid x \in M\}$, а $\nu \leq \min\{(c, x) \mid x \in M\}$, если $M_0 = \emptyset$, либо $\nu \leq (c, x^*)$, где x^* – оптимальное решение задачи (5)–(7).

Теорема 1. Если в задаче (5)–(7) дробное накрытие M'_* содержится в $\tilde{P}$, то

$$|M'_*/L| \leq 1 + (\lfloor \mu \rfloor - \lceil \nu \rceil + 1) \prod_{j=1}^n (a'_j - a_j + 1). \quad (8)$$

Построение оценок мощности L -накрытий

Верхние оценки другого типа получены для задач БП на основе связи между L -комплексами и множествами нецелочисленных вершин релаксационных многогранников.

Пусть $\Omega \subset B^n$ – релаксационный многогранник для задачи (4).

L -класс из Ω/L называется вершинным, если он содержит некоторую вершину многогранника Ω .

Установлено, что $|\Omega_*/L| \leq 2v(\Omega_*)$, где $v(\Omega_*)$ – число таких классов в Ω_*/L .

Таким образом, мощные L -накрытия могут возникать лишь при большом числе нецелочисленных вершин, принадлежащих Ω_* .

Оценки числа итераций

Обозначим $I_D(\Omega)$ число итераций двойственного дробного процесса отсечения D , выполняемых при решении задачи (4).

Правильное отсечение называется L -регулярным, если оно вместе с оптимальным нецелочисленным решением текущей непрерывной задачи исключает и содержащий его L -класс.

Теорема 2. Для задачи (4) и процесса D с L -регулярными отсечениями имеет место оценка

$$I_D(\Omega) \leq |\Omega_*/L|.$$

Обозначим через $H_D(\Omega)$ верхнюю оценку глубины отсечений процесса D при решении задачи (4).

Теорема 3. Для задачи (4) и процесса D выполняется неравенство

$$I_D(\Omega) \geq \frac{1}{H_D(\Omega)} |\Omega_*/L|.$$

Вполне регулярные отсечения

Рассмотрим задачу (4). Пусть

$$P = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\},$$

где $a_i, b_i \in Z \cup \{-\infty\}, i = 1, \dots, n$. Предполагается, что $\Omega \subset P$.

Линейное неравенство

$$(\gamma, x) \leq \gamma_0 \tag{9}$$

называется *вполне регулярным отсечением*, если

- $(\gamma, x') > \gamma_0$ для любого $x' \in V_{\bar{x}}(P)$,
- $(\gamma, z) \leq \gamma_0$ для всех $z \in P \cap Z^n, z \prec x^*$,

где $V_{\bar{x}}(P)$ – элемент из P/L , содержащий $\bar{x}$.

Верхнюю оценку глубины таких отсечений дает следующая *Теорема 4*. Глубина любого вполне регулярного отсечения для задачи (4) не превышает числа переменных этой задачи.

Верхние оценки среднего числа итераций

Рассмотрим $\mathbf{P}(n, m, p)$ – класс задач об упаковке множества, в котором элементы матрицы A являются независимыми случайными величинами, причем $P\{a_{ij} = 1\} = p$ и параметры задачи удовлетворяют условию $mp^2 \geq \ln n$.

Показано, что алгоритм динамического программирования (ДП) является полиномиальным в среднем для $\mathbf{P}(n, m, p)$, а именно,

$$\mathbf{E}T_{DP} = O(n^2m),$$

где T_{DP} – число операций алгоритма ДП и $\mathbf{E}$ – математическое ожидание случайной величины.

Для указанного класса задач на основе свойства альтернируемости M/L показано, что $\mathbf{E}|M/L| \leq 4n + 1$. Отсюда следует утверждение.

Теорема 5. Для невзвешенных задач SPP из класса $\mathbf{P}(n, m, p)$ среднее число отсечений первого алгоритма Гомори не превосходит $3n^2 - 2n - 1$.

