

Современные методы решения задач оптимизации со скрытыми невыпуклыми структурами

А.С. Стрекаловский

ФГБУН Институт динамики систем и теории управления
Сибирского отделения
Российской академии наук

e-mail: strekal@icc.ru

Молодежная научная школа
«Дискретные модели и методы принятия решений»

21–23 июня 2013 г.



*„В мире не происходит ничего,
в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или
минимума“*

Первый русский математик,
первый русский академик

*„По Лейбницу наш мир является наилучшим из всех возможных
миров, и поэтому законы можно описать экстремальными
принципами“*

Карл Зигель

*„Оптимизировать все, что оптимизируется, а что не
оптимизируется, сделать оптимизируемым.“*

Я.З. Цыпкин,
действительный член Академии наук СССР



- 1 Примеры задач оптимизации со скрытой невыпуклостью
 - Линейная задача дополнительности
 - Биматричные игры
 - Двухуровневые задачи оптимизации
 - Задачи финансовой и медицинской диагностики
- 2 Теория глобального поиска
 - Пространство функций А.Д. Александрова
 - Постановка задачи
 - Классификация невыпуклых задач
 - Локальный поиск
 - Условия глобальной оптимальности
 - Основные этапы глобального поиска
- 3 Линейная задача дополнительности
- 4 Биматричные игры
- 5 Поиск оптимистических решений в квадратично-линейных двухуровневых задачах



Постановка задачи

Найти x, w :

$$\left. \begin{aligned} Mx + q &= w, \\ \langle x, w \rangle &= 0, \\ x \geq 0, \quad w &\geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (LCP)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle x, Mx + q \rangle &= 0, \\ x \geq 0, \quad Mx + q &\geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (LCP')$$

где $x, w, q \in \mathbb{R}^n$, и M — $(n \times n)$ -матрица, не являющаяся знакоопределенной.

Задача оптимизации

$$F(x) = \langle x, Mx + q \rangle \downarrow \min, \quad x \in S, \quad (LCP'')$$

$$S \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, \quad Mx + q \geq 0\}.$$



Ситуации равновесия по Нэшу в биматричной игре $\Gamma(A, B)$:

$$(x^*, y^*) \in S_m \times S_n, \quad S_p = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^p \mid \sum_{i=1}^p x_i = 1 \right\},$$

$$\langle x^*, Ay^* \rangle \geq \langle x, Ay^* \rangle \quad \forall x \in S_m, \quad \langle x^*, By^* \rangle \geq \langle x^*, By \rangle \quad \forall y \in S_n.$$

Теорема (Милс, 1960)

Ситуация (x^*, y^*) является ситуацией равновесия по Нэшу в биматричной игре $\Gamma(A, B)$ в том и только в том случае, когда она входит в некоторое глобальное решение $(x^*, y^*, \alpha_*, \beta_*) \in \mathbb{R}^{m+n+2}$ следующей задачи математического программирования:

$$\begin{aligned} F(x, y, \alpha, \beta) &\triangleq \langle x, (A + B)y \rangle - \alpha - \beta \uparrow \max, \\ (x, y, \alpha, \beta) &\in X \times Y, \end{aligned} \quad (PBM)$$

где $X = \{(x, \beta) \in S_m \times \mathbb{R} \mid x^T B \leq \beta e_n\}$, $Y = \{(y, \alpha) \in S_n \times \mathbb{R} \mid Ay \leq \alpha e_m\}$, $e_p = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^p$, $p = m, n$.

При этом величины α_* , β_* являются выигрышами первого и второго игроков в игре $\Gamma(A, B)$ соответственно: $\langle x^*, Ay^* \rangle = \alpha_*$, $\langle x^*, By^* \rangle = \beta_*$, а оптимальное значение целевой функции задачи (PBM) равно нулю:

$$F(x^*, y^*, \alpha_*, \beta_*) = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) \downarrow \min_x, \\ x \in X, y \in Y_*(x) \triangleq \operatorname{Arg} \min_y \{g(x, y) \mid y \in Y(x)\}. \end{array} \right\} \quad (\mathcal{BP})$$

Задача поиска оптимистического решения

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) \downarrow \min_{x,y}, \\ x \in X, y \in Y_*(x) \triangleq \operatorname{Arg} \min_y \{g(x, y) \mid y \in Y(x)\}. \end{array} \right\} \quad (\mathcal{BP}_o)$$

Задача поиска гарантированного решения

$$\left. \begin{array}{l} W(x, \varepsilon) \triangleq \sup_y \{f(x, y) \mid y \in Y_*(x)\} \downarrow \min_x, \\ x \in X, y \in Y_*(x) \triangleq \operatorname{Arg} \min_y \{g(x, y) \mid y \in Y(x)\}. \end{array} \right\} \quad (\mathcal{BP}_g)$$



Постановка задачи

$$\left. \begin{aligned}
 f(x, y) &\triangleq \langle c, x \rangle + \langle d, y \rangle \downarrow \min_{x, y}, \\
 (BP) \quad x &\in X \triangleq \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax \leq b\}, \\
 y &\in Y_*(x) \triangleq \operatorname{Arg} \min_y \left\{ \langle d^1, y \rangle \mid y \in Y(x) \triangleq \{y \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x + B_1 y \leq b^1\} \right\}
 \end{aligned} \right\}$$

$A_{(p \times m)}$, $A_{1(q \times m)}$, $B_{1(q \times n)}$ — матрицы; $c \in \mathbb{R}^m$, $d, d^1 \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^p$, $b^1 \in \mathbb{R}^q$.

(H1) : Функция $f(x, y)$ ограничена снизу на непустом множестве

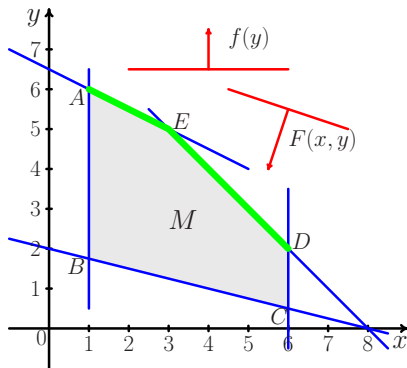
$$Z \triangleq \{x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, A_1 x + B_1 y \leq b^1\}.$$

(H2) : Функция $\langle d^1, y \rangle$ ограничена снизу на множестве $Y(x)$ для любых $x \in X$.



$$\begin{cases} F(x, y) = x + 3y \downarrow \min_{x, y}, \\ 1 \leq x \leq 6, \quad y \in Y_*(x) = \text{Sol}(\mathcal{P}_L), \end{cases}$$

$$(\mathcal{P}_L) \begin{cases} f(y) = -y \downarrow \min_y, \\ x + y \leq 8, \\ x + 4y \geq 8, \\ x + 2y \leq 13. \end{cases}$$



Подобные задачи весьма распространены в приложениях и часто трактуются как задачи обобщенной отделимости. Например, если два множества точек $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ характеризуются матрицами $\mathcal{A} = [a^1, \dots, a^M]$, $\mathcal{B} = [b^1, \dots, b^N]$, $a^j, b^j \in \mathbb{R}^n$, то задачу о полиэдральной отделимости можно свести к минимизации невыпуклой недифференцируемой функции ошибки

$$F(V, \Gamma) = F_1(V, \Gamma) + F_2(V, \Gamma), \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1(V, \Gamma) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max\{0, \max_{1 \leq p \leq P} (\langle a^i, v^p \rangle - \gamma_p + 1)\}, \\ F_2(V, \Gamma) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \max\{0, \min_{1 \leq p \leq P} (-\langle b^j, v^p \rangle + \gamma_p + 1)\}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

A.S. Strekalovsky, A.V.Orlov, *A new approach to nonconvex optimization* // Numerical Methods and Programming, V.8, P.160-176, 2007.
(<http://num-meth.srcc.msu.su/english/index.html>)



Теория глобального поиска



Определение

Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ является выпуклым. Тогда $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ является d.c. функцией на X , если

$$\exists g, h \in \text{Conv}(X): \quad f(x) = g(x) - h(x) \quad x \in X.$$

$DC(X)$ — линейное пространство d.c. функций на X .

