

МЕТОДЫ ОТСЕЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ: ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

И.Л. Васильев

ИДСТУ СО РАН

Новосибирск, 21.06.2013

- ❶ Постановка задачи.
- ❷ Задача отделения и метод отсечений.
- ❸ Задача отделения для задачи о рюкзаке.
- ❹ Примеры и вычислительный эксперимент.

Задача линейного целочисленного программирования

$c \in \mathbb{Z}^n$, $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$.

Find:

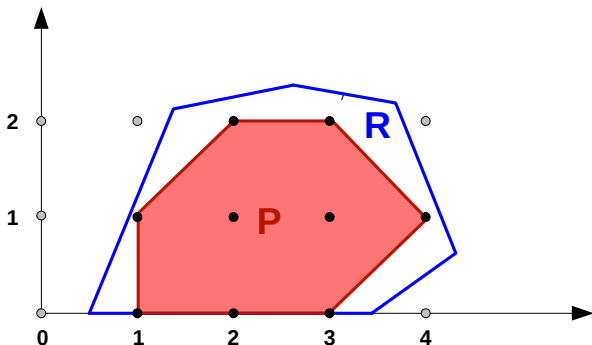
$$\begin{aligned} \max_x c^T x, \\ x \in X = \{x \in \mathbb{B}^n : Ax \leq b\}. \end{aligned} \tag{1}$$

$P = \text{conv}(X)$ – многогранник задачи (выпуклая оболочка)

$R = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, 0 \leq x_i \leq 1 \ \forall i \in \overline{1, n}\}$ – многогранник ЛП-релаксации.

$$UB_X = \max_{x \in X} c^T x, \quad UB_P = \max_{x \in P} c^T x, \quad UB_R = \max_{x \in R} c^T x.$$

Многогранники



$$UB_X = UB_P \leq UB_R$$

Декомпозиционный многогранник

a^i — i -ая строка матрицы A , $i = \overline{1, m}$

$$P_K(i) = \text{conv}\{x \in \mathbb{B}^n : a^{iT}x \leq b_i\}$$

$$P_F = \bigcap_{i=1}^m P_K(i)$$

$$UB_F = \max_{x \in P_F} c^T x.$$

$$P \subseteq P_F \subseteq P_R$$

$$\Downarrow$$

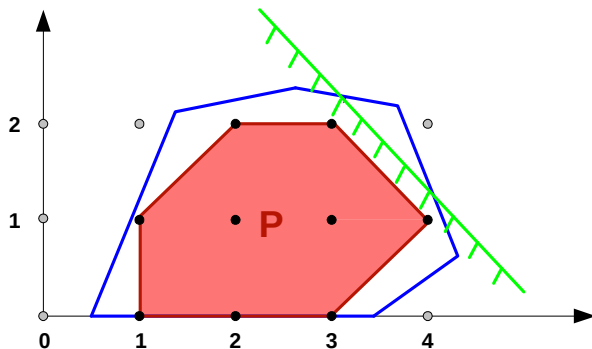
$$UB_P \leq UB_F \leq UB_R$$

Как получить UB_F ?

- 1 Лагранжева релаксация.
- 2 Метод генерации столбцов.
- 3 Метод отсечений.

Многогранники

Определение. Неравенство $p^T x \leq p_0$ называется правильным для многогранника P , если $p^T x \leq p_0 \quad \forall x \in P$.



Многогранники

Определение. Пусть $p^T x \leq p_0$ — правильное неравенство для P . $F(p, p_0) = \{x \in P : p^T x = p_0\}$ называется *гранью* многогранника P , если

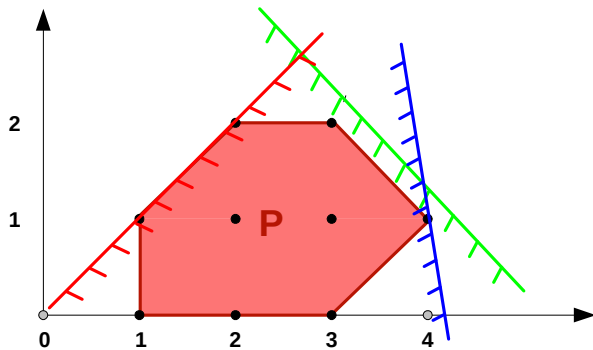
$$F(p, p_0) \neq \emptyset \text{ и } F(p, p_0) \neq P.$$

Определение. Грань $F(p, p_0)$ многогранника P называется *гипергранью* или *фасетой*, если

$$\dim(F(p, p_0)) = \dim(P) - 1.$$

Определение. Неравенство $p^T x \leq p_0$ называется *гранепорождающим* для многогранника P , если оно правильное для P и $F(p, p_0)$ является фасетой для P .