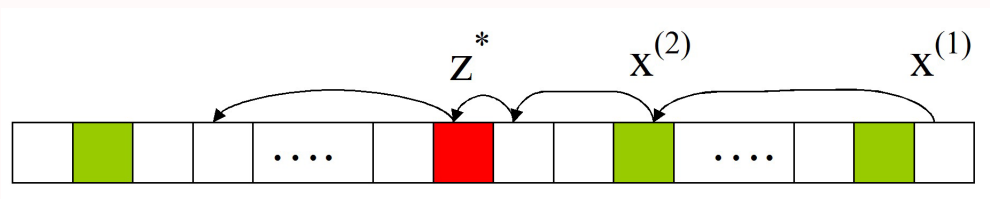
Метод перебора L -классов (LCE)

Процесс перебора L -классов начинается с лексикографически максимальной точки $x^{(1)} \in M$.

Текущие точки $x^{(t)}$ строятся посредством решения вспомогательных задач ЛП с помощью ЛДСМ или метода последовательной оптимизации.

Основной шаг процесса решения задачи состоит в переходе от одного L -класса релаксационного множества M к следующему за ним в порядке лексикографического убывания с учетом рекордного значения целевой функции.

Процесс завершается, когда не удастся найти представителя очередного L -класса.



Алгоритмы, основанные на переборе L -классов

Алгоритмы перебора L -классов успешно применяются для решения следующих задач:

- задачи об упаковке множества,
- задачи о рюкзаке,
- задачи выполнимости и максимальной выполнимости логической формулы,
- задач размещения и др.

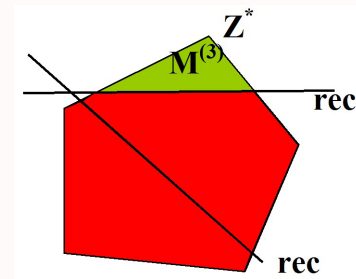
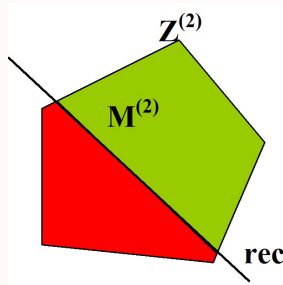
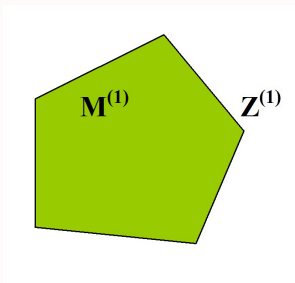
Активно изучаются свойства алгоритмов и разрабатываются способы повышения их эффективности, строятся оценки числа итераций, семейства трудных задач.

Алгоритм *LCE*

Процесс решения задачи (13) можно представить в виде последовательности «больших» итераций, на каждой из которых

- 1) в текущем многограннике $M^{(k)}$ решается задача поиска лексикографически максимальной целочисленной точки,
- 2) отсечение, построенное по найденному рекорду добавляется к системе неравенств, определяющих $M^{(k)}$.

Далее осуществляется переход к следующей итерации с новым многогранником $M^{(k+1)}$.



Алгоритм *LCE*

Каждая «малая» итерация является итерацией алгоритма перебора *L*-классов и осуществляет поиск представителя следующего *L*-класса с помощью хода «вниз» или хода «вверх».

Вспомогательная задача ЛП (ход «вниз»):

$$x' = \text{lexmax}\{x \in M : f(x) \geq \text{rec} + 1, x_1 = x''_1, \dots, x_{p-1} = x''_{p-1}, x_p = 0\},$$

где $p = \min\{j : x''_j \neq \lfloor x''_j \rfloor, j = 1, \dots, n\}$, x'' - элемент предыдущего *L*-класса.

Вспомогательная задача ЛП (ход «вверх»):

$$x' = \text{lexmax}\{x \in M : f(x) \geq \text{rec} + 1, x_1 = x''_1, \dots, x_{\varphi-1} = x''_{\varphi-1}, x_{\varphi} = 0\},$$

где $\varphi = \max\{j : j \leq p - 1, x''_j > 0, j = 1, \dots, n\}$.

