На правах рукописи

АЛЕКСЕЕВА Екатерина Вячеславовна

АЛГОРИТМЫ ЛОКАЛЬНОГО ПОИСКА ДЛЯ ЗАДАЧИ О P-МЕДИАНЕ С ПРЕДПОЧТЕНИЯМИ КЛИЕНТОВ

специальность 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2007

Работа выполнена в Институте математики имени С. Л. Соболева СО РАН

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор В. Л. Береснев, кандидат физико-математических наук, доцент Ю. А. Кочетов.
Официальные оппоненты:	доктор технических наук, профессор В. Н. Павлов, кандидат физико-математических наук, доцент И. Л. Васильев.
Ведущая организация –	Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

Защита состоится "24" октября 2007 г. в 17 часов на заседании диссертационного совета Д.003.015.01 в Институте математики имени С.Л. Соболева СО РАН по адресу: пр. Академика Коптюга, 4, 630090, г. Новосибирск.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики имени С.Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан "24" сентября 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.003.015.01 при Институте
математики имени С.Л. Соболева СО РАН
доктор физико-математических наук Шамардин Ю. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию задачи о p-медиане с предпочтениями клиентов (МПК) и разработке приближённых алгоритмов её решения. Исследования дискретных задач размещения проводятся в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН с конца 60-х годов. Актуальность этих исследований обусловлена важными практическими приложениями подобных моделей. Научный интерес вызван также тем, что эти задачи относятся к классу NP-трудных оптимизационных задач, для которых разработка точных и приближённых методов решения уже на протяжении 50 лет остаётся актуальной проблемой.

Рассматриваемая задача является обобщением классической задачи о p-медиане, изучению которой посвящена обширная литература. В задаче о p-медиане моделируется ситуация, когда в возможных пунктах производства нужно разместить p предприятий так, чтобы минимизировать суммарные транспортные расходы до клиентов. Такая постановка не учитывает мнения клиентов, которые могут быть отличными от предпочтений, определяемых транспортными затратами. Поэтому более интересным и реалистичным оказывается случай, когда клиенты имеют собственные предпочтения. Таким образом, в задаче МПК появляются два уровня принятия решений.

Впервые задачи с предпочтениями клиентов зарубежными учёными рассматривались в конце 80-х годов [5]. В конце 90-х в работах [2, 3] российских коллег была установлена тесная связь задачи с псевдо-булевыми функциями, найдены полиномиально разрешимые случаи задачи и показано сведéние к задачам целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Как обобщение классической задачи о p-медиане задача МПК является NP-трудной в сильном смысле и не принадлежит классу APX. Этот факт, а также сложность структуры математической модели подталкивают к разработке неполиномиальных приближённых методов, в основе которых лежат идеи локального поиска. При их разработке возникает вопрос о сложности нахождения локальных оптимумов и их отклонении от глобального оптимума. Для изучения этих вопросов, по аналогии с классом NP, вводится класс задач локального поиска PLS (polynomial-time local search problems). В работе [4] исследовался вопрос о вычислительной сложности получения локальных оптимумов для классической задачи о p-медиане. Установлено, что задача локального поиска для p-медианы с окрестностью N_1 является плотно PLS-полной.

Это означает, в частности, что в худшем случае стандартный алгоритм локального спуска требует экспоненциального числа итераций для получения локального оптимума. Так как задача МПК является обобщением классической задачи о p-медиане, то это свойство сохраняется и для неё. Таким образом, построение локального оптимума при использовании стандартного алгоритма локального поиска, в худшем случае не является полиномиальной процедурой. Однако, поведение алгоритмов в худшем случае может сильно отличаться от их поведения в среднем [6]. Поэтому разработка алгоритмов нахождения "хорошего" локального оптимума за разумное время является актуальной задачей.

Цель работы. Разработка и исследование генетических алгоритмов локального поиска для задачи МПК. Исследование отклонений локальных оптимумов от глобального и расположений локальных оптимумов в допустимой области. Сравнение нижних оценок, полученных сведе́нием рассматриваемой задачи к задачам ЦЛП. Создание компьютерной системы поддержки принятия решений (СППР) на основе полученной математической модели и разработанных алгоритмов, позволяющей пользователям реально проводить многовариантные расчёты.

Методы исследований. В диссертации использованы современные методы и достижения в области генетических алгоритмов, теории вычислительной сложности алгоритмов локального поиска, а также современная методология экспериментальных исследований с применением вычислительной техники и коммерческих пакетов прикладных программ для решения задач ЦЛП.