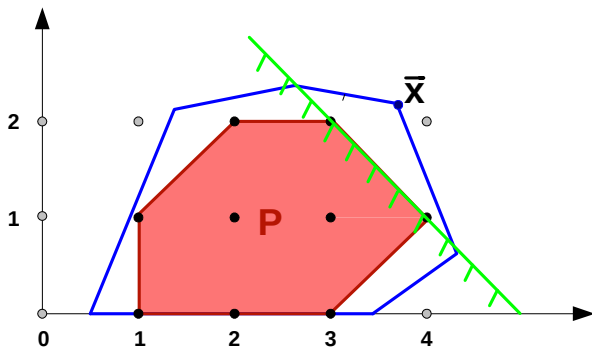
Многогранники



Задача отделения

Задача отделения. Пусть дана $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, выяснить, что

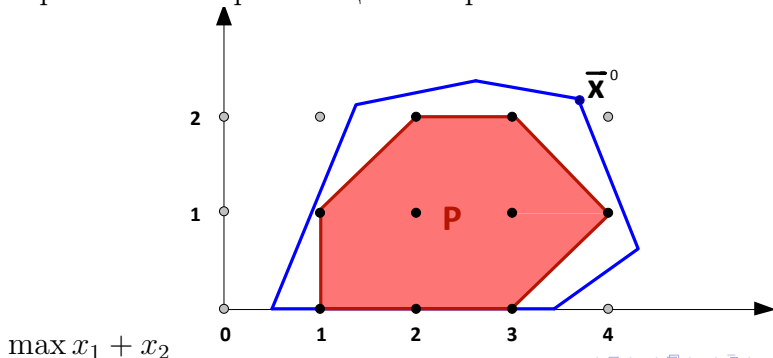
1. или $\bar{x} \in P$,
2. или найти правильное неравенство (отсечение), которое отделяет $\bar{x}$ от P .



Метод отсечений

Метод отсечений.

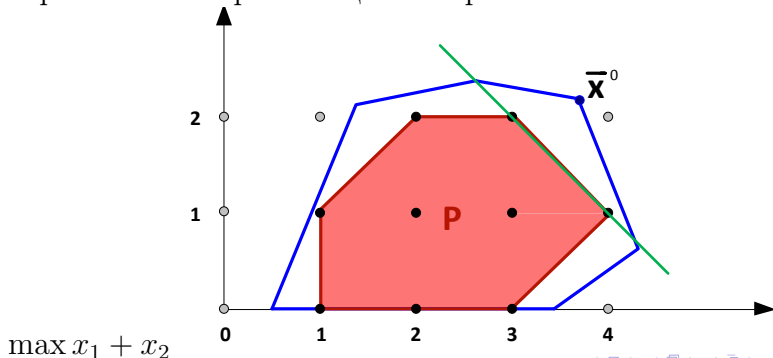
1. Найти решение ЛП релаксации $\bar{x} \in P$ ($\bar{x} \in R$).
2. Решить задачу отделения для $\bar{x}$ многогранника задачи P .
3. Если $\bar{x} \in P$ то стоп.
4. Найденное правильное неравенство добавить в систему неравенств ЛП-релаксации и перейти на шаг 1.



Метод отсечений

Метод отсечений.

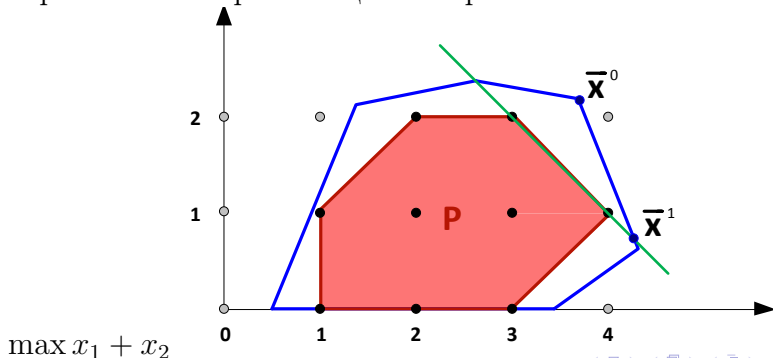
1. Найти решение ЛП релаксации $\bar{x} \in P$ ($\bar{x} \in R$).
2. Решить задачу отделения для $\bar{x}$ многогранника задачи P .
3. Если $\bar{x} \in P$ то стоп.
4. Найденное правильное неравенство добавить в систему неравенств ЛП-релаксации и перейти на шаг 1.