Алгоритм, основанный на методах перебора L -классов и последовательной оптимизации

Решение задачи формируется из оптимальных значений целевых функций последовательности подзадач линейного программирования F_k , $k = 1, \dots, \bar{n}$ следующего вида:

$$\begin{aligned} f(x) = x_k &\rightarrow \max \\ x &= (x_1, \dots, x_{\bar{n}}) \in M'_k, \\ M'_k &= M_k \cap \bigcup_{j=1}^{k-1} \{x_j = f^*(x_j)\}. \end{aligned}$$

Следующие условия позволяют находить решения не для всех F_k , $k = 1, \dots, \bar{n}$:

- 1) задача F_1 не имеет решения;
- 2) для некоторого t : $x_t \notin \mathbb{Z}$.

Постановка задачи об упаковке множества

Дано:

$I = \{1, \dots, m\}$ — конечное множество

$\sigma = \{S_1, \dots, S_n\}$ — семейство его подмножеств

Упаковкой множества I называется совокупность попарно непересекающихся подмножеств из σ .

Требуется найти упаковку множества I максимальной мощности.

Если заданы веса $c_j > 0, j = \overline{1, n}$, то задача состоит в отыскании упаковки множества наибольшего веса.

Модель ЦЛП

Обозначения: $A = (a_{ij})$ — матрица инцидентий элементов множества I и подмножеств S_j , где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in S_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

переменные задачи:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если } S_j \text{ включается в упаковку} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Модель ЦЛП:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (10)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq 1, \quad i = \overline{1, m}; \quad (11)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Лексикографические постановки задачи

В дальнейшем будем рассматривать следующую постановку:

$$\text{найти } z^* = \textit{lexmax} (U \cap \mathbb{Z}^{n+1}), \quad (13)$$

$$\text{где } U = \{x' \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 - (c, x) = 0, Ax \leq e, x \geq 0\}. \quad (14)$$

Обозначим $z = (z_0, z_1, \dots, z_n)$.

Дробным накрытием задачи (13) будет соответственно множество

$$U_* = \{x' \in U : x' \succ z, \text{ для всех } z \in (U \cap \mathbb{Z}^{n+1})\}.$$

Задача об упаковке множества с матрицей блочной структуры

Пусть число переменных задачи $n = 3k$ и матрица имеет вид:

$$D_k = \begin{pmatrix} B & & & \\ & B & & \emptyset \\ & & \ddots & \\ & \emptyset & & \ddots & \\ & & & & B \end{pmatrix}, \text{ где } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для мощности L -накрытия задачи была получена оценка (Заозерская Л. А.)

$$|U_*(D_k)/L| \geq \frac{3^k - 3}{8}.$$

Подкласс блочных задач с экспоненциальными L -накрытиями

Теорема 6. Пусть имеются две задачи об упаковке множества с произвольными матрицами $A_{n_1 \times m_1}$, $B_{n_2 \times m_2}$ и

$$H = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

тогда

$$|U_*(H)/L| \geq |U_*(A)/L| + |U_*(B)/L|.$$

Подкласс блочных задач с экспоненциальными L -накрытиями (продолжение)

Из результата Заозерской Л.А. и теоремы 5 следует

Теорема 7. Пусть дана произвольная задача об упаковке множества $A_{n \times m}$. Рассмотрим задачу с матрицей

