

Фейеровские и проекционные алгоритмы

Е.А. Нурминский
nurmi@dvo.ru

Институт автоматики и процессов управления
ДВО РАН, Владивосток

Молодежная научная школа-семинар
"Дискретные модели и методы принятия решений"
Новосибирск (Академгородок), 21-23 июня 2013

Квантовый компьютер DWAVE TWO



План:

1 Фейеровские процессы

- Теория сходимости. Линейный случай.
- Фейеровские процессы с малыми возмущениями (теорема разделения)
- Ускорение сходимости

2 Проекционные алгоритмы

- Задача проекции. Линейный случай.
- Внутреннее и внешнее описание выпуклых многогранников
- Проекция на внутренне описанные многогранники
- Декомпозиция и параллелизация
- Проекция на внешне описанные многогранники
- Задача линейного программирования

Фейеровские операторы и процессы

- Оператор $F : E \rightarrow E$ называется фейеровским если для любого x

$$\|F(x) - v\| \leq \|x - v\| \quad \forall v \in V.$$

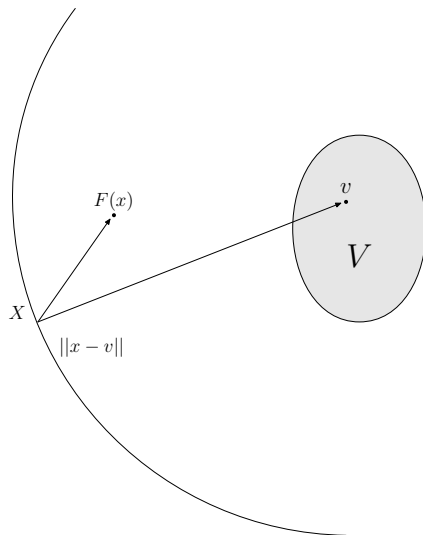
- Оператор $F : E \rightarrow E$ называется локально сильно фейеровским, если для любого $\bar{x}$ существует окрестность нуля U и $\alpha \in [0, 1)$ такие, что

$$\|F(x) - v\| \leq \alpha \|x - v\| \quad \forall v \in V, x \in \bar{x} + U.$$

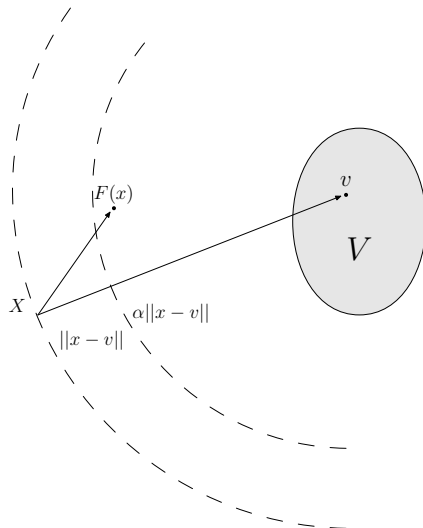
- Фейеровский процесс:

$$x^{k+1} = F(x^k), k = 1, 2, \dots$$

Фейеровский оператор



Локально сильно выпуклый фейеровский оператор



Алгебра фейеровских операторов

Пусть F_1, F_2 — (непрерывные локально сильно выпуклые) фейеровские операторы по отношению к множествам V_1, V_2 соответственно. Тогда

- $F_1 \circ F_2, F_2 \circ F_1,$
- $\lambda F_1 + (1 - \lambda)F_2$ with $\lambda \in [0,1]$

будут (непрерывными локально сильно выпуклыми) фейеровскими операторами по отношению к множеству $V_1 \cap V_2$.

Фейеровские процессы

- Классика (И.И. Еремин):

$$x^{k+1} = F(x^k), \quad k = 0, 1, \dots; \quad x^k \rightarrow X;$$

- Фейеровские процессы с убывающими возмущениями:

$$x^{k+1} = F(x^k + z^k), \quad z^k \rightarrow 0, \quad x^k \rightarrow X;$$

- Фейеровские процессы с убывающими аттрактантами:

$$x^{k+1} = F(x^k + \lambda_k g(x^k)), \quad g^k \in G(x^k), \quad \lambda_k \rightarrow +0, \quad \sum \lambda_k = \infty.$$

при этом $x^k \rightarrow Z \subset X$

- Фейеровские процессы с дискретным выбором и убывающими аттрактантами:

$$x^{k+1} = F_k(x^k + \lambda_k g(x^k)), \quad g^k \in G(x^k), \quad \lambda_k \rightarrow +0, \quad \sum \lambda_k = \infty,$$

$F_k \in \mathcal{F} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ и аналогично при этом $x^k \rightarrow Z \subset X$.

