

Календарное планирование проектов

Владимир Сервах

Омский Филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Истоки

В 1958 году ВМС США заказал корпорации "Локхид" создание ракетной системы "Полярис" для атомных подводных лодок.

Корпорацией "Локхид" совместно с консалтинговой фирмой "Буз, Ален и Гамильтон" была разработана технология PERT (Project Evaluation and Review Technique).

Внедрение PERT позволило проект, который состоял из 60 тысяч работ, закончить на два года раньше запланированного срока.

Fazar W. *The Origin of PERT* // The controller, 1962. – P.598-621.

Истоки

В это же время Джеймс Келли и Морган Уолкер в процессе планирования работ по модернизации заводов фирмы "Дюпон" внедряют метод критического пути CPM (Critical Path Method) элементы которого были придуманы еще во времена Манхэттенского проекта.

Kelley J.E. *Critical-Path Planning and Scheduling: Mathematical Basis* // Operations Res., 1961. – V.9. – P.296-320.

Kelley J.E., Walker M.R. *Critical Path Planning and Scheduling: An Introduction*. Mauchly Associates, Ambler, PA, 1959.

Зуховицкий С.И., Радчик И.А. *Математические методы сетевого планирования*. М.: Наука, 1965.

Задача сетевого планирования и управления

$V = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество работ проекта;

E – частичный порядок выполнения работ.

p_j – длительность работы $j \in V$.

s_j – начало выполнения работы $j \in V$;

Требуется составить расписание $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, при котором сохраняется частичный порядок выполнения работ

$$s_i + p_i \leq s_j, \quad (i, j) \in E;$$

и общий срок выполнения всего проекта будет минимальным

$$\max_{j \in V} (s_j + p_j) \rightarrow \min .$$

Задача полиномиально разрешима.

Программные комплексы для работы с проектами

Microsoft Project

SureTrak

Project Manager

Time Line

TurboProject

Project Scheduler

Проект

Проектом называют множество взаимосвязанных работ, направленных на достижение некоторой цели.

Цели проекта (Scope Planing)

Работы проекта (Activity)

Взаимосвязи работ (Activity Sequencing)

Длительности работ (Activity Duration Estimating)

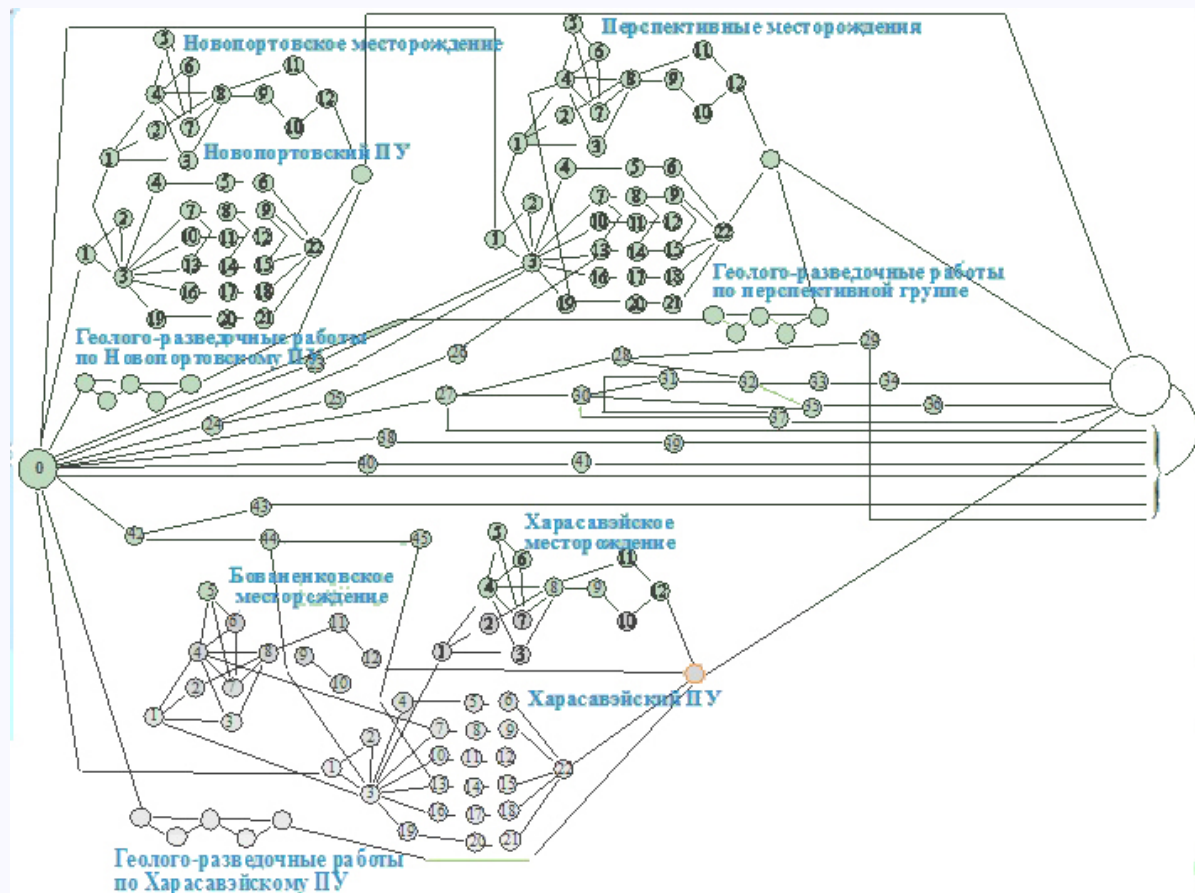
Планирование ресурсов (Resource Planning)