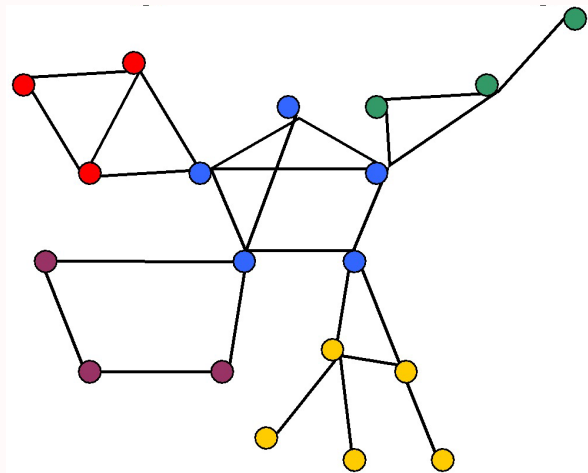
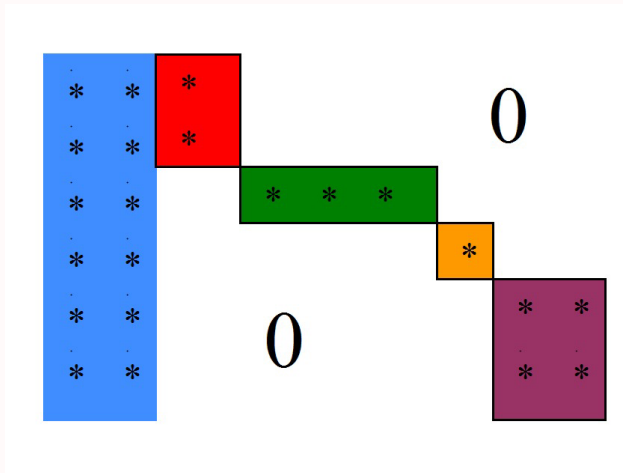
$$H_{n_1 \times m_1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D_k \end{pmatrix}, n_1 = n + 3 * k, m_1 = m + n.$$

Тогда

$$|U_*(H)/L| \geq \frac{3^k - 3}{8}.$$

Алгоритм для задачи упаковки с матрицей блочной структуры

Пусть дана задача упаковки с матрицей следующей структуры:



Обозначим r — число переменных в связующем блоке матрицы.

Алгоритм для задачи упаковки с матрицей блочной структуры(продолжение)

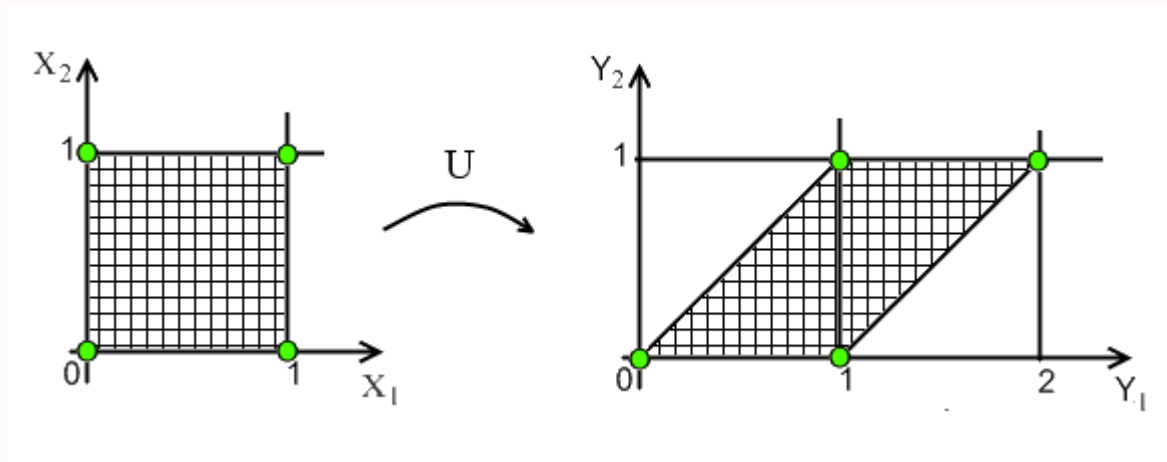
Особенности алгоритма:

- если зафиксированы значения переменных с номерами $j = 1, \dots, p$, где $p \geq r$, то алгоритм вместо одной "большой" задачи, решает несколько задач ЦЛП, каждая из которых, соответствует отдельному блоку, или части блока.
- каждая такая задача ЦЛП решается перебором L -классов с учетом специфики задачи упаковки.

В случае, когда $p < r$, декомпозиция не используется.

Унимодулярные преобразования

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u_{ij} \in \mathbb{Z}$, $i, j = \overline{1, n}$. Матрица $U = (u_{ij})$ называется *унимодулярной*, если $\det U = \pm 1$.



$$y_1 = x_1 + x_2;$$

$$y_2 = x_2.$$

Целочисленная решетка инвариантна относительно любого унимодулярного преобразования.