Метод отсечений

Метод отсечений.

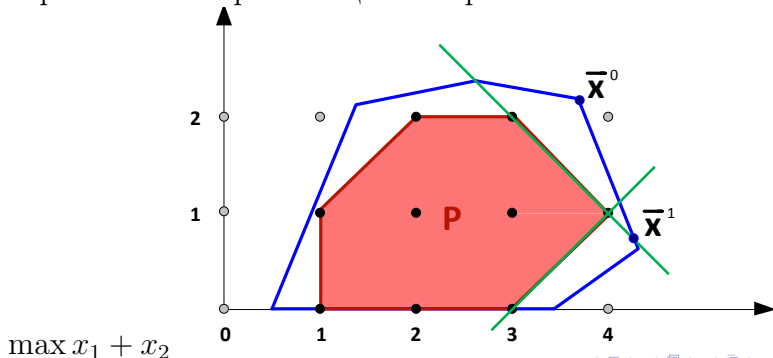
1. Найти решение ЛП релаксации $\bar{x} \in P$ ($\bar{x} \in R$).
2. Решить задачу отделения для $\bar{x}$ многогранника задачи P .
3. Если $\bar{x} \in P$ то стоп.
4. Найденное правильное неравенство добавить в систему неравенств ЛП-релаксации и перейти на шаг 1.



Метод отсечений

Метод отсечений.

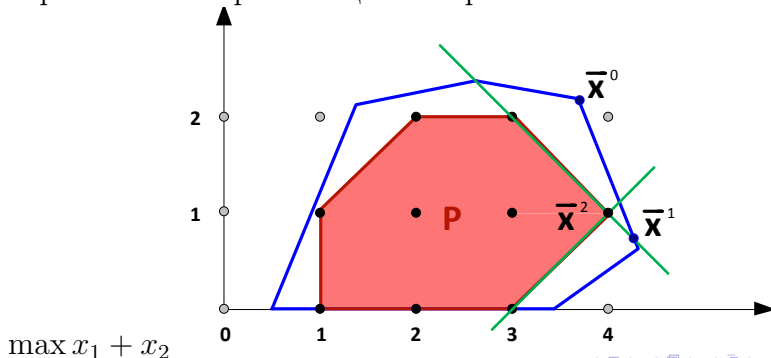
1. Найти решение ЛП релаксации $\bar{x} \in P$ ($\bar{x} \in R$).
2. Решить задачу отделения для $\bar{x}$ многогранника задачи P .
3. Если $\bar{x} \in P$ то стоп.
4. Найденное правильное неравенство добавить в систему неравенств ЛП-релаксации и перейти на шаг 1.



Метод отсечений

Метод отсечений.

1. Найти решение ЛП релаксации $\bar{x} \in P$ ($\bar{x} \in R$).
2. Решить задачу отделения для $\bar{x}$ многогранника задачи P .
3. Если $\bar{x} \in P$ то стоп.
4. Найденное правильное неравенство добавить в систему неравенств ЛП-релаксации и перейти на шаг 1.



Задача отделения

$f(p) = \max_{x \in P} p^T x$ — опорная функция.

$$v(p^*) = \max_p \{ \bar{x}^T p - f(p) : p \in \Lambda \}, \quad (2)$$

$\Lambda \subset \mathbb{R}^n$

Если $v(p^*) \leq 0$, тогда $\bar{x} \in P$,

иначе, $p^{*T} x \leq f(p^*)$ — искомое отсечение.

$$\max_{(p, p_0)} [\bar{x}^T p - p_0], \quad (3)$$

$$h^T p \leq p_0 \quad \forall h \in P, \quad (4)$$

$$p \in \Lambda, \quad (5)$$

$$(4) \Leftrightarrow h^T p \leq p_0 \quad \forall h \in X$$

Задача о рюкзаке

Дано:

$$c \in \mathbb{Z}^n, a \in \mathbb{Z}^n, \beta \in \mathbb{Z}:$$

$$0 < a_i \leq \beta \text{ и } 0 < \beta < \sum_{i=1}^n a_i$$

Найти:

$$\max_x c^T x, \quad x \in X_K = \{x \in \mathbb{B}^n : a^T x \leq \beta\}.$$

$P_K = \text{conv}(X_K)$ – многогранник рюкзака.

$R_K = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq \beta, 0 \leq x_i \leq 1 \forall i \in \overline{1, n}\}$ – многогранник ЛП-релаксации.

Многогранник рюкзака

- $x_i \geq 0$ – граниобразующее для P_K .
- Все остальные граниобразующие неравенства имеет неотрицательные коэффициенты.

Задача отделения:

$$w(p^*) = \max_p \{ \bar{x}^T p : h^T p \leq 1 \quad \forall h \in X_K \}. \quad (6)$$

Если $w(p^*) \leq 1$, тогда $\bar{x} \in P_K$,
иначе $p^{*T} x \leq 1$ является правильным неравенством, которое отсекает $\bar{x}$.

Если p^* является угловой точкой в задаче (6), тогда данное неравенство граниобразующее.

Теорема расширения

Пусть даны многогранник P , индекс $s \in \{1, \dots, n\}$ и проекции $P: P_s^0 = \{x \in P : x_s = 0\}$ и $P_s^1 = \{x \in P : x_s = 1\}$. Пусть также $p^T x \leq p_0$, в котором $p_s = 0$, является правильным (граннеобразующим)

- 1) для P_s^0 . Если $P_s^1 = \emptyset$, тогда $x_s = 0 \forall x \in P$. Если $P_s^1 \neq \emptyset$, тогда $p^T x + p_s x_s \leq p_0$ правильное (граннеобразующее) для P , где

$$p_s = p_0 - \max_x \{p^T x : x \in P_s^1\};$$

- 2) for P_s^1 . If $P_s^0 = \emptyset$, then $x_s = 1 \forall x \in P$. If $P_s^0 \neq \emptyset$ then $p^T x + (p_s - p_0)x_s \leq p_s$ is valid (facet-inducing) for P , where

$$p_s = \max_x \{p^T x : x \in P_s^0\}.$$

Алгоритм отделения

- 1) Задача отделения решается для дробного многогранника

$$P_K(\bar{x}) = \{x \in P_K : x_i = 0, \text{ если } \bar{x}_i = 0;$$

$$x_i = 1, \text{ если } \bar{x}_i = 1 \quad \forall i = \overline{1, n}\},$$

метод генерации строк (метод отсечений).

- 2) Процедура проверки корректности вычислений;
- 3) Расширение в исходное пространство.

Метод генерации строк

Шаг 0. Выбрать начальное подмножество неравенств (6), т.е.

$$U \subset X_K \quad (U = \bigcup_{i=1}^n \{e^i\}).$$

Step 1. Решить ЛП с неравенствами из U :

$$w(\bar{p}) = \max_p \{ \bar{x}^T p : h^T p \leq 1 \quad \forall h \in U \}. \quad (7)$$

Step 2. Проверить, удовлетворяет ли $\bar{p}$ всем неравенствам из (6).

$$\bar{h} \in \operatorname{Argmax}_{h \in X_K} \bar{p}^T h.$$

Step 3. Если $\bar{h}^T \bar{p} > 1$, тогда добавить $\bar{h}$ неравенство в задачу (7), т.е. $U := U \cup \{\bar{h}\}$, и пререйти на Шаг 1.

Step 4. Если $\bar{h}^T \bar{p} \leq 1$, тогда $\bar{p}$ решение задачи отделения (6) и $\bar{p}^T x \leq 1$ правильное неравенство для P_K , которое отсекает $\bar{x}$ в случае $\bar{p}^T \bar{x} > 1$.

Корректность вычислений

Мы должны проверить, в действительности ли найденное отсечение является правильным неравенством.

Алгоритм решения для задачи о рюкзаке — MINKNAP (Pisinger) — является точным, если все коэффициенты целочисленные.

Попытаться сделать коэффициенты целочисленными, умножая их от 2 до 10^5 , получив новую левую часть неравенства $\hat{p}^T x$, в которой все коэффициенты целочисленные. Правильность неравенства гарантируем нахождение правой части как решение задачи

$$\hat{\pi} := \max_{h \in X_K} \hat{p}^T h.$$

Расширение

Пусть нужно расширить переменные от $k + 1$ до n , то есть мы имеем неравенство

$$\sum_{i=1}^k \hat{p}_i x_i \leq \hat{\pi}.$$

И пусть $\bar{b}$ правая часть в задаче о рюкзаке с учетом зафиксированных переменных.

Динамическое программирование, $\beta = \overline{0, \bar{b}}$, $i = \overline{1, k}$

$$z_1(\beta) = \begin{cases} 0, & \text{if } \beta < a_1 \\ \hat{p}_1, & \text{if } \beta \geq a_1 \end{cases}$$

$$z_i(\beta) = \begin{cases} z_{i-1}(\beta), & \text{if } \beta < a_i \\ \max\{z_{i-1}(\beta), z_{i-1}(\beta - a_i) + \hat{p}_i\}, & \text{if } \beta \geq a_i \end{cases} \quad (8)$$

Расширение

Сразу же получаем коэффициенты расширения:

$$\hat{\pi} = z_k(\bar{b}), \quad p_{k+1}^0 = z_k(\bar{b} - a_{k+1}), \quad p_{k+1}^1 = z_k(\bar{b} + a_{k+1}).$$

Для расширения следующей переменной необходимо скорректировать значения:

$$\begin{aligned} \hat{p}_{k+1} &= \hat{\pi} - p_{k+1}^0 \text{ в случае расширения вверх,} \\ \hat{p}_{k+1} &= p_{k+1}^1 - \hat{\pi}, \quad \hat{\pi} = p_{k+1}^1, \quad \bar{b} := \max\{\bar{b} + a_{k+1}, b\} \text{ в случае} \\ &\text{расширения вниз.} \end{aligned}$$

и подсчитать $z_{k+1}(\beta)$ for $\beta = \overline{0, \bar{b}}$ по формуле (8).

Пример

$$\begin{array}{llll} \max & x_1 & + & x_2 & + & x_3 \\ & 5x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & \leq 7 \\ & x \in \mathbb{B}^3 \end{array}$$

Решение ЛП релаксации $(0.8, 1, 0)$.

Дробный рюкзак: $\max x_1, 5x_1 \leq 4, x_1 \in \mathbb{B} \implies x_1 = 0$.

Задача отделения: $x_1 \leq 0$, т.е. $p_1 = \hat{p}_1 = 1, \pi = \hat{\pi} = 0$.

Пример

Расширение: $\max p_1, 5p_1 \leq \beta, p_1 \in \mathbb{B}, \bar{b} = 4$

β	0	1	2	3	4	5	6	7
$z_1(\beta)$	0	0	0	0	0	1	1	1

Расширение вниз x_2 : $p_2^1 = z_1(\bar{b} + a_{k+1}) = z_1(4 + 3) = 1$

$$\hat{p}_2 = p_2^1 - \hat{\pi} = 1 - 0 = 1,$$

$$\hat{\pi} = p_2^1 = 1,$$

$$\bar{b} := \max\{\bar{b} + a_2, b\} = 7$$

Ограничение $x_1 + x_2 \leq 1$

Пример

$$\max p_1 + p_2, \bar{b} = b = 7$$

β	0	1	2	3	4	5	6	7
$z_1(\beta)$	0	0	0	0	0	1	1	1
$z_2(\beta)$	0	0	1	1	1	1	1	1

Расширение вверх x_3 :

$$p_3^0 = z_2(\bar{b} - a_3) = z_2(7 - 6) = 0$$

$$\hat{p}_3 = \hat{\pi} - p_2^0 = 1 - 0 = 1$$

Полученное неравенство:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

Численные результаты

Обобщенная задача о назначениях.

Даны множества машин $I = \{1, \dots, m\}$ и работ $J = \{1, \dots, n\}$. Если работа j выполняется на машине i , то на это тратится d_{ij} некоторого ресурса и время c_{ij} . Ресурсы i -ой машины ограничены величиной q_i .

$$\min_{x,} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}, \quad (9)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J, \quad (10)$$

$$\sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} \leq q_i, \quad i \in I, \quad (11)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J. \quad (12)$$

Заключение

"Хорошие" результаты

- Обобщенная задача о назначениях (многоуровневая).
- Задачи размещения с ограничениями на ресурсы.

"Средние" результаты

- Задача покрытия.
- Декомпозиция на целочисленные рюкзаки.

"Плохие" результаты

- Задача одномерного раскроя.
- Декомпозиция на частично-целочисленные рюкзаки.

I. Vasilyev, M. Boccia, S. Hanafi, An implementation of exact knapsack separation (iv.icc.ru)