$\text{Conv}(X)$ — выпуклый конус выпуклых функций на X .

1) $DC(X) = \text{lin}(\text{Conv}(X))$.

$$\begin{cases} \mathcal{K}(X) \text{ — выпуклый конус функций} \\ \text{Conv}(X) \subset \mathcal{K}(X) \subset DC(X), \\ \mathcal{K}(X) - \mathcal{K}(X) = DC(X). \end{cases}$$

2) $C^2(\Omega) \subset DC(\Omega)$, где Ω — открытое выпуклое множество.

3) $\text{cl}(DC(X)) = C(X)$, если X — выпуклый компакт.

4) $DC(X)$ является замкнутым относительно операций:

$$\sum_1^m \lambda_i f_i(x); \quad \max_i f_i(x); \quad \min_i f_i(x); \quad |f(x)|; \quad \prod_1^n f_i(x);$$

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\}; \quad f^-(x) = \min\{0, f(x)\}.$$



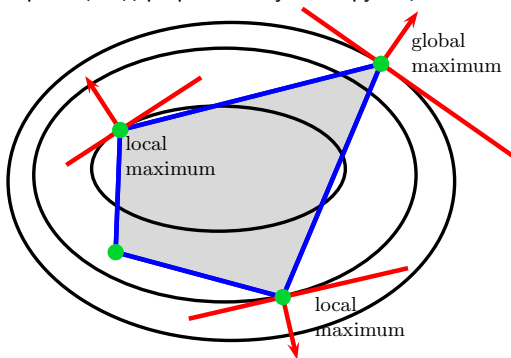
$$\begin{cases} f_0(x) = g_0(x) - h_0(x) \downarrow \min, & x \in S, \\ f_i(x) = g_i(x) - h_i(x) \leq 0, & i \in I = \{1, \dots, m\}. \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

$$g_i, h_i \in \text{CONVEX}(\mathbb{R}^n), \quad i \in \{0, 1, \dots, m\},$$

$S \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое выпуклое множество.



- 1 Линеаризация по базовой невыпуклости исследуемой задачи и, как следствие, редукция исходной системы к семейству (частично) линеаризованных задач.
- 2 Повсеместное применение методов выпуклой оптимизации для решения линеаризованных задач и, как следствие, „внутри“ локального поиска.
- 3 Построение „хороших“ аппроксимаций (разрешающих наборов) поверхности уровня или границ надграфика выпуклой функции.



- 1 Неприменение НАПРЯМУЮ методов выпуклой оптимизации.
- 2 Четкая классификация рассматриваемой задачи.
- 3 Использование специальных (для рассматриваемого класса задач) методов локального поиска, или специальных (для конкретной задачи) методов.
- 4 Использование стратегий глобального поиска, специализированных для класса задач, в которой попадает изучаемая задача.
- 5 Для построения аппроксимаций поверхностей уровня использование опыта решения подобных невыпуклых задач оптимизации.
- 6 Повсеместное использование методов выпуклой оптимизации для решения линеаризованных задач и в специальных методах локального поиска.



- ❶ Специальные методы локального поиска. Теоремы сходимости.
- ❷ Условия глобальной оптимальности (УГО).
- ❸ Алгоритмы глобального поиска.
- ❹ Теоремы сходимости алгоритмов глобального поиска.
- ❺ Численное тестирование.

Стрекаловский А.С. *Элементы невыпуклой оптимизации.* — Новосибирск: Наука, 2003.



Постановка задачи

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{i=1}^n \ln(1+x_i) \downarrow \min, \\ x \in \Pi &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid -\frac{1}{2} \leq x_i \leq 3\} \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Очевидно, что точка $z = (-\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2})^T$ является решением задачи.
Рассмотрим точку $x^k = (0, \dots, 0)^T$.

$$\nabla f(x) = \left(\frac{1}{1+x_1}, \dots, \frac{1}{1+x_n} \right)^T, \quad \nabla f(x^k) = (1, \dots, 1)^T,$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(1+x_1)^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\frac{1}{(1+x_n)^2} \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 f(x^k) = \begin{bmatrix} -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}.$$

Вспомогательная задача метода Ньютона

$$\Phi(d) = \sum_{i=1}^n d_i - \sum_{i=1}^n d_i^2 \downarrow \min, \quad d \in \Pi = (\Pi - x^k)$$

имеет решение $d = (3, \dots, 3)^T$, которое является направлением в наихудшую точку $x = (3, \dots, 3)^T$.



Пусть $f_0, g, h \in \text{CONVEX}(\mathbb{R}^n)$.

D.C. минимизация

$$g(x) - h(x) \downarrow \min, \quad x \in D. \quad (DC)$$

Задача с d.c. ограничением

$$\left. \begin{array}{l} f_0(x) \downarrow \min, \quad x \in S, \\ g(x) - h(x) \leq 0. \end{array} \right\} \quad (DCC)$$

Замечания:

- i) Если $g \equiv 0$ in (DC) , то (DC) — задача выпуклой максимизации;
- ii) Если $g \equiv 0$ in (DCC) , то (DCC) — обратно-выпуклая задача.



Постановка задачи

$$f(x) = g(x) - h(x) \downarrow \min, \quad x \in D. \quad (DC)$$

Базовый элемент («кирпич») метода локального поиска — решение (линеаризованной в текущей допустимой точке $x^s \in D$) выпуклой задачи

$$J_s(x) = g(x) - \langle h'_s, x \rangle \downarrow \min, \quad x \in D, \quad (\mathcal{PL}_s)$$

where $h'_s = h'(x^s) \in \partial h(x^s)$.

Следующая точка $x^{s+1} \in D$ строится как (приближенное) решение задачи $(\mathcal{PL}_s)$.



- Доказательства сходимости алгоритмов являются не просто формальным обоснованием.
- Они содержат нечто большее — анализ причин сходимости и тех фактов, которые этому могут препятствовать.
- И знание этих фактов может служить основой анализа тех случаев, когда алгоритм не приводит к успешному решению задачи.

Б.Н. Пшеничный



Теорема 1

Пусть $f = g - h$ ограничена снизу на D , а функция $h(\cdot)$ является выпуклой на D .

Тогда последовательность $\{x^s\}$, генерируемая по правилу

$$g(x^{s+1}) - \langle h'(x^s), x^{s+1} \rangle \leq \inf_x \{g(x) - \langle h'(x^s), x \rangle \mid x \in D\} + \delta_s, \quad (4)$$

удовлетворяет следующему условию:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [\mathcal{V}(PL_s) - J_s(x^{s+1})] = 0. \quad (5)$$

При этом любая предельная точка x_* последовательности $\{x^s\}$ является решением задачи

$$J_*(x) = g(x) - \langle h'(x_*), x \rangle \downarrow \min, \quad x \in D, \quad (\mathcal{PL}(x_*))$$

где $h'(x_*) \in \partial h(x_*)$.

Если $h(\cdot)$ — сильно выпуклая функция, то $x^s \rightarrow x_* \in D$. Кроме того,

$$\|x^s - x^{s+1}\|^2 \leq \frac{2}{\mu} (f(x^s) - f(x^{s+1}) + \delta_s),$$

где $\mu > 0$ является константой сильной выпуклости функции $h(\cdot)$.