Семейства трудных задач

Рассмотрим задачу типа (4) на следующем множестве:

$$\mathcal{Q} = \{x : x \in B^n, x_1 + 2 \sum_{j=2}^n x_j = k\}, \quad (15)$$

где $n \geq 2, k$ — четное, $1 < k \leq 2(n-1)$.

Данное множество, в отличие от хорошо известного многогранника Джерослоу содержит целочисленную точку. Не трудно проверить, что

$$|M_*/L| \geq 2^{\frac{k}{2}} - 1.$$

Семейства трудных задач (продолжение 1)

Сначала применим преобразование, которое работает для многогранника Джерослоу, немного его модифицировав:

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1, \\y_2 &= x_2 + x_3 + \dots + x_n, \\y_3 &= x_3, \\&\dots \\y_n &= x_n.\end{aligned}$$

Это преобразование переводит $\mathcal{Q}$ в

$$\tilde{\mathcal{Q}} = \{y \in \mathbb{R}^n : 0 \leq y_1 \leq 1, y_1 + 2y_2 = k, 0 \leq y_j \leq 1, j = 3, \dots, n\}.$$

Семейства трудных задач (продолжение 2)

Лексикографически максимальный вектор y для преобразованного множества будет иметь следующий вид:

$$y_1 = 1,$$

$$y_2 = \frac{k-1}{2}, \text{ где } y_2 - \text{дробное, в силу четности } k,$$

значения следующих $n - 2$ координат составляют $\frac{1}{2}$, $\frac{k-2}{2}$ единиц, а остальные нули, при этом подойдет любое расположение указанных величин, поскольку, как известно, дробный L -класс определяется первой дробной координатой и набором целочисленных значений координат, которые имеют меньший номер.

Семейства трудных задач (продолжение 3)

Далее применим еще одно унимодулярное преобразование:

$$\begin{aligned}y_1 &= x_2, \\y_2 &= x_1, \\y_3 &= x_3, \\&\dots \\y_n &= x_n.\end{aligned}$$

Это преобразование переводит $\tilde{Q}$ в

$$\hat{Q} = \{y \in \mathbb{R}^n : y_2 + 2y_1 = k, 0 \leq y_j \leq 1, j = 2, \dots, n\}.$$

Нетрудно показать, что теперь дробное накрытие задачи типа (4) на $\hat{Q}$ – пустое множество.

Семейства трудных задач (продолжение 4)

Таким образом, для многогранника $\mathcal{Q}$ существует унимодулярное преобразование, позволяющее быстро получить допустимый целочисленный вектор:

$$\begin{aligned}y_1 &= x_2, \\y_2 &= x_1 + x_3 + \dots + x_n, \\y_3 &= x_3, \\&\dots \\y_n &= x_n.\end{aligned}$$

Представляет интерес изучение задачи вида (4) на более существенной модификации множества (15):

$$\mathcal{Q} = \{x : x \in B^n, x_1 + 2 \sum_{j=2}^l x_j = k, \sum_{j=l+1}^n a_j x_j = b\}, \quad (16)$$

где $n \geq 2$, k — четное, $1 < k \leq 2(n-1)$, $a_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, n$, $b \in \mathbb{N}$.

Семейства трудных задач (продолжение 5)

L -накрытие задачи вида (4) на данном множестве также ограничено снизу величиной $2^{\frac{k}{2}} - 1$. Вопрос о существовании допустимого целочисленного вектора остается и зависит от второго добавленного уравнения с произвольными коэффициентами и правой частью.

Это уже не просто семейство, а подкласс NP -трудных задач поиска допустимого вектора на множестве, каждая из которых имеет экспоненциальное L -накрытие. Таким образом, для описанного в первой главе классического алгоритма перебора L -классов число итераций на множествах указанного типа не меньше, чем $2^{\frac{k}{2}} - 1$.

Для вполне регулярного процесса отсечения, глубина которого, как известно, не превышает n , число итераций ограничено снизу величиной $\frac{2^{\frac{k}{2}} - 1}{n}$. Отсюда следует, что полиномиального алгоритма основанного на методе LCE и вполне регулярных процессах отсечения для задач вида (4) с множествами описанного выше типа не существует.