Составление расписания (Scheduling)

Календарное планирование проектов



Календарное планирование проектов



Ресурсы

Возобновимые ресурсы – техника, оборудование, производственные помещения, трудовые ресурсы и т.д. Ресурс при использовании не тратится. Однако, неиспользованный объем ресурса невозможно использовать позднее.

Невозобновимым или складировуемые ресурсы – сырье, расходные материалы, деньги и так далее. Неиспользованный в некотором временном интервале складировуемый ресурс не пропадает, и его можно использовать при дальнейшем выполнении проекта.

Задача календарного планирования проектов с ограниченными ресурсами

$V = \{1, 2, \dots, N\}$ – множество работ проекта;

K^r – множество возобновимых ресурсов;

K^a – множество складироваемых ресурсов;

Имеем $Q^k(t)$ единиц ресурса вида $k \in K^r \cup K^a$;

$p_i \in \mathbb{Z}^+$ – длительность работы $i \in V$;

$q_i^k(\tau)$ – потребность работы $i \in V$ в ресурсе вида k в интервале $[\tau - 1, \tau)$ $\tau = 1, \dots, p_i$;

$d_i \in \mathbb{Z}^+$ – директивный срок завершения выполнения работы $i \in V$.

E – частичный порядок выполнения работ.

Работы выполняются непрерывно.

Модель задачи

$S = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ – расписание выполнения работ проекта;

Соблюдается последовательность выполнения работ:

$$s_i + p_i \leq s_j, \quad (i, j) \in E;$$

Выполняются ограничения на ресурсы складываемого типа:

$$\sum_{t'=1}^t \sum_{i \in N_{t'}} q_i^k(t' - s_i) \leq \sum_{t'=1}^t Q^k(t'), \quad k \in K^a; \quad t \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\};$$

Выполняются ограничения на ресурсы возобновимого типа:

$$\sum_{i \in N_t} q_i^k(t - s_i) \leq Q^k(t), \quad k \in K^r, \quad t \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\};$$

Работы завершаются к директивному сроку:

$$s_i + p_i \leq d_i, \quad i \in V.$$

Критерии

Общий срок выполнения всего проекта:

$$C_{\max} = \max_{i \in V} C_i \rightarrow \min$$

Средневзвешенное время завершения всех работ проекта:

$$\sum w_i C_i = \sum_{i \in V} w_i C_i \rightarrow \min$$

Суммарный взвешенный штраф за нарушение директивных сроков:

$$\sum w_i T_i = \sum_{i \in V} w_i \cdot \max\{0, C_i - d_i\} \rightarrow \min$$

Среднее число невыполненных в срок работ:

$$\sum w_i U_i = \sum_{i \in V} w_i \cdot \text{sign}(\max\{0, C_i - d_i\}) \rightarrow \min$$

Сложность задачи

Задача с возобновимыми ресурсами и критерием общего времени завершения работ. NP-трудная в сильном смысле.

Ullman J.D. *NP-complete scheduling problems* // J.Comput. System Sci. – 1975. V. 10. – P. 384-393.

Задача со складываемыми ресурсами и критерием $C_{\max}$ полиномиально разрешима.

Гимади Э.Х., Залюбовский В.В., Севастьянов С.В. *Полиномиальная разрешимость задач календарного планирования со складываемыми ресурсами и директивными сроками* // Дискретный анализ и исследование операций. – 2000. – Сер. 2. – Т. 7, N. 1. – С. 9-34.

Задача календарного планирования проектов со складываемыми ресурсами и критерием среднего времени завершения работ является **NP**-трудной в сильном смысле, даже в случае работ единичной длительности.

Задачи максимизации прибыли при планирования проектов

1. Цель – максимальная прибыль
2. Единственный ресурс – деньги
3. Дисконтирование
4. Реинвестирование поступлений
5. Возможность использования кредитов
6. Риски

Задачи максимизации прибыли

$V = \{1, 2, \dots, N\}$ - множество работ проекта;

$K(t)$ - наличие капитала в момент времени t ;

$p_j \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$ - длительность работы $j \in V$;

$k_j(\tau)$ - вложения в работу j в момент времени τ ($\tau = 0, 1, \dots, p_j$);

$c_j(\tau)$ - поступления от работы j в момент времени τ .

Частичный порядок выполнения работ задан графом $G = (V, E)$;

r_0 - процентная ставка альтернативного безрискового размещения капитала.

Задачи максимизации прибыли

$NPV_j = \sum_{\tau=0}^{p_j} \frac{c(\tau) - k(\tau)}{(1+r_0)^\tau}$ – прибыль работы $j \in V$ приведенная к началу ее выполнения.

$$s_i + p_i \leq s_j, \quad (i, j) \in E;$$

$$\sum_{t=1}^{t^*} \sum_{j \in N_t} k_j(t - s_j) \leq \sum_{t=1}^{t^*} K(t) + \sum_{t=1}^{t^*} \sum_{j \in N_t} c_j(t - s_j), \quad t^* = 1, 2, \dots, T$$

$$NPV(S) = \sum_{j \in V} \frac{NPV_j}{(1 + r_0)^{s_j}} \rightarrow \max.$$

Задача календарного планирования проектов с критерием максимизации чистой приведенной прибыли NP-трудна в сильном смысле.

Модель задачи при возможности использования кредитов

$$s_i + p_i \leq s_j, \quad (i, j) \in E;$$

$$\sum_{t=1}^{t^*} \left(K(t) + \sum_{j \in N_t} (c_j(t - s_j) - k_j(t - s_j)) + D(t) - (1 + r)D(t - 1) \right) \geq 0,$$

где $t^* = 1, 2, \dots$, r – ставка по кредиту, $D(t)$ – общий размер кредитов в год t ,

$$NPV(S) = \sum_{j \in V} \frac{NPV_j}{(1 + r_0)^{s_j}} + \sum_{t=1}^T \frac{D(t) - (1 + r)D(t - 1)}{(1 + r_0)^{t-1}} \rightarrow \max.$$

Сложность задачи календарного планирования при возможности использования кредитов не известна.

Риски проектов

	USA	СССР
май 1960		корабль выходит на нерасчетную орбиту
июль 1960	взрыв после старта	авария вскоре после пуска
август 1960		корабль приземлился, но сбой в системе ориентации
ноябрь 1960	корабль не отделился от носителя	
ноябрь 1960	пожар на пусковом столе	спуск в нерасчетном районе
декабрь 1960		авария в начале полета последней ступени
январь 1961	трагический полет Хэма	
9 и 25 марта 1961		успешные полеты "Востока"
12 апреля 1961		полет Юрия Гагарина
5 мая 1961	полет Алана Шепарда	

Риски проектов

$$\sum_{t=1}^{t^*} \left(K(t) + \sum_{j \in N_t} (c_j(t - s_j) - k_j(t - s_j)) \right) \geq 0.$$

Поступления от выполнения работ $c_j(\tau)$ случайные величины с известными дискретными распределениями.

Расписание S будем оценивать по следующим параметрам:

$P(S)$ – вероятность, что ограничения по ресурсам в некоторый момент времени будут нарушены;

$NPV(S)$ – математическое ожидание чистой приведенной прибыли проекта;

$D(S)$ – дисперсия прибыли проекта.

Под надежностью расписания будем понимать вероятность получения дохода заданного уровня.

Расчет параметров заданного расписания

Шаг 1. Строим распределение общего потока платежей расписания S с учетом заданных распределений случайных величин $c_j(\tau)$.

Шаг 2. Нарастающим итогом, учитывая имеющиеся финансовые ресурсы, строим распределение остатка ресурса в каждый момент времени. Для перехода к следующему моменту времени учитываем только неотрицательные элементы этого распределения.

Шаг 3. Суммируя частоты появления каждого из отрицательных значений в распределении остатков ресурса, получаем вероятность $P(S)$, что при заданных капиталовложениях расписание S реализовано не будет.

Шаг 4. Вычисляем математическое ожидание дисконтированной прибыли $NPV(S)$ и ее дисперсию $D(S)$. Из построенного распределения прибыли можно вычислить и вероятность получения дохода заданного уровня.