ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 1998. Серия 2. Том 5, № 2, 3–19

УДК 519.87

ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ПОЛИНОМОВ ОТ БУЛЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ*)

В. Л. Береснев, Е. Н. Гончаров

Рассматриваются задача минимизации полиномов от булевых переменных и эквивалентные ей задача выбора множества строк и двухуровневая задача размещения. Для решения этих задач предлагается приближенный алгоритм, включающий получение нижней оценки значений целевых функций рассматриваемых задач. Алгоритм вычисления нижней оценки обобщает известную процедуру подъема для простейшей задачи размещения и состоит в построении так называемой тупиковой матрицы. Приближенное решение получается с использованием свойств этой матрицы. Приводятся результаты численных экспериментов с алгоритмом, демонстрирующие точность получаемых приближенных решений.

Введение

Известна (см., например, [1, 4]) тесная взаимосвязь между задачей размещения производства и задачей минимизации полиномов от булевых переменных с неотрицательными коэффициентами.

Пусть $I = \{1, \dots, m\}$ и $J = \{1, \dots, n\}$. Простейшая задача размещения чаще всего формулируется либо в виде задачи отыскания минимума функции

$$f_0(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} \min_{i | x_i = 1} c_{ij}$$

от булевых переменных, либо в виде задачи линейного целочисленного программирования:
найти минимум

$$\sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96–01–01591, 97–01–00890, 98–07–90259).

при ограничениях

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J;$$
$$x_i \geqslant x_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J;$$
$$x_i, x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, \quad j \in J.$$

Задача минимизации полиномов от булевых переменных с неотрицательными коэффициентами заключается в отыскании наименьшего значения функции $p_0(y_1, \dots, y_m)$ от булевых переменных, представленной в виде

$$p_0(y_1, \dots, y_m) = a_0 + \sum_{i\in I} a_i(1 - y_i) + \sum_{s=1}^{S} b_s \prod_{i\in\beta_s} y_i,$$

где $\beta_s \subset I$, $b_s \geqslant 0$, $s = 1, \dots, S$.

Указанная взаимосвязь между тремя приведенными задачами заключается не только в том, что они эквивалентны, но и в том, что они имеют одинаковую форму задания исходных данных, использующую так называемую характеристическую матрицу [3]. Поэтому можно говорить не о трех разных задачах, а о различных формах записи одной и той же задачи. Для простейшей задачи размещения известен [1, 4, 6–8] способ получения нижней оценки для значений целевой функции (названный в [8] процедурой подъема), состоящий в построении так называемой тупиковой матрицы [1, 2, 4].

В настоящей работе рассматриваются обобщения трех приведенных задач. Этими обобщениями являются соответственно задача выбора множества строк, двухуровневая задача размещения и задача минимизации полиномов от булевых переменных с коэффициентами произвольных знаков. Эти задачи эквивалентны и могут также рассматриваться как различные формы записи одной и той же задачи. Для рассматриваемых задач предлагается алгоритм нахождения нижних оценок для значений целевых функций, обобщающий процедуру подъема. Алгоритм состоит в построении матрицы, аналогичной по свойствам тупиковой матрице в процедуре подъема и названной в силу этого также тупиковой. Предлагается, кроме того, алгоритм нахождения приближенного решения задач, основанный на использовании свойств тупиковой матрицы.

Впервые обобщенное определение тупиковой матрицы и описание общей схемы ее построения в случае задачи выбора множества строк даны в [2]. В [4] это определение уточнено и приведено подробное описание алгоритма построения тупиковой матрицы. Работа [5] посвящена построению алгоритмов нахождения нижних оценок целевой функции двухуровневой задачи размещения. С помощью вычислительных экспериментов исследуется точность нижних оценок при использовании некоторых правил построения тупиковой матрицы. Рассматриваемая в настоящей работе обобщенная процедура подъема принципиально не отличается от алгоритмов из [2, 4, 5]. Тем не менее внесенные в нее изменения оказываются существенными для получаемой нижней оценки значений целевых функций рассматриваемых задач. Об этом свидетельствуют, в частности, приводимые в заключительной части работы результаты численных экспериментов.

1. Задача выбора множества строк и задача минимизации полиномов от булевых переменных

Обозначим через I множество $\{1,\dots,m\}$, а через J' и J — соответственно множества $\{1,\dots,n'\}$ и $\{1,\dots,n\}$. Пусть $F=(f_{il})$ и $C=(c_{ij})$ — матрицы размера $m\times n'$ и $m\times n$ соответственно. *Задачей выбора множества строк* назовем задачу отыскания минимума функции

$$f(x_1,\dots,x_m)=\sum_{l\in J'}\max_{i|x_i=1} f_{il}+\sum_{j\in J}\min_{i|x_i=1} c_{ij}$$

от булевых переменных.

Понятно, что если F — диагональная матрица, то функция $f(x_1,\dots,x_m)$ совпадает с функцией $f_0(x_1,\dots,x_m)$. Следовательно, задачу выбора множества строк можно рассматривать как обобщение простейшей задачи размещения.