Пример 1. Специальный метод локального поиска для задачи d.c. минимизации

Постановка задачи

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{i=1}^n \ln(1+x_i) \downarrow \min_x, \\ x \in \Pi &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid -\frac{1}{2} \leq x_i \leq 3\} \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Решением задачи $(\mathcal{P})$ является точка $z = (z_i = -\frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n)$.

$$f(x) = g(x) - h(x), \quad g \equiv 0.$$

$$\nabla f(x) = -\nabla h(x) = \left(\frac{1}{1+x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \right), \quad x^0 \in \Pi.$$

$$(\mathcal{P}L_s): \quad \langle \nabla f(x^0), x \rangle = -\langle \nabla h(x^0), x \rangle \downarrow \min, \quad x \in \Pi.$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1+x_i^0} \cdot x_i \right) \downarrow \min, \quad -\frac{1}{2} \leq x_i \leq 3, \quad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно,

$$x^1 = z \triangleq \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2} \right) \in \text{Sol}(\mathcal{P}).$$



Общая процедура глобального поиска состоит из двух частей:

- а) локального поиска;
- б) процедуры выхода из критической точки, основанной на условиях глобальной оптимальности (УГО), с последующим включением локального поиска.

$$f(x) = g(x) - h(x) \downarrow \min, \quad x \in D. \quad (DC)$$

Теорема 2. (Условия глобальной оптимальности)

Пусть допустимая точка $z \in D$ является глобальным решением задачи (DC) ($z \in \text{Sol}(DC)$). Тогда

$$(\mathcal{E}): \quad \begin{aligned} \forall(y, \beta): \quad & y \in D, \quad \beta - h(y) = \zeta \triangleq g(z) - h(z), \\ & g(y) \leq \beta \leq \sup(g, D), \\ & g(x) - \beta \geq \langle h'(y), x - y \rangle, \quad \forall x \in D, \end{aligned} \quad (6)$$

где $h'(y) \in \partial h(y)$.

Если, кроме того, выполнено условие

$$(\mathcal{H}): \quad \exists v \in D: \quad g(v) - h(v) > \zeta, \quad (7)$$

то условие (E) становится и достаточным для того, чтобы допустимая точка z была глобальным решением задачи (DC).



Предположим, что тройка $(\hat{y}, \hat{\beta}, \hat{x})$ такая, что $h(\hat{y}) = \hat{\beta} - \zeta$, $\zeta := f(z)$ и $\hat{x} \in D$, нарушает условие глобальной оптимальности $(\mathcal{E})$, т.е.

$$g(\hat{x}) < \hat{\beta} + \langle h'(\hat{y}), \hat{x} - \hat{y} \rangle,$$

Тогда из выпуклости $h(\cdot)$ следует, что

$$f(\hat{x}) = g(\hat{x}) - h(\hat{x}) < h(\hat{y}) + \zeta - h(\hat{y}) = f(z)$$

или $f(\hat{x}) < f(z)$. Следовательно, точка $\hat{x} \in D$ является „лучше“ чем z . Таким образом, перебирая „параметры возмущения“ (y, β) в $(\mathcal{E})$ и решая линейаризованные задачи (см. УГО)

$$g(x) - \langle h'(y), x \rangle \downarrow \min, \quad x \in D, \quad (8)$$

мы получаем семейство начальных точек $x(y, \beta)$ для методов локального поиска.



$$g(x) - h(x) \downarrow \min, \quad x \in D. \quad (DC)$$

1) Найти критическую точку z , используя специальный алгоритм локального поиска, $\zeta \triangleq g(z) - h(z)$.

2) Выбрать число $\beta \in [\beta_-, \beta_+]$, $\beta_- = \inf(g, D)$, $\beta_+ = \sup(g, D)$.

3) Построить аппроксимацию

$$A(\beta) = \{v^1, \dots, v^N \mid h(v^i) = \beta - \zeta, \quad i = 1, \dots, N, \quad N = N(\beta)\},$$

поверхности уровня функции $h(\cdot)$.

4) Стартуя с каждой точки v^i аппроксимации $A(\beta)$, специальным алгоритмом локального поиска найти точку u^i .

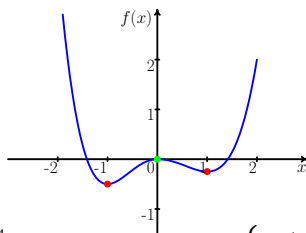
5) Проверить выполнение неравенства из УГО:

$$g(u^i) - \beta \geq \langle h'(v^i), u^i - v^i \rangle \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

$$(w^i \mapsto v^i)$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2, & x \geq 0, \\ \frac{1}{2}x^4 - x^2, & x \leq 0. \end{cases} \quad (9)$$



$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = \frac{1}{4}x^4, & x \geq 0, \\ g_2(x) = \frac{1}{2}x^4, & x \leq 0; \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} h_1(x) = \frac{1}{2}x^2, & x \geq 0, \\ h_2(x) = x^2, & x \leq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Условия глобальной оптимальности

$$(\mathcal{E}): \quad \left. \begin{aligned} \forall(y, \beta): \quad & y \in D, \quad \beta - h(y) = \zeta \triangleq g(z) - h(z), \\ & g(y) \leq \beta \leq \sup(g, D), \end{aligned} \right\}$$

$$(VI): \quad \left. \begin{aligned} & g(x) - \beta \geq \langle \nabla h(y), x - y \rangle, \quad \forall x \in D, \end{aligned} \right\}$$



Насколько эффективен метод локального поиска?

$$s = 0$$

$$x_0 = 100, \quad \nabla h(x_0) = x_0 = 100$$

$$(\mathcal{PL}_0): \quad \varphi_0(x) = g(x) - \langle \nabla h(x_0), x \rangle = \frac{1}{4}x^4 - 100x \downarrow \min_x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\nabla \varphi_0(x) = x^3 - 100 = 0, \quad 4^3 = 64, \quad 5^3 = 125, \quad x_1 \approx 4,5$$

$$(\mathcal{PL}_1): \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4,5x \downarrow \min_x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$s = 1$$

$$\nabla \varphi_1(x) = x^3 - 4,5 = 0 \Rightarrow x_2 = 1,7,$$

$$(\mathcal{PL}_2): \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{4}x^4 - 1,7x \downarrow \min_x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$s = 2$$

$$\nabla \varphi_2(x) = x^3 - 1,7 = 0 \Rightarrow x_3 = 1,2$$

$$x_s \rightarrow 1 \in \text{Sol}(\mathcal{P}).$$



Шаг 1. $x^0 = 100 \mapsto z^1 = 1, \zeta_1 = f(z^1) = -\frac{1}{4}$.

Шаг 2. $\beta_0 = g(z^k) = g(z^1) = g_1(1) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$.

Шаг 3. Строим аппроксимацию

$$\mathcal{A}_k = \{y_1, y_2, \dots, y_N \mid h(y_i) = \beta_0 - \zeta_1 = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\}.$$

$i = 1$. $h_1(y_1) \triangleq \frac{1}{2}y_1^2 = \frac{1}{2}, y_1^2 = 1, y_1 = 1$ (т.к. $y_1 \geq 0$).

Шаг 4.
$$g(x) - \langle \nabla h(y_i), x \rangle \downarrow \min_x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\mathcal{PL}_i)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{4}x^4 - \langle \nabla h(y_1), x \rangle = \frac{1}{4}x^4 - 1 \cdot x \downarrow \min_x,$$

$$\nabla \varphi_1(x) = x^3 - 1 = 0, \quad \bar{x}_1 = 1.$$

Шаг 5. (Проверка VI). $g(\bar{x}_1) - \beta_0 \stackrel{?}{\geq} \langle \nabla h(y_1), \bar{x}_1 - y_1 \rangle$,

$\frac{1}{4}\bar{x}_1^4 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \geq \langle 1, 1 - 1 \rangle = 0$. Нарушения VI нет! Переходим на шаг 3.