Постановка задачи о рюкзаке

Рассматривается следующая задача о рюкзаке:

$$\text{найти } z^* = \text{lexmax}(M \cap \mathbb{Z}^n), \text{ где} \quad (17)$$

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n a_i x_i = b, \ x_i \geq 0, \ i = \overline{1, n}\}. \quad (18)$$

Предполагается, что $a_i, b \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, n}$.

Некоторые оценки для задачи о рюкзаке с булевыми переменными

В работах Колоколова А.А. и Заблочки О.А. [1985] рассматривалась задача вида (17)-(18) поиска булевого решения. В качестве коэффициентов использовалась последовательность чисел Фибоначчи, взятых по убыванию.

Результаты.

- Доказано, что при условии существования целочисленного решения, мощность L -накрытия релаксационного множества задачи не превосходит n .
- Как следствие, было установлено, что при решении указанной задачи алгоритмом перебора L -классов или регулярным процессом отсечения потребуется не более $n+1$ итерации.

Некоторые оценки для задачи о рюкзаке с булевыми переменными

(продолжение)

- Показано, что изменение порядка переменных (простейшее унимодулярное преобразование), приводит к тому, что релаксационный многогранник задачи может иметь экспоненциальное (от числа переменных задачи) L -накрытие, даже при наличии целочисленной точки.

Исходный порядок:

$$a_1 > a_2 > \dots > a_n,$$

новый порядок:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n.$$

Изменение порядка переменных

Продолжая исследования задачи (17)-(18) в направлении поиска унимодулярных преобразований, улучшающих структуру задачи, нами получен ряд новых теоретических результатов.

В частности, доказана следующая теорема.

Теорема 8. Для класса унимодулярных преобразований, соответствующих перестановкам переменных задачи, приводящих к упорядочению коэффициентов в задаче (17)-(18)

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n,$$

L -структура образа релаксационного многогранника M обладает минимальной мощностью.

Аналогичная теорема доказана и для булевого варианта рассматриваемой задачи.

Оптимальное упорядочение для обобщения задачи о рюкзаке

Утверждение теоремы оказалось справедливо и для случая:

$$a_j \in \mathbb{R}^+, j = 1, \dots, n, b \in \mathbb{R}^+.$$

Подобное свойство имеет место и для задачи вида:

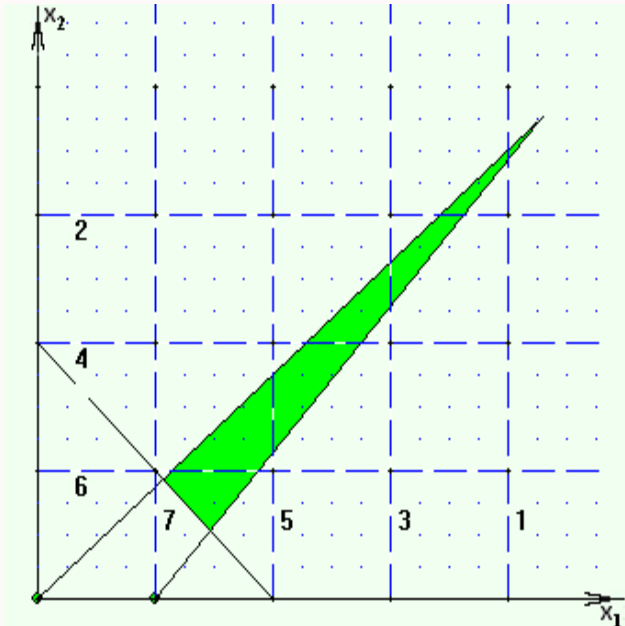
$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j x_j &\rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^n a_j x_j &\leq b, \\ x_j &\geq 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Предполагается, что $a_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, n, b \in \mathbb{N}$. В данном случае, решение задачи можно представлять как последовательность решения задач на равенство (для которых справедлива теорема об оптимальном порядке переменных), получаемых из описанной выше задачи для различных линий уровня путем перебора правой части b в направлении уменьшения исходной величины.