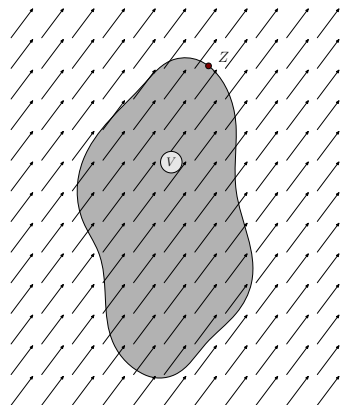
Атрактанты

Точечно-множественное отображение $\Phi : E \rightarrow 2^E$ называется **аттрактантом** множества $Z \subset X$ если для любых $x' \in X \setminus Z$ и любой окрестности нуля U :

$$g(z - x) > 0 \\ \forall z \in Z, x \in x' + U, g \in \Phi(x).$$

$\Phi : E \rightarrow 2^E$ называется **локально сильный аттрактант** множества $Z \subset V$ если для любого $x' \in V \setminus Z$ существует окрестность нуля U и $\delta > 0$:

$$g(z - x) > \delta \\ \forall z \in Z, x \in x' + U, g \in \Phi(x).$$



Применение к задачам сетевого транспортного равновесия

Эквивалентная задача оптимизации (симметричная версия бескоалиционного конкурентного равновесия):

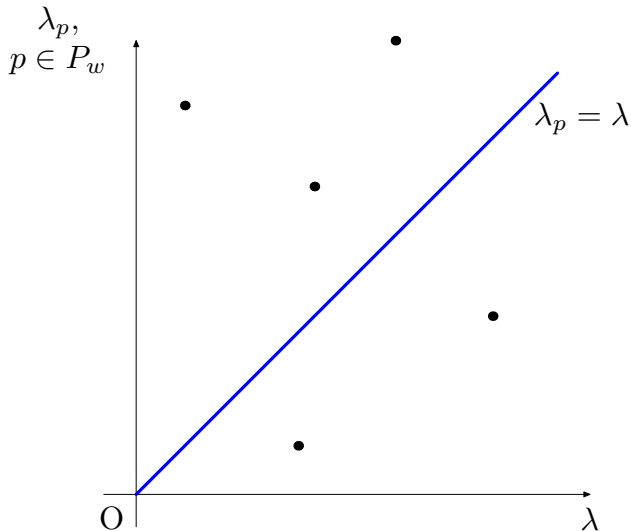
$$\min \sum_{p \in P_w} \tilde{G}_p(x), \sum_{p \in P_w} x_p = d_w, \tilde{G}_p(v) = \int^v G_p(z) dz.$$

Условия оптимальности: $G_p(x^*) = \lambda, p \in P_w$.

Иначе

$$A) \left\{ \begin{array}{l} G_p(x) = \lambda_p, p \in P_w \\ \lambda_p = \lambda, p \in P_w \end{array} \right. \quad B) \left\{ \begin{array}{l} G_p(x) = \lambda_p, p \in P_w \\ \lambda_p = \lambda_q, p, q \in P_w \end{array} \right.$$

Сетевое равновесие



Сетевое равновесие

Наиболее нарушенное условие равновесия:

случай А:

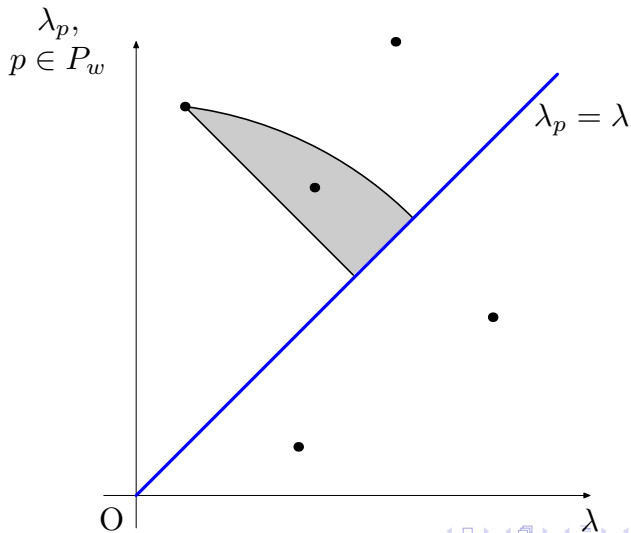
$$\max_{p \in P_w} |\lambda_p - \lambda| = \max \left\{ \max_{p \in P_w} G_p(x) - \lambda, \lambda - \min_{p \in P_w} G_p(x) \right\},$$

случай В:

$$\max_{p, q \in P_w} |\lambda_p - \lambda_q| = \max_{p, q \in P_w} G_p - \min_{p \in P_w} G_p(x)$$

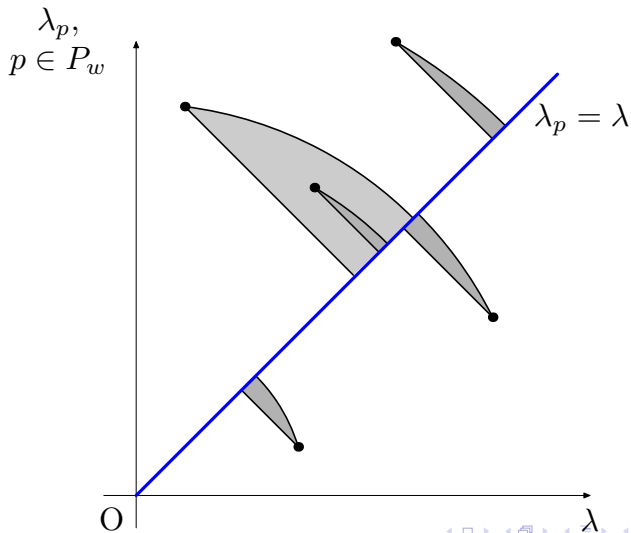
Сетевое равновесие

Фейеровская коррекция:



Сетевое равновесие

Параллельная фейеровская коррекция:



Big problem

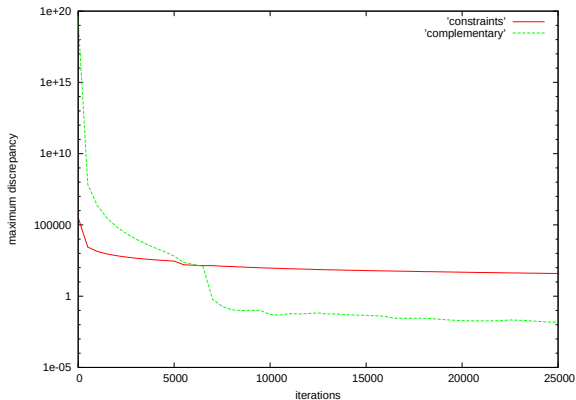
Большая проблема !

$$\lambda_k \rightarrow +0, \quad \sum_k \lambda_k = \infty$$

ведет к очень медленной сходимости, порядка $1/k$ в лучшем случае.

Вариационное неравенство

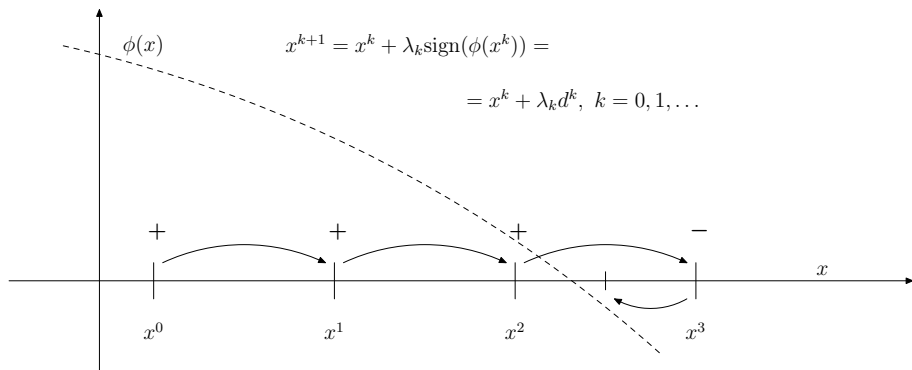
Найти: $x^* \in X : G(x^*)(x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in X$. где