Научная новизна. В диссертационной работе экспериментально установлено, что алгоритмы локального спуска в среднем приводят к решениям с малой относительной погрешностью, хотя в худшем случае такая погрешность может оказаться сколь угодно большой величиной. Проведено исследование ландшафта, образованного локальными оптимумами и сравнение с ландшафтом для классической задачи о p-медиане. Исследовано влияние шести различных правил замещения на число итераций алгоритма локального спуска и погрешность получаемых локальных оптимумов. Предложено новое правило замещения приводящее к решениям с меньшей погрешностью, чем другие известные правила. Для окрестности N_1 установлено, что целочисленное решение является локальным оптимумом тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условиям Куна-Такера. Показано, что выполнение этих условий равносильно существованию множителей Лагранжа, для которых целочисленное решение задачи является локально-седловой точкой функции Лагранжа относительно окрестности N_1. Исследованы различные формулировки задачи в терминах задач булева линейного программирования. Предложена новая формулировка, которая приводит к лучшей нижней оценке, чем другие известные. Разработаны генетические алгоритмы локального поиска, создано программное обеспечение, проведены тестовые расчеты на трудных в вычислительном отношении примерах.

Практическая ценность. Предложенный в диссертационной работе алгоритм заложен в основу разработанной компьютерной СППР, которая предназначена для выбора оптимальной номенклатуры сельскохозяйственных машин. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при реализации других гибридных алгоритмов для решения прикладных задач размещения.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на международном симпозиуме по исследованию операций "SYM-OP-IS-2003" (г. Герцег-Нови, Черногория, 2003), на международной конференции "Дискретный анализ и исследование операций"(г. Новосибирск, 2004), на международной конференции по исследованию операций (г. Тилбург, Голландия, 2004), на 13-м международном байкальском школе-семинаре (г. Северобайкальск, 2005), на II, III всероссийских конференциях "Проблемы оптимизации и экономические приложения" (г. Омск 2003, 2006), на 18-й мини-евро конференции по алгоритмам локального поиска с переменными окрестностями (г. Пуэрто-де-ля-Круз, Испания, 2005), на школа-семинаре "Проблемы оптимизации сложных систем" (г. Новосибирск, 2005, 2006), на научных семинарах в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, на 22-й европейской конференции по исследованию операций "EURO XXII" (Прага, Чехия, 2007).

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано работ.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы из 77 наименований. Общий объем работы — 92 страницы, включая 23 рисунка и 1 таблицу.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

В **введении** содержится описание задачи, её связь с классической задачей о p-медиане, приводится краткий обзор уже полученных результатов и открытых вопросов. Обосновывается актуальность исследований и разработки приближённых алгоритмов для этой задачи. Коротко излагается содержание диссертационной работы.

В **первой главе** приводится содержательная и математическая постановка задачи. Показано, что кооперативная и антикооперативная постановки сводятся к задаче с условием однозначности выбора клиентов. Проводятся экспериментальные исследования влияния различных правил замещения на результат работы стандартного алгоритма локального спуска для задачи МПК, проводится исследование расположения локальных минимумов и сравнительный анализ с классической задачей о p-медиане.

В разделе 1.1 приводится математическая постановка задачи МПК и её свойства. Для этого вводятся следующие обозначения:
$I = \{1, \dots, m\}$– множество предприятий;
$J = \{1, \dots, n\}$– множество клиентов;
$c_{ij} \geq 0, \quad i \in I, j \in J$– транспортные затраты i-го предприятия при обслуживании j-го клиента ;
$g_{ij} \geq 0,$ целые, $i \in I, j \in J$– предпочтения клиентов на множестве предприятий, если $g_{i_1 j} < g_{i_2 j}$, то j-ый клиент из предприятий i_1 или i_2 выберет предприятие i_1;
Переменные задачи $y = (y_i)$, $X = (x_{ij})$:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если открывается } i\text{-ое предприятие;} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-ый клиент обслуживается } i\text{-ым предприятием;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