Исследование задач семейства $\tilde{K}_1(\alpha)$

Найти $z^* = \text{lexmax}(M \cap \mathbb{Z}^2)$,

$$M : \begin{cases} -(\alpha - 1) \cdot x_1 + \alpha \cdot x_2 \leq 0, \\ \alpha \cdot x_1 - (\alpha - 1) \cdot x_2 \leq \alpha, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$



$$M_* = M$$
$$|M_*/L| = \alpha - 1$$

$\tilde{K}_1(\alpha)$ – трудное для
алгоритма G^1

О сложности задач семейства $\tilde{K}_1(\alpha)$

I_{LD} – число итераций алгоритма ветвей и границ (схема Лэнд и Дойг).

I_{LCE} – число итераций алгоритма перебора L -классов.

Теорема 9. Для решения любой задачи семейства $\tilde{K}_1(\alpha)$ при $\alpha \geq 2$ требуется следующее число итераций:

$$I_{G^1} = \varphi(\alpha) - 1,$$

$$I_{LD} = \begin{cases} 2(\alpha - 1), & \text{если } \alpha - \text{четное,} \\ 2(\alpha - 1) - 1 & - \text{иначе,} \end{cases}$$

$$I_{LCE} = (\alpha - 1).$$

$$\text{Здесь: } \varphi(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha - \text{четное,} \\ \alpha - 1, & \text{иначе,} \end{cases}$$

Унимодулярное преобразование для семейства $\tilde{K}_1(\alpha)$

Преобразование:

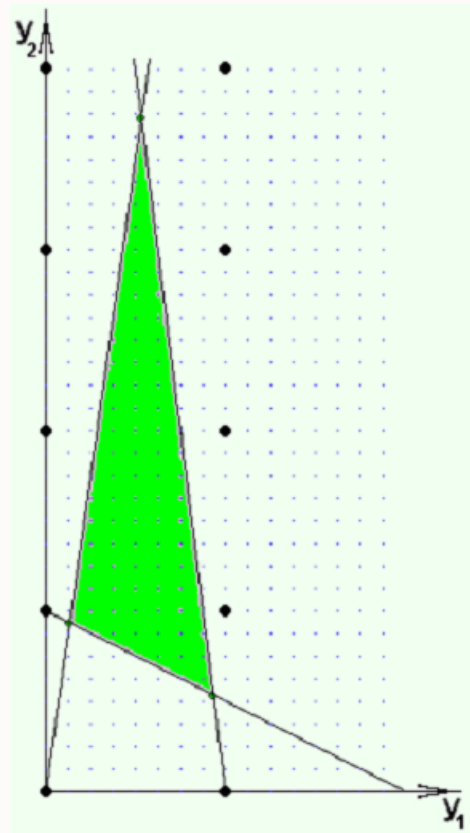
$$y_1 = x_1 - x_2,$$

$$y_2 = x_2.$$

$\Downarrow$

$$\tilde{M} : \begin{cases} -(\alpha - 1) \cdot y_1 + y_2 \leq 0, \\ \alpha \cdot y_1 + y_2 \leq \alpha, \\ y_1 + 2y_2 \geq 2, \\ y_1 + y_2 \geq 0, \\ y_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$|\tilde{M}_*/L| = 1.$$



Исследование семейства $\tilde{K}_1^n(\alpha)$

Найти $z^* = \text{lexmax}(M \cap \mathbb{Z}^2)$,

$$M : \left\{ \begin{array}{l} -(\alpha - 1) \cdot x_1 + \alpha \cdot x_2 \leq 0, \\ \alpha \cdot x_1 - (\alpha - 1) \cdot x_2 \leq \alpha, \\ -(\alpha - 1) \cdot x_3 + \alpha \cdot x_4 \leq 0, \\ \alpha \cdot x_3 - (\alpha - 1) \cdot x_4 \leq \alpha, \\ \dots \\ -(\alpha - 1) \cdot x_{n-1} + \alpha \cdot x_n \leq 0, \\ \alpha \cdot x_{n-1} - (\alpha - 1) \cdot x_n \leq \alpha, \\ x_1, \dots, x_n \geq 0. \end{array} \right.$$

Теорема 10. Мощность L -накрытия любой задачи семейства $\tilde{K}_1^n(\alpha)$ равна $\frac{n}{2} \cdot \varphi(\alpha)$.