$$G(x) = (1 + \|x\|)(x - x^*), X = \{x \leq 0\},$$

с $x^* = (1, 2, \dots, n)$ и решением $(0, 0, \dots, 0)$

1-мерный случай



$$d^k = \begin{cases} -1 \\ +1 \end{cases}, \quad \lambda_k = \begin{cases} 0.5\lambda_{k-1} & 0 \in \text{co}\{d^{k-1}, d^{k-2}, d^{k-3}, \dots\} \\ \lambda_{k-1} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

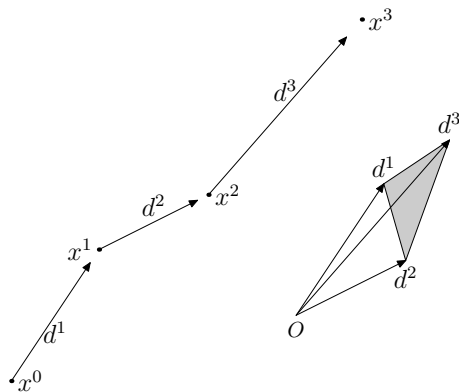


Рис. : $0 \notin \text{co} \{d^1, d^2, d^3\}$

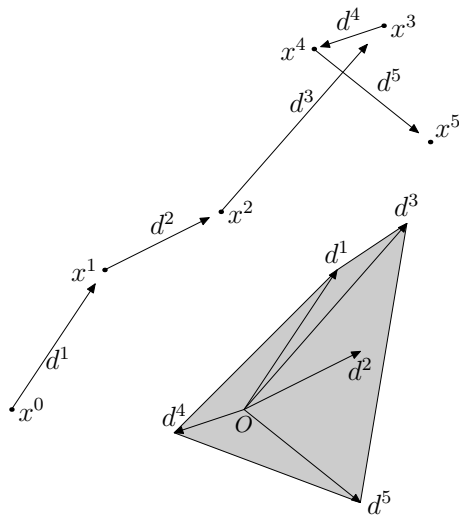


Рис. : $0 \in \text{co} \{d^1, d^2, d^3, d^4, d^5\}$

Алгоритм

$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k d^k, \quad d^k \in D(x^k),$$

Обозначим $D(p, q) = \text{co} \{d^p, d^{p+1}, \dots, d^q\}$ и пусть $q \in (0, 1)$.

Для $\theta_m \rightarrow +0, m = 0, 1, \dots$ определим $\{k_m\}$ и $\{\lambda_k\}$ следующим образом:

- Положим $k_0 = 0$ и выберем начальное $\lambda_0 > 0$.
- Для данного m и k_m определим k_{m+1} как такой индекс, что

$$0 \notin D(k_m, k) + \theta_m B, \quad k_m \leq k < k_{m+1}, \quad 0 \in D(k_m, k_{m+1}) + \theta_m B$$

с $\lambda_k = \lambda_{k_m}$ для $k_m \leq k < k_{m+1}$. Положим $\lambda_{k_{m+1}} = q\lambda_{k_m}$.

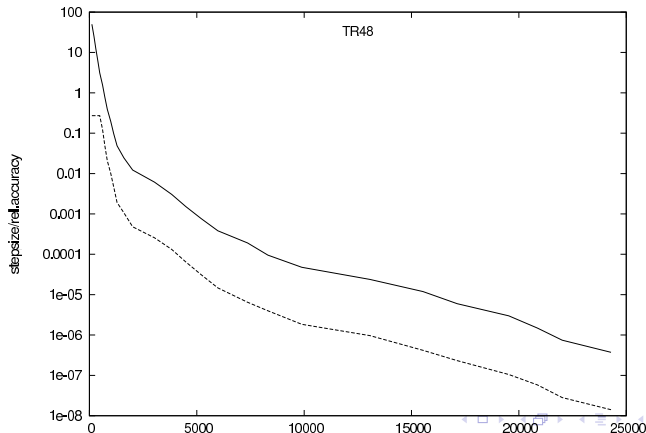
$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k d^k, \quad d^k \in D(x^k),$$

$k \rightarrow k + 1$ и продолжим.