С использованием введённых обозначений задача МПК может быть записана в виде следующей задачи двухуровневого программирования: найти

$$\min_{X^*, y} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x^*_{ij}(y) \tag{1}$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p \tag{2}$$

$$y_i \in \{0, 1\}, i \in I, \tag{3}$$

где $X^*(y)$ – оптимальное решение задачи клиентов:

$$\min_X \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} g_{ij}x_{ij} \tag{4}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \quad j\in J, \tag{5}$$

$$x_{ij} \le y_i, \quad i\in I, \quad j\in J, \tag{6}$$

$$x_{ij}\in\{0,1\}, \quad i\in I, \quad j\in J. \tag{7}$$

Величина $\overline{F}(y,X^*) = \sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} c_{ij}x^*_{ij}(y)$ имеет смысл суммарных транспортных расходов, которые нужно минимизировать выбором набора из p предприятий. Этот набор описывается вектором y. Внутренняя экстремальная задача моделирует поведение клиентов, каждый из которых выбирает предприятие среди открытых согласно собственным предпочтениям. Этот выбор представляет матрица X. Для каждого значения переменной y выбор X, вообще говоря, может быть не единственным. В частности, можно рассматривать кооперативные и антикооперативные стратегии, когда назначения в матрице X приводят к минимизации или максимизации значения величины $\overline{F}(y,X^*)$ на множестве оптимальных решений задачи (4)–(7).

Лемма 1 *Задача МПК в кооперативной (антикооперативной) постановке сводится к задаче МПК с условием единственности выбора клиентов.*

Для более общего случая, когда о поведении клиентов заранее ничего не известно, в работе доказана лемма, которая указывает интервал, которому принадлежит значение целевой функции задачи с условием неоднозначности выбора клиентов. Далее рассматривается только случай, когда для любого решения y существует единственное оптимальное решение X^*. Гарантировать это свойство можно, например, если для каждого $j\in J$ выполняется условие $g_{ij}\ne g_{kj}$. Другими словами, каждый клиент для любой пары предприятий может сказать, какое из них для него предпочтительнее. В этом случае целевая функция $\overline{F}(y,X^*)$ однозначно определяется вектором y, и для неё вместо $\overline{F}(y,X^*)$ можно пользоваться обозначением $F(y)$. Под оптимальным решением задачи понимается вектор y^*, удовлетворяющий условиям (2),(3) и доставляющий минимум функции $F(y)$.

В разделе 1.3 приводятся необходимые определения для задач локального поиска и схема стандартного алгоритма локального спуска. Этот алгоритм начинает работу с некоторого допустимого решения y задачи (1)–(7), затем просматривает окрестность $N(y)$, и если найдено соседнее решение с лучшим значением целевой функции, то осуществляется переход к лучшему решению. В противном случае, алгоритм заканчивает работу, останавливаясь в локальном минимуме. Поведение алгоритма может сильно зависеть от правил замещения, т. е. выбора направления спуска, если таковых несколько. Исследовалось пять известных правил замещения:
1. спуск в направлении наилучшего элемента в окрестности,
2. спуск в направлении наихудшего элемента,
3. спуск в направлении первого подходящего,
4. спуск в направлении случайного элемента,
5. спуск по круговому правилу.

Предложено новое шестое правило замещения *спуск по максимальной свободе*. Под свободой понимают число соседних решений с ме́ньшим значением целевой функции. Спуск по этому правилу осуществляется в направлении того элемента, у которого на следующем шаге наибольшая свобода.

В разделе 1.4 обсуждаются результаты экспериментальных исследований.

Пункт 1.4.1 посвящён вычислительным экспериментам для сравнения правил замещения по точности и числу итераций при получении локальных оптимумов. Эксперименты показали, что первое правило приводит к наибольшей погрешности. Остальные правила, кроме последнего, дают примерно одинаковые результаты. Наименьшая погрешность соответствует новому правилу максимальной свободы, которое является более трудоёмким, чем предыдущие. Что касается зависимости среднего числа шагов локального спуска от размерности задачи, то для всех правил, исключая второе, оно растёт почти как линейная функция. Второе правило приводит к наибольшему числу шагов локального спуска. По-видимому, правила 3,4 являются наиболее подходящими для практических расчётов.

В пункте 1.4.2 исследуются свойства ландшафта задачи и взаимное расположение локальных оптимумов. Изучение этого вопроса необходимо, чтобы понять и предугадать поведение приближённых алгоритмов, использующих локальный поиск. А именно, как быстро можно перейти от одного локального оптимума к другому? Как много шагов с ухудшением нужно сделать, чтобы алгоритмом локального спуска можно было получить другой (лучший) локальный оптимум? Правда ли, что из "плохого" локального оптимума легко найти путь к "хорошему"? Результаты экспериментов из этого раздела, говорят о том, что ландшафт устроен таким образом, что стоит сделать один шаг с ухудшением даже из хорошего локального оптимума (погрешность меньше 5%) и можно получить лучший локальный оптимум достаточно далеко от исходного. Эти результаты означают также, что использование больших окрестностей, типа окрестности Лина-Кернигана, позволит алгоритму "выбраться" из произвольного локального оптимума с большой погрешностью и найти решение лучшего качества.

В пункте 1.4.3 аналогичные исследования проводятся для классической задачи о p-медиане.

Во **второй главе** проводится теоретический анализ вычислительной и временной сложности алгоритма локального поиска.

В разделе 2.1 вводится описание класса PLS [8], сводимости задач в этом классе, приводится список известных PLS-полных задач, среди которых присутствует классическая задача о p-медиане с окрестностью N_{FM_1}.

В разделе 2.2 обсуждается временна́я сложность алгоритмов локального поиска. Приводится следствие из результатов полученных для задачи о p-медиане, которое показывает, что нахождение локального минимума в задаче МПК с рядом полиномиальных окрестностей является PSPACE-полной задачей.

В разделе 2.3 приводится обзор известных результатов, которые показывают кардинальное отличие поведения алгоритма локального поиска в худшем случае от поведения в среднем при определённых условиях на распределения значений целевой функции задачи. Для задач размещения, в частности, для рассматриваемой в диссертации задачи пока не удаётся найти нетривиальных распределений, удовлетворяющих приведённым условиям, и вопрос о получении верхней оценки на среднее число шагов алгоритма локального спуска с различными полиномиальными окрестностями остаётся открытым.

Раздел 2.4 посвящён обзору известных теоретических результатов, касающихся качества локальных оптимумов, как приближённых решений оптимизационной задачи. Эти результаты остаются верными и для задачи МПК.

В разделе 2.5 установлена связь между локально-седловыми точками функции Лагранжа и локальными оптимумами задачи по окрестности N_1. Приводится свед́ение задачи МПК к задаче минимизации полинома от булевых переменных. Впервые такое свед́ение было предложено В. Л. Бересневым для простейшей задачи размещения [1]. В работе Л.Е. Горбачевской [2] аналогичное свед́ение предложено для задачи МПК с дополнительным ограничением на число открываемых предприятий.

Упорядочим каждый столбец $j \in J$ по возрастанию: $g_{i_1^j j} < g_{i_2^j j} < \ldots < g_{i_m^j j}$. Пусть $S_{ij} = \{k \in I | g_{kj} < g_{ij}\}, i \in I, j \in J$. Обозначим $\nabla c_{i_1^j j} = c_{i_1^j j}$, $\nabla c_{i_l^j j} = c_{i_l^j j} - c_{i_{l-1}^j j}$, $1 < l \leq m$, $z_i = 1 - y_i, i \in I, j \in J$. Рассмотрим следующую задачу: найти минимум полинома

$$P(z) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \nabla c_{ij} \prod_{k \in S_{ij}} z_k \tag{8}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} z_i = m - p, \tag{9}$$

$$z_i \in \{0, 1\}, i \in I. \tag{10}$$

Задача МПК с условием однозначности выбора клиентов эквивалентна задаче минимизации полинома от булевых переменных (8)-(10).

Свед́ение задачи МПК к задаче о полиноме используется для того, чтобы сформулировать условия оптимальности Куна-Таккера, а также показать связь локально-оптимальных решений с локально-седловыми точками функции Лагранжа. Это свед́ение и результаты о PLS-полноте задачи МПК свидетельствуют о том, что нахождение локально-седловых точек функции Лагранжа оказывается не менее простой задачей, чем нахождение локальных оптимумов.

Заменим ограничения (10) на ограничение $0 \leq z_i \leq 1, i \in I$ и выпишем для релаксированной задачи функцию Лагранжа с множителями $\lambda, \mu_i \geq 0, \sigma_i \geq 0, i \in I$:

$$L(z, \lambda, \mu, \sigma) = P(z) + \lambda(m - p - \sum_{i \in I} z_i) + \sum_{i \in I} \sigma_i (z_i - 1) - \sum_{i \in I} \mu_i z_i.$$

Окрестность $N_1(z)$ состоит из допустимых решений, которые находятся от z на расстоянии Хэминга равном двум.

Определение 14. *Вектор $(z^*, \lambda^*, \mu^*, \sigma^*)$ называется седловой точкой относительно окрестности N_1, если*

$$L(z^*, \lambda, \mu, \sigma) \leq L(z^*, \lambda^*, \mu^*, \sigma^*) \leq L(z, \lambda^*, \mu^*, \sigma^*)$$

для любых $\lambda, \mu \geq 0, \sigma \geq 0$ *и любого вектора из окрестности* $N_1(z^*)$.

Обозначим через $P_i^{'}(z)$ частную производную от функции $P(z)$ по переменной z_i. Тогда условия оптимальности Куна-Таккера имеют вид:

$$\frac{\partial L}{\partial z_i}(z, \lambda, \mu, \sigma) = P_i^{'}(z) - \lambda + \sigma_i - \mu_i, i \in I, \tag{11}$$

$$\sum_{i \in I} z_i = m - p, \tag{12}$$

$$0 \leq z_i \leq 1, i \in I, \tag{13}$$

$$\sigma_i(z_i - 1) = 0, i \in I, \tag{14}$$

$$\mu_i z_i = 0, i \in I. \tag{15}$$

Теорема 10. *Для любого допустимого решения* y^* *задачи МПК следующие утверждения эквивалентны:*
1) существуют множители Лагранжа $\lambda^*, \mu_i^* \geq 0, \sigma_i^* \geq 0, i \in I$ *такие, что вектор* $(z(y^*), \lambda^*, \mu^*, \sigma^*)$ *является седловой точкой относительно окрестности* N_1 *функции* L*;*
2) y^* *является локальным оптимумом относительно окрестности* N_1*;*
3) $z(y^*)$ *удовлетворяет условиям Куна-Таккера.*

В третьей главе для получения нижних оценок оптимума рассматриваются четыре уже известных сведе́ния задачи МПК к задачам ЦЛП и предлагается два новых сведе́ния, одно из которых доминирует остальные по значению целевой функции линейной релаксации.

Определим для каждого столбца $j \in J$ матрицы (g_{ij}) перестановку $(i_1^j, ..., i_m^j)$:

$$g_{i_1^j j} < g_{i_2^j j} < \cdots < g_{i_m^j j} \tag{16}$$

и множество $T_{ij} = \{k \in I \mid g_{kj} > g_{ij}\}$, $i \in I$. Задачу поиска оптимального решения внутренней задачи клиентов (4)–(7) можно заменить следующими неравенствами:

$$y_k \leq 1 - x_{ij}, \ \ k \in S_{ij}, i \in I, j \in J. \tag{17}$$

Отбрасывая условия булевости переменных в задаче (1)–(7) и заменяя задачу клиентов указанным неравенством, получаем линейную релаксацию задачи. Обозначим через LB_1 её оптимальное значение. Задачу клиентов можно также заменить неравенствами:

$$\sum_{k \in S_{ij}} y_k \leq |S_{ij}|(1 - x_{ij}), \quad i \in I, j \in J. \tag{18}$$

или

$$y_i \leq x_{ij} + \sum_{k \in S_{ij}} y_k, \quad i \in I, j \in J, \tag{19}$$

Обозначим через LB_2 и LB_3 оптимальные значения линейных релаксаций задач с этими ограничениями, соответственно. Приведённые нижние оценки были предложены в [2]. В данной работе предлагается новая формулировка в виде задачи булева линейного программирования с ограничением

$$y_i \leq x_{ij} + \sum_{k \in S_{ij}} x_{kj}, \quad i \in I, j \in J. \tag{20}$$

Обозначим новую нижнюю оценку LB_4. В пункте 3.1.1 доказана следующая теорема.

Теорема 11. $LB_4 \geq \max(LB_1, LB_2, LB_3)$.

Известно [3], что для задачи (1)–(7) можно построить сведе́ние к задаче о паре матриц с дополнительным ограничением на число выбираемых строк.

Представим матрицу (c_{ij}) в виде суммы двух матриц $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i \in I, j \in J$, где

$$a_{i_k^j j} = \sum_{l=1}^{k-1} \min\{0; c_{i_{l+1}^j j} - c_{i_l^j j}\}, k = 1, \ldots, m, j \in J, \tag{21}$$

$$b_{i_k^j j} = c_{i_1^j j} + \sum_{l=1}^{k-1} \max\{0; c_{i_{l+1}^j j} - c_{i_l^j j}\}, k = 1, \ldots, m, j \in J, \tag{22}$$

и перестановка $(i_1^j, \ldots, i_m^j), j \in J$ соответствует (16). Тогда задача (1)–(7) может быть записана в следующем виде:

$$\min_{S \subset I, |S| = p} \sum_{j \in J} \max_{i \in S} a_{ij} + \sum_{j \in J} \min_{i \in S} b_{ij}.$$

Для получения нижней оценки эту задачу можно переписать в терминах булева линейного программирования и вычислить оптимум в линейной релаксации. Однако такое представление может оказаться неединственным. Разные представления могут приводить к разным нижним оценкам.

В разделе 3.1.3 предлагается новое представление в виде задачи о паре матриц, которое позволяет находить нижнюю оценку не хуже, чем LB_4.

Для j-го столбца матрицы (c_{ij}) и соответствующей (16) перестановки $(i_1^j, ..., i_m^j)$ вычислим величины

$$\Delta_l^j = \min\{0; c_{i_{l+1}^j j} - c_{i_l^j j}\}, l = 1, \dots, m-1.$$

Пусть $L_j = \{l \in \{1, \dots, m-1\} \mid \Delta_l^j < 0\}$. Введем дополнительные переменные $v_l^j \in \{0, 1\}$, $l \in L_j$, $j \in J$ и представим задачу о паре матриц следующим образом: найти

$$\min(\{\sum_{j \in J} \sum_{l \in L_j} -\Delta_l^j v_l^j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} b_{ij} x_{ij}\} + \sum_{j \in J} \sum_{l \in L_j} \Delta_l^j) \tag{23}$$

при ограничениях:

$$y_i \leq x_{ij} + \sum_{k \in S_{ij}} x_{kj}, \ i \in I, \ j \in J, \tag{24}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \ j \in J, \tag{25}$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p, \tag{26}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq y_i, \ i \in I, \ j \in J, \tag{27}$$

$$v_l^j \geq \sum_{i \notin T_{i_l^j j}} x_{ij'}, \ l \in L_j, \ j \in J, \ j' \in J, \tag{28}$$

$$v_l^j, y_i, x_{ij} \in \{0, 1\}, \ l \in L_j, \ j \in J, \ i \in I. \tag{29}$$

Обозначим через LB_6 оптимальное значение линейной релаксации этой задачи.

Теорема 13. $LB_6 \geq LB_4$.

Следующая теорема показывает, что новая нижняя оценка LB_6 может в произвольное число раз отличаться от нижней оценки LB_4.

Теорема 14. *Для любого $N > 0$ существуют такие исходные данные задачи (1)–(7), что $LB_6/LB_4 \geq N$.*

Раздел 3.2 посвящён описанию адаптации процедуры Резенде, Вернека [7] применительно к задаче МПК, которая будет использоваться в дальнейшем при разработке генетического локального поиска. Эта процедура позволяет эффективно, с трудоемкостью $O(max(n, p)m)$, находить парную замену предприятий в алгоритме локального спуска при просмотре окрестности.

Раздел 3.3 посвящен генетическим алгоритмам. Описание общей схемы генетического алгоритма приводится в пункте 3.3.1.

В пункте 3.3.2 предлагается генетический локальный поиск для решения задачи МПК, рассматриваются стандартные операторы селекции, скрещивания и мутации применительно к этой задаче. Начальная популяция формируется из локально-оптимальных решений задачи. Это может заметно сократить время достижения глобального оптимума. Для улучшения качества решения полученного в результате действия операторов скрещивания и мутации к решению применяется стандартная процедура локального спуска сначала по окрестности N_1, а затем по окрестности Лина-Кернигана.

В пунктах 3.3.3 и 3.3.4 приводится описание экспериментальных исследований о влиянии различных операторов в генетическом алгоритме на результат его работы. Проводилось сравнение различных операторов скрещивания по скорости сходимости и качеству получаемого локального оптимума при различных видах селекции. Тестовые примеры принадлежат классу GAP-C, который является одним из самых сложных классов тестовых задач электронной библиотеки "Дискретные задачи размещения" [9] и нахождение точного решения задачи с помощью коммерческого программного обеспечения оказалось трудоёмким процессом. В ходе тестирования генетического алгоритма наилучшие результаты показал равномерный оператор, который доминирует во всех экспериментах на данном классе другие операторы скрещивания. Его успех, наверное, объясняется необычайной сложностью класса тестовых примеров, где нахождение глобального оптимума или хорошего приближения представляется весьма сложным делом. Также исследовалось поведение операторов скрещивания в зависимости от вероятности мутации. Оказалось, что повышение вероятности мутации приводит к сглаживанию различий между операторами скрещивания, и даже отсутствие скрещивания при наличии высокой вероятности мутации приводит к хорошим результатам. Тем не менее, удаление из алгоритма операторов скрещивания не является оправданным. Для примеров Резенде и Вернека [10] большой размерности, $n = m = 500$, $p = 50$, генетический алгоритм с любым из рассмотренных операторов скрещивания даёт лучшие результаты, чем без этих операторов.

В пункте 3.3.5 проводится сравнение нижних оценок LB_4, LB_6, нижней оценки LB_7, полученной точным решением задачи о p-медиане без учёта предпочтений клиентов, с верхней оценкой, полученной разработанным генетическим алгоритмом и оптимальным решением Opt задачи МПК, найденным методом ветвей и отсечений коммерческим пакетом XPress. Рассчитывается величина разрыва между Opt и наилучшей нижней оценкой LB_7. Экперименты показали, что добавление предпочтений в задачу о p-медиане усложняет её, об этом свидетельствует существенный разрыв между LB_7 и Opt.

В четвёртой главе приводится описание системы поддержки принятия решений (СППР), разработанной в ходе выполнения в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН прикладной НИР по заказу крупной компании, выпускающей машины для сельского хозяйства. Интеллектуальным ядром СППР является математическая модель двухуровневого булева программирования, тесно связанная с задачей МПК. Использование разработанной СППР позволило сократить номенклатуру выпускаемых сельскохозяйственных машин и увеличить прибыль компании.

В разделе 4.1 приводится описание задачи оптимизации парка сельскохозяйственных машин на содержательном уровне. Известен список $I = \{1, \ldots, m\}$ типов машин, выпуском которых занимается компания, а также множество $J = \{1, \ldots, n\}$ групп клиентов, покупающих эти машины. Под группой клиентов подразумеваются покупатели, объединённые общими производственными целями (например, выращивание зерна в черноземной зоне) и характеризующиеся одинаковым поведением на рынке сельхозтехники. В частности, покупатели из одной группы предпочитают один и тот же тип машин, если он есть в продаже, или готовы заменить его на другой согласно предпочтениям, одинаковым для всех покупателей из данной группы, если этот тип отсутствует.

Одним из важных моментов в модели является определение приоритетов каждой группы клиентов по отношению к различным типам машин, а также поведение клиентов на рынке при новом предложении. Раздел 4.2 посвящён описанию этого вопроса.

Раздел 4.3 содержит математическую модель этой задачи. Отличие от задачи МПК состоит, во-первых, в том, что задачи на верхнем и нижнем уровнях являются задачами максимизации. Во-вторых, в новой задаче отсутствует требование обслужить всех клиентов. В-третьих, заранее не известно число выпускаемых типов машин (отсутствует ограничение 2).

В разделе 4.4 приводится сведéние задачи оптимизации парка сельскохозяйственных машин к задаче МПК. Завершает четвёртую главу раздел 4.4 с описанием компьютерной СППР, в основе которой лежит разработанный в третьей главе генетический алгоритм.

В заключении приводится перечень основных результатов диссертации. Исследована новая задача о p-медиане с предпочтениями клиентов. Экспериментально установлено, что алгоритмы локального спуска в среднем приводят к решениям с малой относительной погрешностью, хотя в худшем случае такая погрешность может оказаться сколь угодно большой величиной. Исследовано влияние различных правил замещения на число итераций алгоритма локального спуска и погрешность получаемых локальных оптимумов. Предложено новое правило замещения приводящее к решениям с меньшей погрешностью, чем другие известные правила.

Установлено, что целочисленное решение задачи о p-медиане с предпочтениями клиентов является локальным оптимумом для окрестности N_1 тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условиям Куна-Такера. Показано, что эти условия равносильны существованию множителей Лагранжа, для которых целочисленное решение исходной задачи является локально-седловой точкой относительно окрестности N_1.

Для решения задачи о p-медиане с предпочтениями клиентов разработан генетический алгоритм локального поиска. Исследованы шесть формулировок задачи в виде задачи булева линейного программирования. Показано, что одна из этих формулировок приводит к лучшей нижней оценке, чем остальные.

Для задачи оптимизации парка сельскохозяйственных машин разработана система поддержки принятия решений, интеллектуальным ядром которой является математическая модель задачи о p-медиане с предпочтениями клиентов на максимум. Проведённые тестовые расчёты на реальных исходных данных показали высокую эффективность разработанного математического аппарата.

Список литературы

1. Береснев В. Л. Об одном классе задач оптимизации параметров однородной технической системы // Управляемые системы. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1971. Вып. 9. С. 65–74.

2. Горбачевская Л. Е. Полиномиально разрешимые и NP-трудные двухуровневые задачи стандиртизации. Канд. диссер. физ.- мат. наук, Институт математики им. С.Л.Соболева. Новосибирск, 1998.

3. Горбачевская Л. Е., Дементьев В. Т., Шамардин Ю. В. Двухуровневая задача стандартизации с условием единственности оптимального потребительского выбора // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1999. Т. 6, № 2. С. 3–11.

4. Кочетов Ю. А., Пащенко М. Г., Плясунов А. В. О сложности локального поиска в задаче о p-медиане. Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2005. Т. 12, № 2. С. 44–71.

5. Hanjoul P., Peeters D. A facility location problem with clients' preference orderings // Regional Science and Urban Economics. 1987. V. 17, Issue 3. P. 451–473.

6. Papadimitriou C. H. Theory of comlexity. Addison Wesley, 1994.

7. Resende M., Werneck R. On the implementation of a swap-based local search procedure for the p-median problem // Proceedings of the Fifth Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX'03). Edited by Richard E. Ladner. SIAM. Philadelphia. 2003. P. 119–127.

8. Yannakakis M. Computational complexity. Local Search in Combinatorial Optimization. Aarts E. and Lenstra J. K. (Eds.) Chichester: John Wiley and Sons. 1997. P. 19–55.

9. http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/index.html

10. http://www.research.att.com/ mgcr/data/index.html

Публикации автора по теме диссертации

11. Алексеева Е., Кочетов Ю. Генетический локальный поиск для задачи о p-медиане с предпочтениями клиентов // Дискр. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2007. Т. 14, № 1. С. 3–31.

12. Алексеева Е. Правила выбора направления в алгоритме локального спуска для задачи о p-медиане // Тезисы III Всероссийской конференции "Проблемы оптимизации и экономические приложения", Омск, Россия, 2006. С. 71.

13. Алексеева Е. Правила замещения в алгоритме локального спуска для задачи о p-медиане // Труды ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, Россия, 2007 (в печати).

14. Алексеева Е., Кочетов Ю. Сравнение алгоритмов лагранжевой релаксации и вероятностного округления для задачи о p-медиане // Материалы II Всероссийской конференции "Проблемы оптимизации и экономические приложения", Омск, Россия, 2003. С. 73.

15. Алексеева Е., Кочетов Ю., Кочетова Н. Критические параметры для задачи размещения с неограниченными мощностями // Труды XIII Байкальской международной школы-семинара. Том 1. Математическое программирование. Иркутск. 2005. С. 407–412.

16. Алексеева Е., Кочетов Ю., Плясунов А. Генетический алгоритм для двухуровневой задачи о p-медиане // Тезисы Российской конференции "Дискретный анализ и исследование операций", 2004. С. 179.

17. Alekseeva E., Fokin M., Kochetov Yu. and others. Configuration profit tool and configuration optimizer. User's manual. Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics. 2004.

18. Alekseeva E., Kochetov Yu. A memetic algorithm for the p-median problem with user preferences// Abstracts of 22nd European Conference on Operational Research. Czechia (Prague), 2007. P. 118.

19. Alekseeva E., Kochetov Yu. Large neighborhood search for the p-median problem // Proceedings SYM-OP-IS 2003, Herceg-Novi, Montenegro, 2003. P. 19–21.

20. Alekseeva E., Kochetov Y., Levanova T., Loresh M. Large neighborhood local search for the p-median problem // Yugoslav Journal of Operations Research. 2005. Volume 15 (1). P. 53–63.

21. Alekseeva E., Kochetov Yu., Plyasunov A. Complexity of local search for the p-median problem // Extended Abstracts of 18th Mini Euro Conference on VNS. Tenerife (Spain), 2005.

22. Alekseeva E., Kochetov Yu., Plyasunov A. Complexity of local search for the p-median problem // European Journal of Operational Research, 2007, doi:10.1016/j.ejor.2006.12.063.

Алексеева Екатерина Вячеславовна

Алгоритмы локального поиска для задачи
о p-медиане с предпочтениями клиентов

Автореферат диссертации на соискание
учёной степени кандидата физико-математических наук

Подписано в печать тогда-то. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,0.
Тираж 80 экз. Заказ № такой-то.

Отпечатано в ООО "Омега Принт"
630090 Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6.