$i = 2$. $h_2(y) = y^2 = \frac{1}{2}, y < 0, y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Шаг 4.
$$\varphi_2(x) = g(x) - \langle \nabla h_2(y_2), x \rangle = \frac{1}{2}x^4 - \langle 2y_2, x \rangle = \frac{1}{2}x^4 - \sqrt{2} \cdot x \downarrow \min_x, \quad (\mathcal{PL}_2)$$

$$\nabla \varphi_2(x) = 2x^3 + \sqrt{2} = 0, \quad \bar{x}_2 = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$



Шаг 5. (Проверка VI). $\nabla h_2(x) = 2x$

$$g_2(\bar{x}_2) - \beta_0 \geq \langle \nabla h_2(y_2), \bar{x}_2 - y_2 \rangle$$

$$\frac{1}{2}\bar{x}_2^4 - \frac{1}{4} \geq \langle 2y_2, \bar{x}_2 - y_2 \rangle$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{4} \geq \langle -\sqrt{2}, - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle = \langle \sqrt{2}, \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle > 0$$

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2} \right] \geq \langle \sqrt{2}, \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle.$$

Нарушения нет! Меняем β .

Шаг 2. $\beta = \frac{3}{4}$.

Шаг 3. Строим аппроксимацию

$$h(y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}y^2, & y \geq 0, \\ y^2, & y < 0 \end{array} \right\} = \beta_1 - \zeta_1 = \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{4} \right) = 1.$$

$$i = 1. \quad \frac{1}{2}y_1^2 = 1, \quad y_1^2 = 2, \quad y_1 = \sqrt{2}.$$

$$i = 2. \quad y_2^2 = 1, \quad y_2 = -1 < 0,$$



Шаг 4. (Решение $(\mathcal{P}L_i)$). $y_2 = -1 < 0$.

$$g(x) - \langle \nabla h(y_i), x \rangle = \varphi_i(x) \downarrow \min_x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\mathcal{P}L_i)$$

$i = 2$.

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2(-1)x = \frac{1}{2}x^4 + 2x \downarrow \min_x$$

$$\nabla \varphi_2(x) = 2x^3 + 2 = 2(x^3 + 1) = 0, \quad x^3 = -1, \quad \bar{x}_2 = -1.$$

Шаг 5. (Проверка VI). $\bar{x}_2 = -1$.

$$g_2(\bar{x}_2) - \beta_1 \geq \langle \nabla h_2(y_2), \bar{x}_2 - y_2 \rangle$$

$$\frac{1}{2}\bar{x}_2^4 - 1 \geq \langle \nabla h_2(y_2), -1 - (-1) \rangle = 0$$

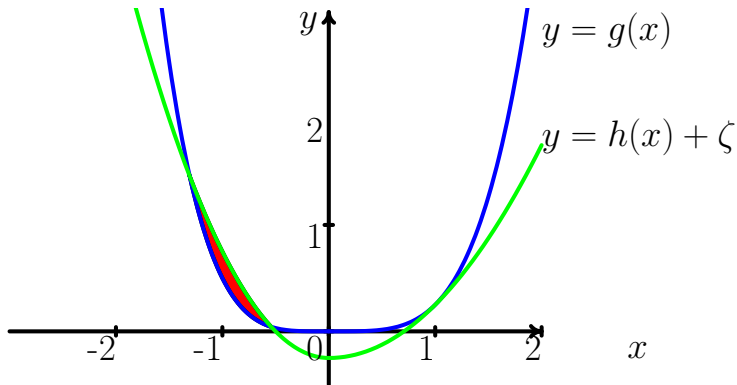
$$\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0.$$

Нарушение произошло! Переходим в точку $\bar{x}_2 = -1$,

$$\bar{x}_2 \in \text{Arg min}(f, \mathbb{R}) = \text{Sol}(\mathcal{P}).$$

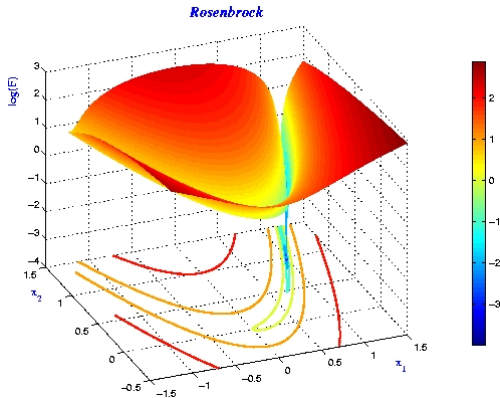


$$\operatorname{epi} g \subset \operatorname{epi} (h(\cdot) + \zeta)$$

 $(\mathcal{E}')$ 

Минимизация функции Розенброка

$$(\mathcal{P}): \quad F(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \left[(x_i - 1)^2 + N(x_{i+1} - x_i^2)^2 \right] \downarrow \min, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$



$$F(x) = G(x) - H(x), \quad (11)$$

$$G(x) = \sum_{i=1}^{n-1} [(x_i - 1)^2 + \frac{N}{2}(1 + x_{i+1})^4 + \frac{3N}{2}x_i^4 + Nx_i^2x_{i+1}^2 + Nx_i^2 + Nx_{i+1}^2],$$

$$H(x) = \frac{N}{2} \sum_{i=1}^{n-1} ((1 + x_{i+1})^2 + x_i^2)^2.$$

$$G(x) = \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i, x_{i+1}), \quad H(x) = \sum_{i=1}^{n-1} h(x_i, x_{i+1}). \quad (12)$$

Функции $G(\cdot)$ и $H(\cdot)$ являются выпуклыми.



Тестирование локального поиска на задаче минимизации функции Розенброка

n	СМЛП				BFGS метод			
	$\ z - x_*\ $	$F(z)$	It	$Time$	$\ z - x_*\ $	$F(z)$	It	$Time$
5	1.12	0.64	46	1.25	2.01	3.93	75	0.04
5	1.12	0.64	44	1.25	2.01	3.93	65	0.04
5	1.12	0.64	44	1.35	2.01	3.93	90	0.06
5	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$5.7 \cdot 10^{-5}$	56	1.30	$3.1 \cdot 10^{-5}$	$5.2 \cdot 10^{-9}$	61	0.02
10	1.22	0.81	45	1.30	1.99	3.98	67	0.55
10	1.22	0.81	44	1.30	1.99	3.98	75	0.55
10	$4.1 \cdot 10^{-4}$	$8.5 \cdot 10^{-6}$	49	1.40	1.99	3.98	71	0.50
10	0.024	0.0045	59	1.60	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$3.33 \cdot 10^{-9}$	129	0.81
50	1.31	0.76	46	7.20	1.87	4.20	85	2.85
50	1.31	0.76	48	7.35	1.87	4.20	93	2.90
50	0.0035	$1.2 \cdot 10^{-5}$	48	7.40	1.87	4.20	88	2.85
50	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-6}$	57	8.25	$1.3 \cdot 10^{-6}$	$2.6 \cdot 10^{-10}$	136	3.15
100	1.46	4.56	51	14.20	1.73	0.83	112	10.00
100	1.46	4.56	50	13.90	1.73	0.83	120	10.30
100	0.0012	$4.5 \cdot 10^{-5}$	53	15.25	1.73	0.83	115	10.00
100	$3.8 \cdot 10^{-4}$	$5.5 \cdot 10^{-7}$	61	17.10	$1.8 \cdot 10^{-7}$	$8.2 \cdot 10^{-11}$	145	12.00