Численные эксперименты: TR48

Тестовая функция TR48 (Lemarechal-Mifflin,78)

$$-f(x) = \sum_{i=1}^{48} s_i x_i + \sum_{j=1}^{48} d_j \min_{i=1,2,\dots,48} (a_{ij} - x_i),$$

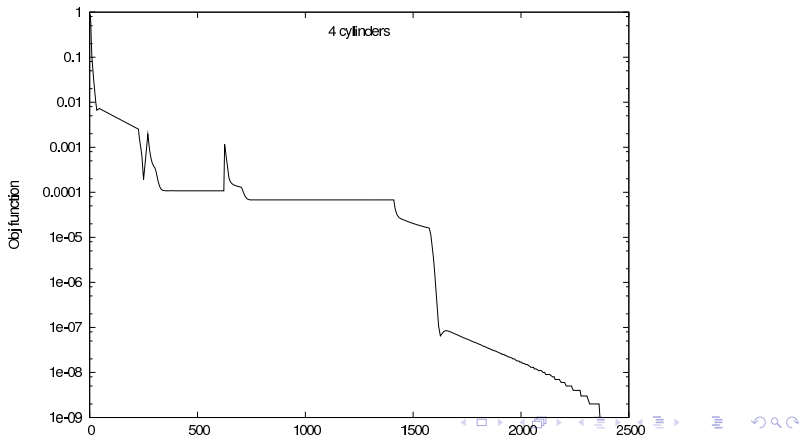


Численные эксперименты: Cylinder

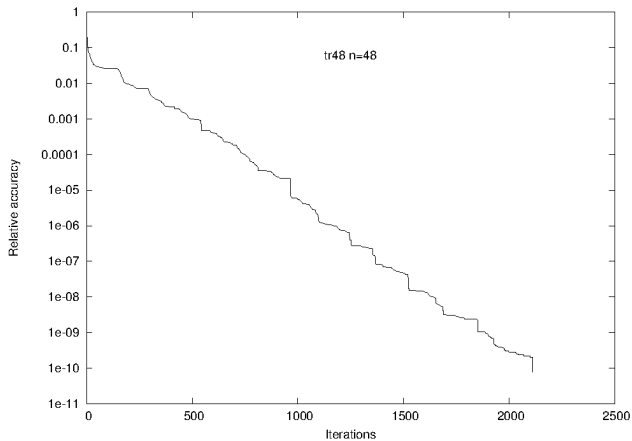
Линейная целевая функция, цилиндрические квадратичные ограничения.

$$\min cx$$

$$\sum_{i=1, i \neq k}^n x_i^2 \leq 1, k = 1, 2, \dots, n$$



Метод сопряженных субградиентов



Задача проекции

Поиск элемента с минимальной евклидовой нормой:

$$\min \|x\|^2, \quad x \in X$$

Из прагматических соображений ограничимся линейным выпуклым случаем:

- Политоп (внутреннее представление X):

$$X = \text{co}\{\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^m\}$$

- Полиэдр (внешнее представление X):

$$X = \{x : Ax \leq b\}$$

Проблема вырождения

Сведение внутреннего представления к внешнему:

$$\min_{x \in X = \text{co}\{\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^m\}} \|x\|^2 \rightarrow \min_{x = Xu, u \in \Delta_m} \|x\|^2 \rightarrow$$

$$\min_{u \in \Delta_m} uHu$$

где X — матрица, составленная из векторов $\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^m$, матрица $H = X'X$. Последняя задача вырождена при $m > \dim(x) + 1$.

Аналогично, свести внешнее представление к внутреннему весьма проблематично.

Метод аффинных подпространств

Метод оперирует базисами $I_k \subset \{1, 2, \dots, m\}$, $|I_k| \leq \dim(x)$. Базисы удовлетворяют условию

$$\min_{x \in \text{co}\{\hat{x}^i, i \in I_k\}} \|x\|^2 = \min_{x \in \text{aff}\{\hat{x}^i, i \in I_k\}} \|x\|^2 = \|x^*\|^2.$$

Итерация алгоритма:

- ❶ Определить $\min X'x^* = \delta_k = \hat{x}^j x^*$. Если $\delta_k \geq \|x^*\|^2$ — стоп.
- ❷ Присоединить j к базису: $I_{k+1} = \{I_k, j\}$. Решить задачу

$$\min_{x \in \text{aff}\{\hat{x}^i, i \in I_{k+1}\}} \|x\|^2 = \|x^*\|^2 = \left\| \sum_{i \in I_{k+1}} w_i x^i \right\|^2.$$

- ❸ Удалить из базиса I_{k+1} те вектора $\hat{x}^i$, у которых $w_i < 0$.
- ❹ $k \rightarrow k + 1$, повторить итерацию.

Численные эксперименты

Test	dim	nvec	Iterations	Time(sec)	CPU frq	Version
cake	850	980	1289/440	38.6	Intel 1.6 GHz	1.25
				76.2	AMD 1.0 GHz	1.25
	1000	770	783/14	11.3	Intel 1.6 GHz	1.26
	3000	2000	2013/14	184.6	Intel 1.6 GHz	1.26
	2000	3000	4388/2390	984.3	Intel 1.6 GHz	1.26
X135	2000	2000	2179/189	368.2	Intel 1.6 GHz	1.28
	2000	2000	2179/189	199.6	Intel 1.6 GHz	2.17

Все это хорошо, но как насчет $10^5 \times 10^8$?

В запасе:

- Декомпозиция-параллелизация
- Разреженность, сверхразреженность

Декомпозиция

Допустимое множество в задаче проекции:

$$X = \text{co}\{\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^m\} = \text{co}\{X_1, X_2, \dots, X_M\}$$

где $X^k = \text{co}\{\hat{x}^i, i \in J_k\}$, множества $J_k, k = 1, 2, \dots, M$ в совокупности покрывают $1, 2, \dots, m$.

Проекция на X сводится к последовательности задач

$$\min_{x \in \text{co}\{X_k, z\}} \|x\|^2 = \|x^k\|^2, k = 1, 2, \dots, M$$

и координирующей задачи

$$\min_{x \in \text{co}\{x^k, z, k = 1, 2, \dots, M\}} \|x\|^2 = \|z\|^2$$

Разбиение на J_k может быть практически произвольным.

Разреженность

Решение отдельной проективной задачи

$$\min_{x \in \text{co}\{X_k, z\}} \|x\|^2 = \min_{\substack{x = X' u + \gamma z \\ u \in \Delta_{|J_k|+1}}} \|x\|^2$$

сильно упрощается, если $X_k X'_k = \text{diag}(d^k)$. Особо это полезно для ЛП большой размерности.

Связь с ЛП

Задача ЛП:

$$\min_{Ax \leq b} cx \Rightarrow \min_{Ax \leq b} \|x - (x^0 - \theta c)\|^2 \Rightarrow \min_{Ay \leq b'} \|y\|^2$$

В свою очередь

$$\min_{Ay \leq b'} \|y\|^2 \Rightarrow \min_{\bar{y} \in \text{Co}\{\bar{A}_i, i = 1, 2, \dots, m\}} \|\bar{y} - a^0\|^2$$

где $a^0 = (0, 0, \dots, 0, 1)$, $\bar{A}_i$ — строки матрицы $\bar{A} = [A : -b']$.
 $\bar{A}$ — разреженная матрица и ее строки могут быть эффективно поделены на структурно-ортогональные блоки.

Связь с теорией графов

Сопоставим матрице A граф $G = (V, E)$, где вершины V — строки A , а $E \subset V \times V$ — ребра.

Ребро $(v_i, v_j) \in E$ тогда и только тогда, когда существует k такое, что $a_{ik} \neq 0$ и $a_{jk} \neq 0$.

Если $V' \subset V$ — независимое подмножество V , то $\{A_v, v \in V'\}$ — структурно-ортогональный блок.

Проблема: Найти способ разбиения V на минимальное число независимых множеств.

- Граф (V, E) большой: $|V| \sim 10^5 - 10^6, |E| \sim 10^8$.
- + Граф (V, E) разреженный.

Полезные ссылки: webpage <http://elis.dvo.ru/~nurmi>

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