Задача минимизации полинома от булевых переменных состоит в отыскании наименьшего значения функции $p(y_1,\dots,y_m)$ от булевых переменных, представленной в виде

$$p(y_1,\dots,y_m)=a_0+\sum_{r=1}^{R}a_r\Big(1-\prod_{i\in\alpha_r}y_i\Big)+\sum_{s=1}^{S}b_s\prod_{i\in\beta_s}y_i,$$

где $\alpha_r\subset I$, $a_r>0$, $r=1,\dots,R$, и $\beta_s\subset I$, $b_s>0$, $s=1,\dots,S$.

В отличие от полинома $p_0(y_1,\dots,y_m)$ коэффициенты при нелинейных членах полинома $p(y_1,\dots,y_m)$ имеют произвольные знаки.

Булевы матрицы $G=(g_{ir})$ и $H=(h_{is})$ размера $m\times R$ и $m\times S$ назовем *характеристическими* матрицами полинома $p(y_1,\dots,y_m)$, если

$$g_{ir}=\begin{cases}1, & \text{если } i\in\alpha_r,\\ 0 & \text{иначе,}\end{cases}\qquad h_{is}=\begin{cases}0, & \text{если } i\in\beta_s,\\ 1 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Покажем эквивалентность задачи минимизации полинома $p(y_1,\dots,y_m)$ и задачи выбора множества строк.

Для каждого $l \in J'$ и каждого $j \in J$ рассмотрим перестановки $(i_1^l, \dots, i_m^l)$ и $(i_1^j, \dots, i_m^j)$ множества I такие, что

$$f_{i_1^l l} \leqslant f_{i_2^l l} \leqslant \dots \leqslant f_{i_m^l l},$$
$$c_{i_1^j j} \leqslant c_{i_2^j j} \leqslant \dots \leqslant c_{i_m^j j}.$$

Эти перестановки назовем *порожденными* соответственно l-м столбцом матрицы F и j-м столбцом матрицы C.

Пусть $\alpha \subset I$, $|\alpha| = k$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$, — такое подмножество, что множество

$$J'(\alpha) = \{l \in J' \mid \{i_{k+1}^l, \dots, i_m^l\} = \alpha, \quad \Delta f_{kl} > 0\}$$

не пусто. Множество α назовем *характеристическим множеством* матрицы F, а величину $\sum\limits_{l \in J'(\alpha)} \Delta f_{kl}$ — коэффициентом *характеристического* множества α. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_R$ — все характеристические множества матрицы F. Булеву матрицу $G = (g_{ir})$ размера $m \times R$ назовем *характеристической* для матрицы F, если

$$g_{ir} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in \alpha_r, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отметим, что число характеристических множеств матрицы F, а следовательно, и число столбцов характеристической матрицы G зависит, в частности, от количества различных элементов в каждом столбце матрицы F. Если число таких элементов ограничено величиной M, то количество характеристических множеств не превосходит величины $(M-1)n$.

Аналогичным образом определим характеристическую матрицу для матрицы C. Пусть $\beta \subset I$, $|\beta| = k$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$, — такое подмножество, что множество

$$J(\beta) = \{j \in J \mid \{i_1^j, \dots, i_k^j\} = \beta, \quad \Delta c_{kj} \neq 0\}$$

не пусто. Множество β назовем *характеристическим множеством* матрицы C, а величину $\sum\limits_{j \in J(\beta)} \Delta c_{kj}$ — *коэффициентом* характеристического множества β. Пусть $\beta_1, \dots, \beta_S$ — все характеристические множества матрицы C. Булеву матрицу $H = (h_{is})$ размера $m \times S$ назовем *характеристической* для матрицы C, если

$$h_{is} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \in \beta, \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Справедлива (см. [1, 4]) следующая лемма, позволяющая переписать задачу выбора множества строк в виде задачи минимизации полиномов от булевых переменных.

Лемма 1. *Пусть* $(i_1^l,\dots,i_m^l)$ *и* $(i_1^j,\dots,i_m^j)$ *— перестановки, порожденные соответственно l-м столбцом матрицы F и j-м столбцом матрицы C. Тогда для каждого ненулевого булева вектора $(x_1,\dots,x_m)$ справедливы равенства*

$$\max_{i|x_i=1} f_{il} = -\sum_{k=1}^{m-1}\Delta f_{kl}(1-x_{j_{k+1}^l})\dots(1-x_{i_m^l})+f_{i_m^l l},$$

$$\min_{i|x_i=1} c_{ij} = c_{i_1^j j}+\sum_{k=1}^{m-1}\Delta c_{kj}(1-x_{i_1^j})\dots(1-x_{i_k^j}).$$

Используя приведенные равенства, функцию $f(x_1,\dots,x_m)$ перепишем следующим образом:

$$f(x_1,\dots,x_m)=\sum_{l\in J'}\Big(-\sum_{k=1}^{m-1}\Delta f_{kl}(1-x_{i_{k+1}^l})\dots(1-x_{i_m^l})+f_{i_m^l l}\Big)$$
$$+\sum_{j\in J}\Big(c_{i_1^j j}+\sum_{k=1}^{m-1}\Delta c_{kj}(1-x_{i_1^j})\dots(1-x_{i_k^j})\Big).$$

Отсюда получаем, что по паре матриц (F,C) может быть построен полином от булевых переменных

$$\begin{aligned}
p(y_1,\dots,y_m)&=\sum_{l\in J'}\Big(f_{i_1^l l}+\sum_{k=1}^{m-1}\Delta f_{kl}-\sum_{k=1}^{m-1}\Delta f_{kl}y_{i_{k+1}^l}\dots y_{i_m^l}\Big)\\
&+\sum_{j\in J}\Big(c_{i_1^j j}+\sum_{k=1}^{m-1}\Delta c_{kj}y_{i_1^j}\dots y_{i_k^j}\Big)\\
&=\sum_{l\in J'}f_{i_1^l l}+\sum_{j\in J}c_{i_1^j j}+\sum_{l\in J'}\sum_{k=1}^{m-1}\Delta f_{kl}(1-y_{i_{k+1}^l}\dots y_{i_m^l})\\
&+\sum_{j\in J}\sum_{k=1}^{m-1}\Delta c_{kj}y_{i_1^j}\dots y_{i_k^j}\\
&=\sum_{l\in J'}f_{i_1^l l}+\sum_{j\in J}c_{i_1^j j}+\sum_{r=1}^{R}\alpha_r\Big(1-\prod_{i\in\alpha_r}g_i\Big)+\sum_{s=1}^{S}\beta_s\prod_{i\in\beta_s}y_i.
\end{aligned}$$

Полином $p(y_1,\dots,y_m)$ назовем *соответствующим* паре матриц (F,C). Отметим, что характеристические матрицы этого полинома являются характеристическими соответственно для матриц F и C, а коэффициенты — коэффициентами соответствующих характеристических множеств матриц F и C. Отметим также, что по построению полинома $p(y_1, \dots, y_m)$ булевый вектор $(y_1^*, \dots, y_m^*)$ является оптимальным решением задачи минимизации этого полинома тогда и только тогда, когда булевый вектор $(x_1^*, \dots, x_m^*)$, где $x_i^* + y_i^* = 1$, $i \in I$, является оптимальным решением задачи минимизации функции $f(x_1, \dots, x_m)$. Таким образом, задача выбора множества строк сводится к задаче минимизации полиномов от булевых переменных.

Укажем обратную сводимость. Рассмотрим полином от булевых переменных

$$p(y_1, \dots, y_m) = a_0 + \sum_{r=1}^{R} a_r \Big(1 - \prod_{i \in \alpha_r} y_i\Big) + \sum_{s=1}^{S} \beta_s \prod_{i \in \beta_s} y_i.$$

Не умаляя общности, считаем, что $a_0 = 0$. Пусть $G = (g_{ir})$ и $H = (h_{is})$ — характеристические матрицы данного полинома. Рассмотрим матрицы $F = (a_r g_{ir})$, $C = (b_s h_{is})$ и заметим, что исходный полином является соответствующим паре (F, C). Поэтому если $(x_1^*, \dots, x_m^*)$ — оптимальное решение задачи выбора множества строк с матрицами F, C, то $(y_1^*, \dots, y_m^*)$, где $x_i^* + y_i^* = 1$ при любом $i \in I$, — оптимальное решение задачи минимизации полинома $p(y_1, \dots, y_m)$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Задача минимизации полиномов от булевых переменных и задача выбора множества строк эквивалентны.*

Будем говорить, что пара матриц (F, C) и пара матриц (F', C') *эквивалентны*, если этим парам соответствуют полиномы, отличающиеся только на константу. Из сказанного выше следует, что если пары матриц (F, C) и (F', C') эквивалентны, то оптимальные решения задач выбора множества строк с матрицами F, C и с матрицами F', C' совпадают.

2. Нижняя оценка для значений полинома от булевых переменных

Пусть имеется полином

$$p(y_1, \dots, y_m) = \sum_{r=1}^{R} a_r \Big(1 - \prod_{i \in \alpha_r} y_i\Big) + \sum_{s=1}^{S} b_s \prod_{i \in \beta_s} y_i$$

с характеристическими матрицами $G = (g_{ir})$ и $H = (h_{is})$. Рассмотрим матрицу $F = (a_r g_{ir})$ размера $m \times R$ и матрицу $C = (c_{ij})$ размера $m \times n$ с нулевым наименьшим элементом в каждом столбце, с характеристической матрицей H и с характеристическими коэффициентами b_s, $s = 1, \dots, S$. Полином $p(y_1, \dots, y_m)$ соответствует паре матриц

$(\overline{F}, C)$, поэтому наименьшее значение полинома $p(y_1, \dots, y_m)$ равняется наименьшему значению целевой функции

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{r=1}^{R} \max_{i|x_i=1} a_r g_{ir} + \sum_{j=1}^{n} \min_{i|x_i=1} c_{ij}$$

задачи выбора множества строк матриц F и C.

Обозначим через J множество $\{1, \dots, n\}$. Матрицу $W = (w_{ij})$ размера $m \times n$ назовем *оценочной*, если

$$f(x_1, \dots, x_m) \geqslant H(W) = \sum_{j \in J} \min_{i \in I} w_{ij}$$

для любого ненулевого булева вектора $(x_1, \dots, x_m)$.

Очевидно, матрица C — оценочная, а величина $H(C)$ является тривиальной нижней оценкой для значений функции $f(x_1, \dots, x_m)$ и полинома $p(y_1, \dots, y_m)$. Укажем на способ, аналогичный процедуре подъема [1, 4, 8] для простейшей задачи размещения, позволяющий построить оценочную матрицу, дающую нижнюю оценку лучше тривиальной.

Зафиксируем элементы r_0, $1 \leqslant r_0 \leqslant R$, $j_0 \in J$, и величину v_0, $0 \leqslant v_0 \leqslant f_{r_0}$. Справедлива следующая

Лемма 2. *Для каждого непустого подмножества $I_1 \subset I$ выполняется неравенство*

$$\max_{i \in I_1} f_{r_0} g_{ir_0} + \min_{i \in I_1} c_{ij_0} \geqslant \max_{i \in I_1} (f_{r_0} - v_0) g_{ir_0} + \min_{i \in I_1} (c_{ij_0} + v_0 g_{ir_0}).$$

Доказательство. Если $I_1 \cap \alpha_{r_0} = \varnothing$, то неравенство выполняется как равенство. Если же $I_1 \cap \alpha_{r_0} \neq \varnothing$, то справедливы соотношения

$$\max_{i \in I_1} (f_{r_0} - v_0) g_{ir_0} = f_{r_0} - v_0 = \max_{i \in I_1} f_{r_0} g_{ir_0} - v_0,$$
$$\min_{i \in I_1} (c_{ij_0} + v_0 g_{ir_0}) \leqslant \min_{i \in I_1} (c_{ij_0} + v_0) = \min_{i \in I_1} c_{ij_0} + v_0,$$

доказывающие требуемое неравенство.

Из леммы 2 следует, что если матрица $V = (v_{rj})$ размера $R \times n$ такова, что ее элементы удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{j \in J} v_{rj} \leqslant f_r, \quad r = 1, \dots, R;$$
$$v_{rj} \geqslant 0, \quad r = 1, \dots, R, \quad j \in J,$$

то матрица $W = (w_{ij})$, где

$$w_{ij} = c_{ij} + \sum_{r=1}^{R} g_{ir} v_{rj}, \quad i \in I, \quad j \in J,$$

является оценочной. Такую матрицу W назовем *матрицей, порожденной матрицей* V.

Как следует из определения, матрица W, порожденная матрицей V, получается в результате добавления к j-му столбцу матрицы C, $j \in J$, столбцов матрицы $\overline{F}$, взятых с соответствующими коэффициентами v_{rj}/f_r, $r = 1, \ldots, R$. Таким образом, матрица W есть результат «переноса ресурсов» матрицы $\overline{F}$ в матрицу C. При этом элементы матрицы V играют регулирующую роль, показывая, какая «доля» r-го столбца матрицы $\overline{F}$ добавляется к j-му столбцу матрицы C.

Отметим, что доказательство того, что матрица W, порожденная матрицей V, является оценочной, можно получить, если исходить не из задачи выбора множества строк, а из эквивалентной ей двухуровневой задачи размещения [4, 5]. Эта задача является обобщением простейшей задачи размещения и записывается следующим образом:
найти минимум

$$\sum_{r=1}^{R} f_r z_r + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij}$$

при условиях

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J;$$

$$z_r \geqslant \sum_{i\in I} g_{ir}x_{ij}, \quad j \in J, \quad r = 1, \ldots, R;$$

$$x_{ij}, z_r \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad r = 1, \ldots, R.$$

Релаксируем данную задачу, заменив условия булевости переменных на условия их неотрицательности, и запишем задачу, двойственную к полученной, следующим образом:
найти максимум

$$\sum_{j\in J} \min_{i\in I} \left\{ c_{ij} + \sum_{r=1}^{R} g_{ir}v_{rj} \right\}$$

при условиях

$$f_r \geqslant \sum_{j\in J} v_{rj}, \quad r = 1, \ldots, R;$$

$$v_{rj} \geqslant 0, \quad r = 1, \ldots, R, \quad j \in J.$$

В соответствии с теорией двойственности значение целевой функции этой задачи при любом решении $V = (v_{rj})$ является нижней оценкой для целевой функции двухуровневой задачи размещения, а следовательно, и задачи выбора множества строк с матрицами $\overline{F}, C$. Поэтому матрица W, порожденная матрицей V, является оценочной.

3. Алгоритм построения приближенного решения задачи минимизации полинома от булевых переменных

Наилучшей матрицей V, порождающей оценочную матрицу W, является оптимальное решение V рассмотренной выше двойственной задачи. Однако мы откажемся от поиска наилучшей матрицы и ограничимся построением матриц V, приводящих к «хорошим» оценочным матрицам W. В качестве таких матриц V рассмотрим так называемые тупиковые матрицы [1, 2, 4, 5].

Для матрицы $V = (v_{rj})$, порождающей оценочную матрицу $W = (w_{ij})$, положим

$$u_j = \min_{i \in I} w_{ij}, \quad j \in J,$$
$$d_r = f_r - \sum_{j \in J} v_{rj}, \quad r = 1, \dots, R,$$

и рассмотрим множества

$$I_0(V) = \left\{ i \in I \;\middle|\; \sum_{r=1}^{R} d_r g_{ir} = 0 \right\},$$
$$I_j(V) = \{ i \in I \mid c_{ij} \leqslant u_j \}, \quad j \in J,$$
$$I'_j(V) = \{ i \in I \mid w_{ij} = u_j \}, \quad j \in J,$$
$$J_0(V) = \{ j \in J \mid I'_j(V) \cap I_0(V) \neq \varnothing \}.$$

Множество $I_0(V)$ назовем *блокирующим* множеством строк, а множество $J_0(V)$ — множеством *заблокированных* столбцов матрицы W. Понятно, что если не все столбцы матрицы W заблокированные, то возможно увеличение матрицы V, приводящее к лучшей оценочной матрице.

Матрицу V назовем *тупиковой,* если выполняются следующие условия:

1) $J_0(V) = J$;

2) если $v_{rj} > 0$, то $\min_{i \in \alpha_r} w_{ij} = u_j$ при любых $r = 1, \dots, R$, $j \in J$.

Первое условие означает, что все столбцы матрицы W являются заблокированными и, следовательно, матрица W — неулучшаемая. Второе условие показывает, что ресурс r-го столбца матрицы $\overline{F}$ переносится в j-й столбец матрицы C только в том случае, если это приводит к улучшению матрицы W.

Алгоритм построения оценочной матрицы W, порожденной тупиковой матрицей V, так же как и процедура подъема в случае задачи размещения, состоит в последовательном увеличении матрицы V, начиная с нулевой матрицы. Алгоритм включает конечное число шагов, каждый из которых приводит к увеличению величины u_{j_0} для выбранного на данном шаге j_0-го столбца матрицы W.

На первом шаге имеется матрица V, в которой $v_{rj} = 0$, $r = 1, \dots, R$, $j \in J$.

Пусть к очередному шагу построена матрица V. Шаг начинается с проверки условия $I_0(V) \cap I'_j = \varnothing$ при каждом $j \in J$ и построения множества $J_0(V)$. Если $J_0(V) = J$, то алгоритм заканчивает работу и V — искомая тупиковая матрица. В противном случае указанным ниже способом выбирается номер $j_0 \notin J_0(V)$ и вычисляются величины

$$\Delta_i^1 = \max\Big\{0; \min_{i \notin I_{j_0}(V)} c_{ij_0} - w_{ij_0}\Big\}, \quad i \in I_{j_0}(V);$$

$$\Delta_i^2 = \sum_{r=1}^{R} g_{ir} d_r, \quad i \in I_{j_0}(V).$$

Величина Δ_i^1 показывает, насколько должна быть увеличена величина w_{ij}, если в качестве ограничения сверху для нового значения величины u_{j_0} берется наименьший элемент j_0-го столбца матрицы C, превышающий текущее значение величины u_{j_0}. Величина Δ_i^2 указывает на остаточный «ресурс» матрицы $\overline{F}$, который может быть использован для увеличения величины w_{ij_0}.

После этого вычисляются величины

$$\Delta_i = \max\Big\{0; \Delta_i^1 - \max_{k \in I_{j_0}(V)} \{\Delta_k^1 - \Delta_k^2\}\Big\}, \quad i \in I_{j_0}(V),$$

задающие приращения элементов j_0-го столбца матрицы W.

Далее начинается *процедура вычисления приращений* j_0-го столбца матрицы V, позволяющих произвести заданное увеличение элементов j_0-го столбца матрицы W. Для этого вектор приращений $Z = (z_1, \dots, z_R)$ должен удовлетворять следующим условиям:

$$\sum_{r=1}^{R} z_r g_{ir} \geqslant \Delta_i, \quad i \in I_{j_0}(V);$$

$$\sum_{r=1}^{R} z_r g_{ir} = \Delta_i \text{ для некоторого } i \in I_{j_0}(V);$$

$$0 \leqslant z_r \leqslant d_r, \quad r = 1, \dots, R.$$

Процедура вычисления приращений состоит из последовательности однотипных шагов, число которых не превышает R. Первоначально вектор Z считается нулевым. Далее на каждом шаге выбирается номер r_0 нулевой компоненты вектора Z и вычисляется ее новое значение z_{r_0}.

Пусть к очередному шагу построен вектор Z и пусть

$$N(Z) = \{r = 1, \dots, R \mid z_r > 0\},$$

$$I(Z) = \left\{ i \in I_{j_0}(V) \;\middle|\; \sum_{r=1}^{R} z_r g_{ir} < \Delta_i \right\}.$$

Если $I(Z) = \varnothing$, то процедура вычисления приращений j_0-го столбца матрицы V считается законченной. Если $I(Z) \neq \varnothing$, то выбирается номер $r_0 \notin N(Z)$ такой, что $\alpha_{r_0} \cap I(Z) \neq \varnothing$. Далее вычисляется величина

$$z_{r_0} = \min \left\{ d_{r_0};\, \min_{i \in I(Z)} \left\{ \Delta_i - \sum_{r \in N(Z)} g_{ir} z_r \right\} \right\}$$

и начинается следующий шаг.

После окончания процедуры вычисления приращений полагается $v_{rj_0} = v_{rj_0} + z_r$, $r = 1, \dots, R$, и начинается *процедура проверки* выполнения второго условия тупиковости матрицы V. Эта процедура состоит из последовательности однотипных шагов, число которых не превосходит R.

На очередном шаге для каждого $r = 1, \dots, R$ вычисляется величина

$$\Delta_r = \min_{i \in \alpha_r} \{ w_{ij_0} - u_{j_0} \}.$$

Если $\Delta_r = 0$ для каждого $r = 1, \dots, R$, то процедура проверки завершается и начинается очередной шаг алгоритма построения оценочной матрицы W. В противном случае выбирается такой номер r_0, что $\Delta_{r_0} > 0$, и величина $v_{r_0 j_0}$ пересчитывается по формуле

$$v_{r_0 j_0} = \max\{0, v_{r_0 j_0} - \Delta_{r_0}\}.$$

После этого начинается новый шаг процедуры.

Заметим, что после каждого шага алгоритма построения тупиковой матрицы либо число элементов в множестве $I_{j_0}(V)$ увеличивается, либо j_0-й столбец становится заблокированным. Однако если на некоторых последующих шагах алгоритма процедура проверки будет завершаться более чем за один шаг, то этот столбец может перестать быть заблокированным. Поэтому величину mn нельзя считать (в отличие от процедуры подъема) верхней оценкой для числа шагов алгоритма. Кроме того, процедура проверки нарушает монотонность алгоритма по матрицам V и W. Однако по величинам u_j, $j \in J$, монотонность алгоритма сохраняется, что позволяет называть его *обобщенной процедурой подъема.*

Заметим также, что приведенное описание алгоритма нуждается в уточнениях, связанных с выбором j_0 на каждом шаге алгоритма и r_0 на каждом шаге процедуры вычисления приращений и каждом шаге процедуры проверки.

Напомним, что мы заинтересованы в построении тупиковой матрицы, приводящей к оценочной матрице W с наибольшим значением $H(W)$, которое во многом зависит от используемых правил выбора значений j_0 и r_0.

В процедуре подъема [1, 4, 6–8] применяется правило, по которому в качестве j_0 выбирается такое j, что число элементов в множестве $I_j(V)$ наименьшее. Это правило задает стратегию «экономного» расходования ресурсов матрицы $\overline{F}$, поскольку соответствует минимальным потерям ресурсов матрицы $\overline{F}$ на единичное увеличение величины $H(W)$. В нашем случае указанное правило не вполне соответствует критерию наименьшего расходования ресурсов. Вместе с тем точное следование этому критерию приводит к неоправданному усложнению правила выбора j_0. Поэтому в рассматриваемом алгоритме используем тот же способ выбора, что и в процедуре подъема, и в качестве j_0 берем такое j, что величина $|I_j(V)|$ наименьшая.

При установлении правила выбора r_0 на шагах процедуры вычисления приращений исходим из того, что наилучшим является такое r_0, что $\alpha_{r_0} = I(Z)$. Поэтому в качестве r_0 выбираем такое r, $r \notin N(Z)$, что величина

$$|\alpha_r \cap I(Z)| + 1/(|\alpha_r \backslash I(Z)| + 1)$$

принимает наибольшее значение.

Выбирая r_0 на шаге процедуры проверки, будем стремиться к тому, чтобы в результате соответствующего преобразования матрицы V множество блокирующих строк максимально сократилось и тем самым высвобождаемый ресурс матрицы $\overline{F}$ мог быть использован для увеличения минимальных элементов у наибольшего числа заблокированных столбцов. Поэтому в качестве r_0 возьмем такое r, что величина $|\alpha_r \cap I_0(V)|$ — наибольшая.

Использование тупиковой матрицы V позволяет не только получить нижнюю оценку для значений целевых функций задач минимизации полинома и выбора множества строк, но и построить приближенные решения этих задач. Дополнительную полезную информацию для этого, как и в случае простейшей задачи размещения, дает блокирующее множество $I_0(V)$. Элементы этого множества считаются перспективными для поиска среди них единичных компонент оптимального решения задачи выбора множества строк или нулевых компонент оптимального решения задачи минимизации полинома от булевых переменных.

Множество $I' \subset I_0(V)$ назовем *критическим* подмножеством множества $I_0(V)$, если для каждого $j \in J$ выполняется условие $I' \cap I'_j(V) \neq \varnothing$.

Пусть I' — критическое множество. Для каждого $j \in J$ обозначим через $i(j)$ элемент множества $I'_j(V)$ такой, что

$$c_{i(j)j} = \min_{i \in I'_j(V)} c_{ij},$$

и пусть $\alpha'_r = I' \cap \alpha_r$, $r = 1, \dots, R$.

Для булева вектора $(x_1, \dots, x_m)$ множество $I_1 = \{i \in I \mid x_i = 1\}$ назовем *характеристическим.* В следующей лемме содержится оценка для приближенного решения задачи выбора множества строк, характеристическое множество которого является критическим подмножеством множества $I'_0(V)$.

Лемма 3. *Если I' — критическое подмножество множества $I_0(V)$, то для булева вектора $(x_1, \dots, x_m)$ с характеристическим множеством I' выполняется неравенство*

$$f(x_1, \dots, x_m) \leqslant H(W) + \sum_{r \mid \alpha'_r \neq \varnothing} \sum_{j \mid i(j) \notin \alpha'_r} v_{rj}.$$

Доказательство. Справедливость утверждения вытекает из следующей цепочки соотношений:

$$\begin{aligned}
H(W) &= \sum_{j \in J} \min_{i \in I} w_{ij} = \sum_{j \in J} \min_{i \in I'} w_{ij} = \sum_{j \in J} \Big(c_{i(j)j} + \sum_{r \mid i(j) \in \alpha'_r} v_{rj} \Big) \\
&= \sum_{j \in J} c_{i(j)j} + \sum_{r \mid \alpha'_r \neq \varnothing} \sum_{j \mid i(j) \in \alpha'_r} v_{rj} \\
&= \sum_{j \in J} c_{i(j)j} + \sum_{r \mid \alpha'_r \neq \varnothing} \Big(f_r - \sum_{j \mid i(j) \notin \alpha'_r} v_{rj} \Big) \\
&= \sum_{j \in J} c_{i(j)j} + \sum_{r \mid \alpha'_r \neq \varnothing} f_r - \sum_{r \mid \alpha'_r \neq \varnothing} \sum_{j \mid i(j) \notin \alpha'_r} v_{rj} \\
&\geqslant \sum_{j \in J} \min_{i \in I'} c_{ij} + \sum_{r=1}^{R} \max_{i \in I'} g_{ir} f_r - \sum_{r \mid \alpha'_r \neq \varnothing} \sum_{j \mid i(j) \notin \alpha'_r} v_{rj} \\
&= f(x_1, \dots, x_m) - \sum_{r \mid \alpha'_r \neq \varnothing} \sum_{j \mid i(j) \notin \alpha'_r} v_{rj}.
\end{aligned}$$

Обозначим через $\Delta(I')$ двойную сумму в правой части доказанного неравенства. Тогда получаем следующую оценку точности решения $(x_1, \dots, x_m)$ с характеристическим множеством I', являющимся критическим подмножеством множества $I'_0(V)$:

$$\frac{f(x_1, \dots, x_m) - f^*}{f^*} \leqslant \frac{H(W) + \Delta(I') - H(W)}{H(W)} = \frac{\Delta(I')}{H(W)}.$$

Отсюда видно, что если множество $I' \subset I_0(V)$ таково, что $|I' \cap I'_j(V)| = 1$ для каждого $j \in J$, то $\Delta(I') = 0$ и, следовательно, булевый вектор $(x_1, \dots, x_m)$ с характеристическим множеством I' является оптимальным. В частности, если существует элемент $i_0 \in I_0(V)$ такой, что $i_0 \in I'_j(V)$ для каждого $j \in J$, то вектор $(x_1, \dots, x_m)$, в котором $x_{i_0} = 1$ и $x_i = 0$ при $i \neq i_0$, является оптимальным.

Вместе с тем следует отметить, что наилучшее приближенное решение $(x_1, \dots, x_m)$ с характеристическим множеством $I' \subset I_0(V)$ не обязано быть таким, что I' — критическое множество. Поэтому в качестве алгоритма построения множества I' предлагается простая градиентная процедура последовательного уменьшения множества $I_0(V)$.

Алгоритм состоит из конечного числа шагов, на каждом из которых рассматривается текущее множество I'.

На первом шаге $I' = I_0(V)$.

Пусть к очередному шагу построено множество I' и пусть $(x_1, \dots, x_m)$ — вектор с характеристическим множеством I'. Шаг состоит в вычислении для всякого $i \in I'$ разности

$$\Delta_i = f(x_1, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_m)$$

и отыскании элемента i_0, при котором указанная разность наибольшая. Если $\Delta_{i_0} \leqslant 0$, то алгоритм заканчивает работу и I' — искомое характеристическое множество. В противном случае полагается $I' = I' \backslash \{i_0\}$ и начинается новый шаг.

4. Результаты вычислительных экспериментов

Для иллюстрации качества представленного выше приближенного алгоритма решения задачи выбора множества строк, задачи минимизации полинома от булевых переменных и двухуровневой задачи размещения приведем результаты тестовых расчетов по данному алгоритму.

Расчеты проводились для задач с исходными данными (матрицами $\overline{F}$ и C) из двух рассмотренных в [5] классов $\mathscr{R}_0(R,m,n,Q)$ и $\mathscr{E}_0(R,m,n,Q)$, где

R — число столбцов матрицы $\overline{F}$;

m — число строк матриц $\overline{F}$ и C;

n — число столбцов матрицы C;

Q — число ненулевых элементов в каждом столбце матрицы $\overline{F}$.

В обоих случаях номера строк каждого столбца матрицы $\overline{F}$ с ненулевыми элементами формируются случайным образом с равномерным распределением, а значения ненулевых элементов принимаются равными 3000.

Величины c_{ij} в случае класса $\mathscr{R}_0(R,m,n,Q)$ являются случайными целыми числами со значениями от 0 до 1000 и равномерным распределением, а в случае класса $\mathscr{E}_0(R,m,n,Q)$ вычисляются следующим образом. В квадрате 1000×1000 случайным образом размещается $\max\{m,n\}$ точек и в качестве величины c_{ij} принимается округленное до целого евклидово расстояние между i-й и j-й точками.

Рассматривались задачи с исходными данными из $\mathscr{R}_0(R,m,n,Q)$ и $\mathscr{E}_0(R,m,n,Q)$ при $R = 50$, $m = 100$, $n = 100$ и с разными значениями параметра Q. Для каждого набора параметров решалась серия из 30 конкретных задач. Одновременно с получением приближенного решения каждой конкретной задачи с использованием соответствующих стандартных методов вычислялись оптимальное значение f^* целевой функции двухуровневой задачи размещения и оптимальное значение d^* целевой функции задачи, двойственной к релаксированной двухуровневой задаче размещения.

В табл. 1 и 2 для каждой серии задач соответственно из классов $\mathscr{R}_0(50,100,100,Q)$ и $\mathscr{E}_0(50,100,100,Q)$ приведены средние значения следующих характеристик исследуемого алгоритма:

$\delta_1 = H(W)/f^* \times 100$ — значение нижней оценки (в процентах) относительно оптимального значения целевой функции;

$\delta_2 = H(W)/d^* \times 100$ — значение нижней оценки (в процентах) относительно оптимального значения целевой функции двойственной задачи;

N — число шагов алгоритма построения тупиковой матрицы;

N_1 — число шагов алгоритма построения тупиковой матрицы, когда процедура проверки завершается более чем за один шаг;

$\Delta^* = (f(x_1,\dots,x_m) - f^*)/f^* \times 100$ — величина относительного отклонения (в процентах) значения целевой функции на приближенном решении $(x_1,\dots,x_m)$ от оптимального значения целевой функции.

Таблица 1

Q	δ_1	δ_2	N	N_1	Δ^*
2	74,58	95,48	1743	103	4,54
3	66,40	95,45	2087	156	7,72
4	62,42	93,93	2402	116	10,87
5	60,52	92,92	2679	58	10,20
6	58,68	91,05	2920	33	7,61
7	58,18	89,64	3164	11	9,96

Таблица 2

Q	δ_1	δ_2	N	N_1	Δ^*
2	83,90	95,31	1485	124	4,57
3	76,05	95,25	1835	152	7,17
4	71,72	94,42	2203	122	7,68
5	70,85	93,62	2562	72	9,86
6	70,18	93,02	2869	39	14,27
7	69,37	91,77	3189	10	13,31

Из таблиц видно, что значения нижних оценок при различных значениях параметра Q колеблются в пределах 60–85% и превышают значения нижних оценок, приведенных в [5] для аналогичных классов задач. Вместе с тем значения нижних оценок относительно оптимального решения двойственной задачи существенно выше и находятся в пределах 90–95%. Это означает, что получаемая с помощью обобщенной процедуры подъема тупиковая матрица близка к оптимальному решению двойственной задачи, а значительный разрыв между нижней оценкой и оптимальным значением целевой функции связан не с качеством получаемой тупиковой матрицы, а с соответствующим разрывом двойственности у задач рассматриваемого класса.

Заметим, что число шагов обобщенной процедуры подъема, когда процедура проверки завершается более чем за один шаг, не равно нулю, хотя и мало по сравнению с общим числом шагов алгоритма. Таким образом, эта процедура не является излишней и не только гарантирует выполнение формального требования получения тупиковой матрицы, но и влияет на величину нижней оценки.

Заметим также, что хотя в силу разрыва двойственности вычисляемая нижняя оценка существенно отличается от оптимального значения целевой функции, тем не менее получаемое с использованием тупиковой матрицы приближенное решение имеет достаточно высокую точность.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Береснев В. Л.** Алгоритм неявного перебора для задачи типа размещения и стандартизации // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1974. Вып. 12. С. 24–34.
2. **Береснев В. Л.** Алгоритмы минимизации полиномов от булевых переменных // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1979. Вып. 36. С. 225–246.
3. **Береснев В. Л.** Эффективный алгоритм для задачи размещения производства с вполне уравновешенной матрицей // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1998. Т. 5, № 1. С. 20–31.
4. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.
5. **Гончаров Е. Н.** Метод ветвей и границ для простейшей двухуровневой задачи размещения предприятий // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1998. Т. 5, № 1. С. 19–39.
6. **Михалевич В. С., Трубин В. А., Шор Н. З.** Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. М.: Наука, 1986.
7. **Bilde O, Krarup J.** Sharp lower bounds and efficient algorithms for the simple plant location problem // Ann. Discrete Math. 1977. V. 1. P. 79–97.
8. **Erlenkotter D.** A dual-based procedure for uncapacitated facility location // Oper. Res. 1978. V. 26, N 6. P. 992–1009.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
11 ноября 1998 г.