Тестирование глобального поиска на задаче минимизации функции Розенброка

n	$F(x^0)$	$\ \nabla F(x^0)\ $	$\ z - x_*\ $	$F(z)$	PL	$Time$
5	$1.2 \cdot 10^6$	408815	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-9}$	41	4.21
5	458810	196853	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$7.5 \cdot 10^{-10}$	36	4.11
5	$2.5 \cdot 10^6$	617951	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-9}$	38	4.15
10	38084	24647	$3.2 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-9}$	85	9.60
10	7940	8543	$3.1 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-9}$	82	9.55
10	11101	11388	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-9}$	76	9.43
50	$8.1 \cdot 10^7$	$2.9 \cdot 10^6$	$3.4 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-9}$	410	45.25
50	686176	256999	$1.7 \cdot 10^{-5}$	$3.7 \cdot 10^{-9}$	386	45.01
50	102509	32805.5	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$4.2 \cdot 10^{-9}$	431	46.60
100	181996	44044.5	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-9}$	753	1 : 14.00
100	$2.1 \cdot 10^7$	$4.8 \cdot 10^6$	$2.2 \cdot 10^{-5}$	$2.6 \cdot 10^{-9}$	781	1 : 15.00
100	152183	41207	$2.4 \cdot 10^{-6}$	$6.8 \cdot 10^{-10}$	812	1 : 17.00
125	$4,4 \cdot 10^7$	$5,7 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-9}$	1044	1 : 50.10
125	$7,8 \cdot 10^7$	$4,1 \cdot 10^6$	$6,7 \cdot 10^{-6}$	$6,3 \cdot 10^{-9}$	1012	1 : 49.00
125	$3,6 \cdot 10^7$	$7,4 \cdot 10^6$	$4,6 \cdot 10^{-6}$	$2,1 \cdot 10^{-10}$	1101	1 : 51.00
151	$3.0 \cdot 10^8$	$7,2 \cdot 10^7$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$5,1 \cdot 10^{-9}$	1361	2 : 26.10
151	$5,8 \cdot 10^8$	$8,6 \cdot 10^7$	$3,8 \cdot 10^{-5}$	$3,1 \cdot 10^{-10}$	1355	2 : 25.20
151	$8,8 \cdot 10^8$	$8,1 \cdot 10^7$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$5,1 \cdot 10^{-9}$	1394	2 : 28.00

$$\|\nabla F(z)\| < 10^{-3}$$

Для всех размерностей число итераций глобального поиска равно $It = 2$.



Постановка задачи

$$(DCC): \quad \begin{cases} f_0(x) \downarrow \min, & x \in S, \\ F(x) = g(x) - h(x) \leq 0. \end{cases}$$

Процедура 1 строит $x(y) \in S$ из заданной точки $y \in S$, $F(y) = g(y) - h(y) \leq 0$:

$$F(x(y)) = 0, \quad f_0(x(y)) \leq f_0(y).$$

Процедура 2 заключается в последовательном решении линейризованных задач

$$g(x) - \langle h'(u), x \rangle \downarrow \min, \quad x \in S, \quad f_0(x) \leq \zeta, \quad (\mathcal{LQ}(u, \zeta))$$

где $h'(u) \in \partial h(u)$.

$$(H_0): \quad \exists v \in S, \quad g(v) - h(v) > 0: \quad f_0(v) < f_0^* \triangleq \mathcal{V}(DCC). \quad (13)$$



Теорема 3

Пусть $f_0(\cdot)$ и S являются выпуклыми. Кроме того, пусть множество $\mathcal{F}_0 = \{x \in S | f_0(x) \leq f_0(x_0)\}$ ограничено, и выполнено предположение (H_0) . Тогда для специального метода локального поиска справедливы следующие утверждения:

- а) в случае конечного числа итераций, мы получаем точку $y^N \in S$, $F(y^N) = 0$, которая является ε_N -решением задачи $(LQ(y_N, \xi_N))$, где N — номер последней итерации;
- б) в противном случае, для $\{x^s\}$ и $\{y^s\}$:

$$\begin{aligned} x^s \in S, \quad F(x^s) = 0, \quad y^s \in S, \quad F(y^s) > 0, \\ \xi_{s+1} := f_0(x^{s+1}) < f_0(y^s) \leq \xi_s := f_0(x^s), \\ \xi_* := \lim_{s \rightarrow \infty} \xi_s = \lim_{s \rightarrow \infty} f_0(y^s), \end{aligned}$$

выполняется следующее условие: $0 = F(x^s) = \lim_{s \rightarrow \infty} F(y^s)$,

$x_* = \lim_{s \rightarrow \infty} x^s = \lim_{s \rightarrow \infty} y^s$, для некоторого $x_* \in \mathbb{R}^n$, $F(x_*) = 0$.

Кроме того, x_* является решением линеаризованной задачи $(LQ(x_*, \xi_*))$ и нормальной стационарной точкой двойственной задачи $(Q(\xi_*))$.



Задача с d.c. ограничением

$$\left. \begin{array}{l} f_0(x) \downarrow \min, \quad x \in S, \\ g(x) - h(x) \leq 0. \end{array} \right\} \quad (DCC)$$

Теорема 4. (Необходимые УГО)

Пусть выполнено предположение $(\mathcal{H}_1)$:

$$\exists v \in S : F(v) > 0, \quad f_0(v) < \mathcal{V}(DCC) \triangleq \inf_x \{f_0(x) \mid x \in S, F(x) \leq 0\}.$$

Если $z \in \text{Sol}(DCC)$, то $(h'(y) \in \partial h(y))$:

$$\left. \begin{array}{l} \forall(y, \beta) : h(y) = \beta, \quad y \in S, \\ g(x) - \beta \geq \langle h'(y), x - y \rangle \quad \forall x \in S : f_0(x) \leq f_0(z). \end{array} \right\} \quad (\mathcal{E}_1)$$



Задача с d.c. ограничением

$$\left. \begin{array}{l} f_0(x) \downarrow \min, \quad x \in S, \\ g(x) - h(x) \leq 0. \end{array} \right\} \quad (DCC)$$

Теорема 5. (Достаточные УГО)

Пусть выполнены следующие условия регулярности:

$$\exists v \in S : F(v) > 0, \quad (14)$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall y \in S : F(y) = 0 \quad (g(y) = h(y)) \\ \exists p = p(y) \in S : g(p) - g(y) < \langle h'(y), p - y \rangle. \end{array} \right\} \quad (\mathcal{H})$$

Если $z \in S$, $F(z) = 0$ и, кроме того, справедливо условие

$$\left. \begin{array}{l} \forall (y, \beta) : h(y) = \beta, \quad y \in S, \quad g(y) \leq \beta \leq \sup(g, S), \\ g(x) - \beta \geq \langle h'(y), x - y \rangle \quad \forall x \in S : f_0(x) \leq f_0(z), \end{array} \right\} \quad (\mathcal{E}_0)$$

то $z \in \text{Sol}(DCC)$.



$$\begin{cases} f_0(x) \downarrow \min, & x \in S, \\ g(x) - h(x) \leq 0. \end{cases} \quad (DCC)$$

1) Найти критическую точку z , используя специальный алгоритм локального поиска, $\zeta := g(z) - h(z)$.

2) Выбрать число $\beta \in [\beta_-, \beta_+]$, $\beta_- = \inf(g, S)$, $\beta_+ = \sup(g, S)$.

3) Построить аппроксимацию поверхности уровня функции $h(\cdot)$:

$$A(\beta) = \{v^1, \dots, v^N \mid h(v^i) = \beta - \zeta, \quad g(v^i) \leq \beta \quad i = 1, \dots, N, \quad N = N(\beta)\}.$$

4) Для каждой точки v^i аппроксимации найти (приближенное) решение p^i линеаризованной задачи

$$g(x) - \langle h'(v^i), x \rangle \downarrow \min_x, \quad x \in S, \quad f_0(x) \leq f_0(z).$$

5) Стартуя с каждой точки p^i , специальным алгоритмом локального поиска найти точку u^i .