$\tilde{K}_1^n(\alpha)$ – трудное для алгоритма G^1 .

О сложности семейства $\tilde{K}_1^n(\alpha)$

Теорема 11. Для решения любой задачи семейства $\tilde{K}_1^n(\alpha)$ при $\alpha \geq 2$ требуется следующее число итераций:

$$I_{LCE}(\tilde{K}_1^n(\alpha)) = \frac{n}{2} \cdot \varphi(\alpha),$$

$$I_{G^1}(\tilde{K}_1^n(\alpha)) = \frac{n}{2} \cdot \varphi(\alpha).$$

Аналогичные результаты получены для задач семейства $\tilde{K}_2^n(\alpha)$, в которых отсутствуют допустимые целочисленные точки.

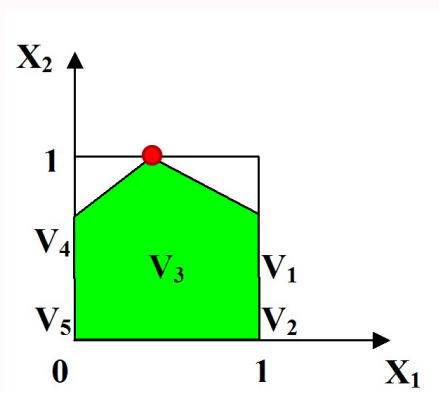
Вершинные и существенные классы

Назовем L -класс V *существенным*, если лексикографически максимальная точка $x \in V$ существует.

Отметим, что каждый существенный класс является вершинным, обратное неверно.

Пусть $X \subseteq R^n$. L -классы V_1 и V_2 из X/L ($V_1 \succ V_2$) называются *соседними*, если не существует такого L -класса $V \in X/L$, что $V_1 \succ V \succ V_2$.

Если многогранник задачи содержится в $\text{conv}(B^n)$, тогда из любых двух соседних L -классов в его L -структуре хотя бы один существенный.



Анализ алгоритма *LCE*

Пусть S последовательность приближений алгоритма *LCE*. Отметим, что связь S с множеством нецелочисленным вершин многогранника задачи играет важную роль в изучении алгоритмов, основанных на методе перебора L -классов.

- Было установлено, что в подобных алгоритмах имеет место лексикографический перебор вершинных L -классов и пропускается не более одного такого L -класса за итерацию.

Обозначим через $v(X)$ **количество существенных классов** в множестве X/L для каждого $X \subseteq R^n$. Из указанных свойств алгоритма *LCE* следует.

Теорема 12. Длина последовательности приближений S совпадает с числом существенных классов в L -накрытии задачи о рюкзаке (17),(18).

Анализ алгоритма *LCE* (продолжение)

В случае задачи упаковки (13),(14) длина последовательности S в некоторых случаях может не совпадать с количеством существенных классов в L -накрытии задачи.

Теорема 13. Для задачи об упаковке множества (13),(14) справедлива оценка

$$|S| \geq v(M_*^P/L).$$

Следовательно, если мощность L -накрытия задачи растет экспоненциально с ростом размерности задачи, число итераций алгоритма *LCE* растет с не меньшей скоростью.

Заключение

- Продолжается развитие и применение метода регулярных разбиений в следующих направлениях: исследование структуры и сложности задач, построение и анализ алгоритмов, получение оценок числа итераций, выделение различных семейств задач.
- Значительный интерес вызывают вопросы, связанные с изучением L -структуры многогранников различных задач и распределением их вершин по L -структуре.
- Исследования показали, что унимодулярные преобразования могут существенно улучшать структуру задач и повышать эффективность алгоритмов.
- Представляется перспективным выделение классов унимодулярных преобразований, которые приводят к улучшению структуры различных задач ЦЛП.

Спасибо за внимание!