6) Проверить выполнение неравенства из УГО:

$$g(x) - \beta \geq \langle h'(y), x - y \rangle \quad \forall x \in S : f_0(x) \leq f_0(z).$$



Линейная задача дополнительности

Оптимизационная задача

$$F(x) = \langle x, Mx + q \rangle \downarrow \min, x \in S, \quad (P)$$

$$S \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n | x \geq 0, \quad Mx + q \geq 0\}.$$

Декомпозиция знаконеопределенной матрицы

$$M = M_1 - M_2, \quad M_1 > 0, \quad M_2 > 0.$$

$$F(x) = G(x) - H(x) \downarrow \min, \quad x \in S. \quad (P')$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \langle M_1 x, x \rangle + \langle q, x \rangle, \quad H(x) = \frac{1}{2} \langle M_2 x, x \rangle. \quad (15)$$



1. Специальный метод локального поиска

$$J_s(x) = \langle M_1 x, x \rangle + \langle q - 2M_2 x^s, x \rangle \downarrow \min, \quad \left. \begin{array}{l} x \geq 0, \quad Mx + q \geq 0. \end{array} \right\} \quad (\mathcal{PL}(x^s))$$

$$x^{s+1} \in \delta_s\text{-Sol}(\mathcal{PL}(x^s)),$$

$$\delta_s \geq 0, \quad s = 1, 2, \dots, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s < \infty. \quad (16)$$

2. Процедура выхода из критической точки

1. Выбор β .
2. Аппроксимация поверхности уровня функции $H(x) = \beta - \zeta$.
3. Решение линеаризованной задачи.
4. Проверка нарушения условий оптимальности $(\mathcal{E})$.



Выбор точек поверхности уровня

$$y^i = \mu_i d^i, \quad H(y^i) = \frac{1}{2} \langle M_2 y^i, y^i \rangle = \beta - \xi.$$

$$\mathcal{R}_1 = \{y^i = \mu_i e^i \mid i = 1, \dots, n\}.$$

$$\mathcal{R}_2 = \{y^i = \mu_i d^i \mid i = 1, \dots, n+1\}.$$

для $i = 1, \dots, n$, d^i — решения
следующих задач:

$$\left. \begin{array}{l} \langle e^i, x \rangle \downarrow \min, \\ x \geq 0, \quad Mx + q \geq 0, \end{array} \right\} \quad (17)$$

$$e^i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0).$$

d^{n+1} — решение задачи:

$$\left. \begin{array}{l} \langle e, x \rangle \downarrow \min, \\ x \geq 0, \quad Mx + q \geq 0, \end{array} \right\} \quad (18)$$

$$e = (1, 1, \dots, 1, 1).$$



n	N	$LocSol$	$GlobSol$	$Quadprog$	$PATH$ ¹
2	10000	9929	10000	10000	10000
4	10000	8758	10000	9999	10000
6	10000	6997	10000	9999	9998
8	10000	5306	10000	9997	9996
10	1000	390	1000	993	992
15	1000	169	1000	976	989
20	1000	71	1000	979	983
25	1000	49	1000	973	955
30	100	3	100	94	92
40	100	0	100	91	75
50	100	0	100	78	52
60	100	0	100	43	31
80	10	0	10	2	6
100	10	0	10	4	4
200	10	0	10	0	4
300	10	0	10	1	2
400	10	0	10	0	4

Mazurkevich E. O., Petrova E. G., and Strekalovsky A. S. *On the Numerical Solution of the Linear Complementarity Problem* // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2009. V. 49, No. 8. P. 1318-1331.

¹<http://pages.cs.wisc.edu/~ferris/path.html>



Биматричные игры



Ситуации равновесия по Нэшу в биматричной игре $\Gamma(A, B)$:

$$(x^*, y^*) \in S_m \times S_n, \quad S_p = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^p \mid \sum_{i=1}^p x_i = 1 \right\},$$

$$\langle x^*, Ay^* \rangle \geq \langle x, Ay^* \rangle \quad \forall x \in S_m, \quad \langle x^*, By^* \rangle \geq \langle x^*, y \rangle \quad \forall y \in S_n.$$

Теорема (Милс, 1960)

Ситуация (x^*, y^*) является ситуацией равновесия по Нэшу в биматричной игре $\Gamma(A, B)$ в том и только в том случае, когда она входит в некоторое глобальное решение $(x^*, y^*, \alpha_*, \beta_*) \in \mathbb{R}^{m+n+2}$ следующей задачи математического программирования:

$$\begin{aligned} F(x, y, \alpha, \beta) &\triangleq \langle x, (A + B)y \rangle - \alpha - \beta \uparrow \max, \\ (x, y, \alpha, \beta) &\in X \times Y, \end{aligned} \quad (PBM)$$

где $X = \{(x, \beta) \in S_m \times \mathbb{R} \mid x^T B \leq \beta e_n\}$, $Y = \{(y, \alpha) \in S_n \times \mathbb{R} \mid Ay \leq \alpha e_m\}$, $e_p = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^p$, $p = m, n$.

При этом величины α_* , β_* являются выигрышами первого и второго игроков в игре $\Gamma(A, B)$ соответственно: $\langle x^*, Ay^* \rangle = \alpha_*$, $\langle x^*, By^* \rangle = \beta_*$, а оптимальное значение целевой функции задачи (PBM) равно нулю:

$$F(x^*, y^*, \alpha_*, \beta_*) = 0.$$

$$F(x, y, \alpha, \beta) = h(x, y) - g(x, y, \alpha, \beta), \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} h(x, y) &= \frac{1}{4}(\|x + Ay\|^2 + \|x + By\|^2) \\ g(x, y, \alpha, \beta) &= \frac{1}{4}(\|x - Ay\|^2 + \|x - By\|^2) + \alpha + \beta \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

являются выпуклыми функциями ($h(\cdot)$ на $\mathbb{R}^{m+n}$, $g(\cdot)$ на $\mathbb{R}^{m+n+2}$).

Другими словами, мы получаем следующую задачу d.c. минимизации ($\mathcal{P}_{BM}$):

$$(\mathcal{P}_{BM}): \quad \left. \begin{aligned} F_0(x, y, \alpha, \beta) &= -F(x, y, \alpha, \beta) = g(x, y, \alpha, \beta) - h(x, y) \downarrow \min_{x, y, \alpha, \beta}, \\ (x, \beta) &\in X = \{x \in S_m, \quad \beta \in \mathbb{R} \mid x^\top B \leq \beta e_n\}, \\ (y, \alpha) &\in Y = \{y \in S_n, \quad \alpha \in \mathbb{R} \mid Ay \leq \alpha e_m\}. \end{aligned} \right\}$$

Теорема.

Если $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$ не является решением задачи ($\mathcal{P}_{BM}$), то существуют векторы $(u, v) \in S_m \times S_n$ и $(\bar{x}, \bar{y}) \in S_m \times S_n$, и число γ такие, что

$$\gamma - h(u, v) = \zeta := F_0(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) > 0, \quad (21)$$

$$g(u, v, \alpha(v), \beta(u)) \leq \gamma \leq \sup(g, D), \quad (22)$$

$$g(\bar{x}, \bar{y}, \alpha(\bar{y}), \beta(\bar{x})) - \gamma < \langle \nabla_x h(u, v), \bar{x} - u \rangle + \langle \nabla_y h(u, v), \bar{y} - v \rangle. \quad (23)$$



Линеаризованные задачи

$$(\mathcal{PL}_x): \quad \begin{cases} \beta - \langle (A+B)v, x \rangle \downarrow \min_{(x,\beta)}, \\ (x, \beta) \in X = \{(x, \beta) \in S_m \times \mathbb{R} \mid x^\top B \leq \beta e_n\}, \end{cases} \quad (24)$$

$$(\mathcal{PL}_y): \quad \begin{cases} \alpha - \langle u^\top (A+B), y \rangle \downarrow \min_{(y,\alpha)}, \\ (y, \alpha) \in Y = \{(y, \alpha) \in S_n \times \mathbb{R} \mid Ay \leq \alpha e_m\}. \end{cases} \quad (25)$$

Теорема

Последовательность $\{(x^s, y^s, \alpha_s, \beta_s)\}$, генерируемая методом локального поиска:

$$\alpha_{s+1} - \langle x^s(A+B), y^{s+1} \rangle - \frac{\rho_s}{2} \leq \inf_{(y,\alpha)} \{\alpha - \langle x^s(A+B), y \rangle \mid (y, \alpha) \in Y\}, \quad (26)$$

$$\beta_{s+1} - \langle x^{s+1}(A+B), y^{s+1} \rangle - \frac{\rho_s}{2} \leq \inf_{(x,\beta)} \{\beta - \langle x, (A+B)y^{s+1} \rangle \mid (x, \beta) \in X\}, \quad (27)$$

сходится к четверке $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$, удовлетворяющей следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} F_0(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) &\leq F_0(\hat{x}, y, \alpha, \hat{\beta}) \quad \forall (y, \alpha) \in Y, \\ F_0(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) &\leq F_0(x, \hat{y}, \hat{\alpha}, \beta) \quad \forall (x, \beta) \in X, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

provided that $\rho_s > 0, s = 0, 1, 2, \dots, \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s < +\infty$.

$$g(x, y, \alpha, \beta) - h(x, y) \downarrow \min, \quad (x, y, \alpha, \beta) \in D. \quad (DC)$$

1) Найти критическую точку $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ посредством специального алгоритма локального поиска, $\zeta \triangleq g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) - h(\bar{x}, \bar{y})$.

2) Выбрать $\gamma \in [\gamma_-, \gamma_+]$, $\gamma_- = \inf(g, D)$, $\gamma_+ = \sup(g, D)$.

3) Построить аппроксимацию

$A(\beta) = \{(u^1, v^1), \dots, (u^N, v^N) \mid h(u^i, v^i) = \gamma - \zeta, \quad i = 1, \dots, N, \quad N = N(\gamma)\}$,
поверхности уровня функции $h(\cdot)$.

4) Стартуя из точки $(u^i, v^i, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ с помощью специального алгоритма локального поиска найти $(\hat{x}^i, \hat{y}^i, \hat{\alpha}^i, \hat{\beta}^i)$.

5) Проверить выполнение неравенства УГО:

$$g(\hat{x}^i, \hat{y}^i, \hat{\alpha}^i, \hat{\beta}^i) - \gamma \geq \langle \nabla h(u^i, v^i), x^i - u^i \rangle \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

$$(u_0^i, v_0^i) \mapsto (u^i, v^i)$$



Для всех задач стартовая точка выбиралась следующим образом:

$$x_i^0 = \frac{1}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad y_j^0 = \frac{1}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\alpha_0 = \max_i (Ay^0)_i, \quad \beta_0 = \max_j (x^0 B)_j.$$

$m = n$	F_0	F_k	st	LP	Loc	$Time$
200	40.3811	0	2	972	65	00:43.66
250	51.1617	0	4	4843	321	5:36.30
300	60.1209	0	2	28	2	00:44.17
400	75.0987	0	6	16168	978	59:05.49
500	75.3494	0	2	158	20	05:57.88
600	84.1025	0	2	82	7	07:33.92
700	89.0439	0	2	54	6	11:50.34
800	99.8335	0	2	48	3	15:28.70
900	100.0419	0	3	136	11	29:31.38
1000	106.8368	0	3	178	18	45:04.34

Pentium 4, CPU 3 ГГц, RAM 512 Мб

Для решения вспомогательных задач ЛП использовался ILOG CPLEX 9.1.

Поиск оптимистических решений в квадратично-линейных двухуровневых задачах



$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &\triangleq \frac{1}{2} \langle x, Cx \rangle + \langle c, x \rangle + \frac{1}{2} \langle y, C_1 y \rangle + \langle c_1, y \rangle \downarrow \min_{x, y}, \\ Ax + By &\leq a, \quad x \geq 0, \\ y \in Y_*(x) &\triangleq \underset{y}{\text{Argmin}} \{ \langle d, y \rangle \mid A_1 x + B_1 y \leq b, \quad y \geq 0 \}, \end{aligned} \right\} \quad (\mathcal{BP})$$

где $C, C_1 \geq 0$.

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &\downarrow \min_{x, y, v}, \\ Ax + By &\leq a, \quad A_1 x + B_1 y \leq b, \quad d + v B_1 \geq 0, \\ x &\geq 0, \quad y \geq 0, \quad v \geq 0, \\ \langle d, y \rangle - \langle A_1 x - b, v \rangle &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\mathcal{P})$$



Обозначим $h(x, y, v) \triangleq \langle d, y \rangle - \langle A_1 x - b, v \rangle$,
 $h(x, y, v) \geq 0$ на допустимых векторах x, y, v .

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, v) &\triangleq F(x, y) + \mu h(x, y, v) \downarrow \min_{x, y, v}, \\ Z &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n} \mid Ax + By \leq a, \ x \geq 0, \\ &\quad A_1 x + B_1 y \leq b, \ y \geq 0\}, \\ V &= \{v \in \mathbb{R}^q \mid d + v B_1 \geq 0, \ v \geq 0\}, \end{aligned} \right\} \quad (\mathcal{P}(\mu))$$

где $\mu > 0$ — штрафной множитель.

Предложение 1

- i) Если при некотором $\mu = \hat{\mu}$, на решении $(x(\hat{\mu}), y(\hat{\mu}), v(\hat{\mu}))$ задачи $(\mathcal{P}(\mu))$ функция $h(x(\hat{\mu}), y(\hat{\mu}), v(\hat{\mu})) = 0$, то тройка $(x(\hat{\mu}), y(\hat{\mu}), v(\hat{\mu}))$ является решением $(\mathcal{P})$.
- ii) Для всех $\mu > \hat{\mu}$ $h(x(\mu), y(\mu), v(\mu)) = 0$, и $(x(\mu), y(\mu), v(\mu))$ является решением задачи $(\mathcal{P})$.



Шаг 0. Положить $s := 0$, $v^s := v^0$.

Шаг 1. Некоторым методом квадратичного программирования найти $\frac{\rho_s}{2}$ -решение (x^{s+1}, y^{s+1}) задачи:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle x, Cx \rangle + \langle c, x \rangle + \frac{1}{2} \langle y, C_1 y \rangle + \langle c_1, y \rangle + \\ & \quad + \mu (\langle d, y \rangle - \langle A_1 x, v^s \rangle) \downarrow \min_{(x,y)}, \\ & \quad (x, y) \in Z. \end{aligned} \right\} \quad (\mathcal{QP}(v^s))$$

Шаг 2. Найти $\frac{\rho_s}{2}$ -решение v^{s+1} задачи ЛП:

$$-\mu \langle A_1 x^{s+1} - b, v \rangle \downarrow \min_v, \quad v \in V. \quad (\mathcal{LP}(x^{s+1}))$$

Шаг 3. Положить $s := s + 1$ и перейти на шаг 1.

#



1) Локальный поиск $\rightarrow$ критическая точка (x, y, v) . $\zeta \triangleq \Phi(x, y, v)$.

2) D.C. представление целевой функции задачи $(\mathcal{P}(\mu))$

$$\Phi(x, y, v) = g(x, y, v) - f(x, y, v), \quad (29)$$

$$g(x, y, v) = \frac{1}{2} \langle x, Cx \rangle + \langle x, c \rangle + \frac{1}{2} \langle y, C_1 y \rangle + \langle y, c_1 \rangle + \mu \left(\langle v, b \rangle + \frac{1}{4} \|v - A_1 x\|^2 \right),$$

$$f(x, y, v) = \mu \left(\frac{1}{4} \|v + A_1 x\|^2 - \langle y, d \rangle \right).$$

3) Выбор числа

$$\gamma \in [\gamma_-, \gamma_+], \quad \gamma_- \triangleq \inf_{(x, y, v)} (g, D), \quad \gamma_+ \triangleq \sup_{(x, y, v)} (g, D), \quad D \triangleq Z \times V.$$

4) Построение аппроксимации

$$\mathcal{A} = \{(z^l, u^l, w^l) \mid f(z^l, u^l, w^l) = \gamma - \zeta, \quad l = 1, \dots, N\}$$

поверхности уровня выпуклой по (x, y, v) функции $f(\cdot)$.

5) Проверка нарушения условий оптимальности.



Задача	F_*	KNITRO		XY-процедура		V-процедура	
		F	Время	F_{XY}	Время	F_V	Время
1x1	-49	-15	0.003	-15	0.016	-15	0.016
2x3_1	-29.2	-6	0.003	-29.2	0.015	-29.2	0.000
2x3_2	-18.4	-5.6	0.010	-5.6	0.016	-5.6	0.016
5x5_1	-21	-21	0.010	-13	0.031	-21	0.016
5x5_2	-9	63	0.008	-1	0.016	7	0.015
5x5_3	-5	115	0.009	3	0.015	3	0.016
10x10_1	-38	-30	0.131	-10	0.016	-30	0.015
10x10_2	-26	122	0.024	-10	0.016	-18	0.016
10x10_3	-14	18.031	0.181	-10	0.015	18	0.016
15x15_1	-19	-3	0.066	-15	0.015	-3	0.015
15x15_2	-27	29	1.082	-15	0.015	29	0.015
15x15_3	-43	161	0.049	-15	0.015	-35	0.015
20x20_1	-24	8	0.276	-20	0.015	8	0.015
20x20_2	-48	40	0.922	-20	0.016	40	0.015
20x20_3	-52	-4	0.294	-20	0.015	-3.998	0.015
30x30_1	-142	-134	0.765	-30	0.016	-134	0.016
30x30_2	-58	30	0.571	-30	0.016	30	0.016
30x30_3	-42	14.029	2.686	-30	0.016	14.002	0.016

Для решения выпуклых квадратичных задач и задач ЛП в процедурах локального поиска использовался пакет Xpress



Задача	F_*	KNITRO multistart		Метод глобального поиска			
		F_{ms}	Время	F_{XY}	Время	F_V	Время
1x1	-49	-49.001	0.6	-49	2.2	-49	1.7
2x3_1	-29.2	-29.2	0.8	-29.2	4.6	-29.2	1.5
2x3_2	-18.4	-18.4	0.5	-18.4	1.5	-18.4	0.8
5x5_1	-21	-21	7.7	-21	11.4	-21	7.3
5x5_2	-9	-9	8.7	-9	11.3	-9	4.7
5x5_3	-5	-5	9.9	-5	11.7	-5	4.6
10x10_1	-38	-30	1:17.2	-38	33.1	-38	23.7
10x10_2	-26	-26	1:17.0	-26	29.2	-26	12.4
10x10_3	-14	-14	1:22.4	-14	24.6	-14	16.0
15x15_1	-19	-19	11:08.5	-19	20.3	-19	19.0
15x15_2	-27	-19	5:43.6	-27	38.6	-27	31.5
15x15_3	-43	-35	7:01.2	-43	48.1	-43	35.5
20x20_1	-24	-24	19:13.7	-24	26.9	-24	45.9
20x20_2	-48	-48	30:20.5	-47.999	1:12.0	-47.999	1:10.9
20x20_3	-52	-32	29:54.4	-52	1:13.1	-52	52.0
30x30_1	-142	-134	1:34:34.9	-141.997	4:30.3	-141.997	1:46.8
30x30_2	-58	-38	1:31:23.5	-58	1:26.2	-58	1:51.3
30x30_3	-42	-29.999	2:39:15.4	-42	51.5	-42	1:08.9

Для решения выпуклых квадратичных задач и задач ЛП на этапе локального поиска использовался пакет Xpress

CPU: Intel Core 2 Quad 2.8GHz (KNITRO),
Intel Core 2 Duo 2.0GHz (глобальный поиск)

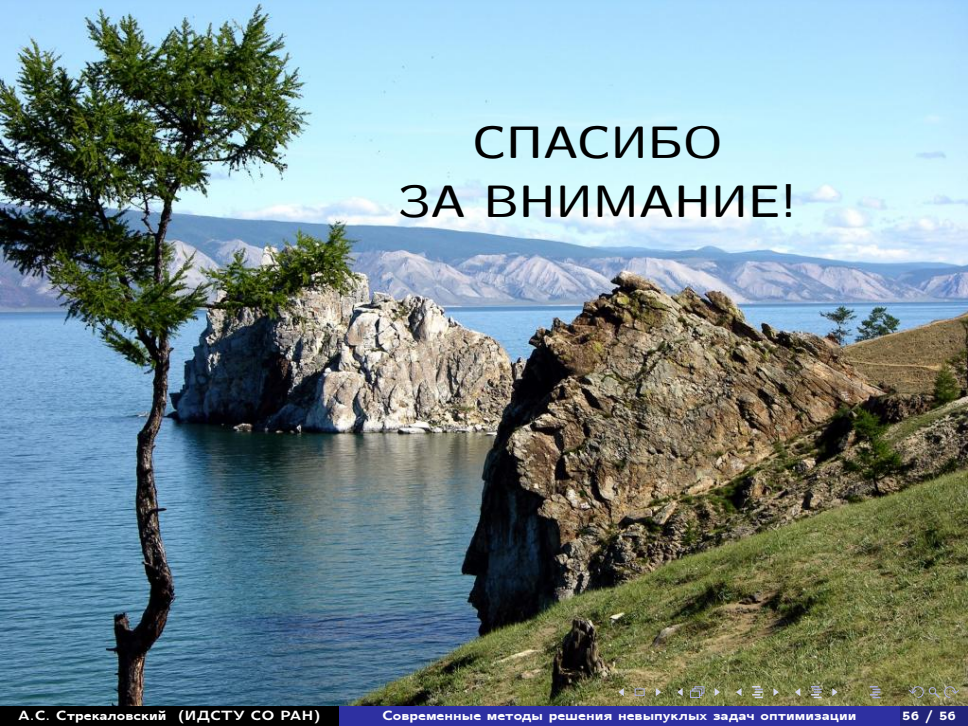


$m + n$	N	$LocSol_{avg}$	Loc_{avg}	St_{avg}	T_{avg}
20	1000	146.2	2012.7	1.9	8.57
40	1000	131284.1	3436.6	2.1	20.69
60	100	$1.34 \cdot 10^8$	4601.5	2.0	34.36
80	100	$1.17 \cdot 10^{11}$	6485.1	2.1	59.51
100	100	$1.20 \cdot 10^{14}$	9352.5	2.1	1:40.29
150	10	$3.78 \cdot 10^{21}$	8050.3	3.0	1:52.38
200	10	$1.27 \cdot 10^{29}$	12263.8	2.8	4:00.69
250	10	$4.27 \cdot 10^{36}$	17704.3	2.7	8:04.28
300	10	$3.93 \cdot 10^{44}$	72245.6	17.9	49:53.48
350	10	$2.12 \cdot 10^{52}$	216721.1	25.2	3:56:09.12
400	10	$8.64 \cdot 10^{59}$	318448.7	27.6	9:10:24.43

Для решения выпуклых квадратичных задач и задач ЛП на этапе локального поиска использовался пакет Xpress

CPU: Intel Pentium 4 3.0GHz



A scenic landscape featuring a calm blue lake. In the foreground, a grassy slope leads down to the water. A large, craggy rock formation juts out from the right side of the slope. To the left, a slender tree with green needles stands on the grass. In the middle ground, another rocky island is visible, topped with a small white structure. The background consists of rolling mountains under a clear blue sky with a few wispy clouds.

СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ!