

УДК 519.87

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ  
ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ КОНКУРЕНТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ  
ПРЕДПРИЯТИЙ<sup>\*)</sup>

В. Л. Береснев

**Аннотация.** Изучается проблема размещения предприятий (средств обслуживания) в условиях конкуренции, когда две фирмы последовательно открывают свои предприятия, а каждый потребитель выбирает открытое предприятие, исходя из своих собственных предпочтений, и приносит доход фирме-лидеру или фирме-последователю. Задача состоит в том, чтобы выбрать размещение предприятий фирмы-лидера так, чтобы с учётом реакции фирмы-последователя и известных предпочтений потребителей получить максимальный доход (прибыль). Даны формулировки рассматриваемых задач в виде задач целочисленного линейного двухуровневого программирования и эквивалентные формулировки в виде задач псевдодулева двухуровневого программирования. Предлагается способ построения верхних оценок значений целевых функций рассматриваемых задач конкурентного размещения. Соответствующий алгоритм состоит в построении вспомогательной псевдодулевой функции, называемой *оценочной*, и отыскании наименьшего значения этой функции. Для частного случая — задач конкурентного размещения на сети в виде цепи — предлагаются полиномиальные алгоритмы получения оптимальных решений. Приводятся результаты вычислительного эксперимента, позволяющего оценить точность вычисления верхних оценок для задач конкурентного размещения предприятий на цепи.

**Ключевые слова:** задача двухуровневого программирования, верхняя граница, оптимальное решение, псевдодулева функция.

**Введение**

Задача размещения предприятий (средств обслуживания) с неограниченными мощностями — хорошо известная задача дискретной оптимизации [3, 11]. В задаче размещения (на максимум) производитель решает

---

<sup>\*)</sup>Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 06-01-00075 и 08-07-00037).

вопрос о том, в каких местах из множества возможных мест открыть предприятия, производящие некоторый продукт, и к какому открытому предприятию прикрепить каждого из заданных потребителей данного продукта, чтобы получить максимальную прибыль (доход). Прибыль складывается из суммарных доходов, полученных открытыми предприятиями от прикрепленных к ним потребителей, за вычетом фиксированных затрат на открытие предприятий. В этой модели хотя и рассматриваются две стороны — производитель и потребитель, предполагается, что решение принимает только производитель, который размещает предприятия и прикрепляет к ним потребителей, исходя из своей целевой функции.

В настоящей работе изучается более общая ситуация — размещение предприятий в условиях конкуренции. Предполагается, что две конкурирующие фирмы — производители некоторого продукта — последовательно принимают решения об открытии своих предприятий на заданном множестве возможных мест их размещения. Кроме того, в данной ситуации каждый потребитель рассматривается как сторона, принимающая решения, которая, исходя из своих собственных предпочтений, среди открытых предприятий выбирает для себя наилучшее и приносит тем самым доход одной из фирм. Процесс принятия решений при конкурентном размещении предприятий по аналогии с моделью Штакельберга [15] представляется состоящим из трёх этапов. На первом этапе одна из фирм (фирма-лидер), учитывая возможную реакцию второй фирмы (фирмы-последователя), размещает свои предприятия. На втором этапе фирма-последователь, имея информацию о расположении предприятий фирмы-лидера, открывает свои предприятия. Наконец, на третьем этапе каждый потребитель, исходя из своих собственных предпочтений, выбирает лучшее для себя предприятие. Литературу, в которой указанный процесс принятия решений или его часть формализован как трёхстадийный оптимизационный процесс с использованием задач целочисленного и смешанного программирования, к настоящему времени можно считать обширной. Мы не будем пытаться реферировать всю эту литературу, а сошлёмся на обстоятельные монографии и обзоры на эту тему [6, 9, 11, 12, 14]. Вместе с тем отметим, что почти все модели конкурентного размещения предприятий используют ограничение в виде равенства на число открываемых предприятий как фирмой-лидером, так и фирмой-последователем. В этой связи следует выделить работу [8], где предлагается трёхстадийная оптимизационная модель, в которой нет ограничений на число открываемых предприятий, но введены фиксиро-

ванные затраты на открытие предприятий как фирмой–лидером, так и фирмой–последователем, и которую в силу этого можно рассматривать как обобщение классической задачи размещения предприятий. Отметим также, что во всех трёхстадийных оптимизационных моделях значением целевой функции фирмы–лидера является величина получаемого дохода (прибыли). Однако рассматриваются разные концепции оптимального решения. Например, в [8] вводится понятие конкурентно стабильного решения, т. е. такого решения, при котором фирма–последователь не имеет возможности открыть ни одного «жизнеспособного» предприятия. В целом, завершая краткий обзор литературы по задачам конкурентного размещения предприятий, можно заключить, что несмотря на значительное число работ по этой тематике, содержащих различные постановки задач и некоторые исследования свойств решений этих задач, количество публикаций, где предлагаются способы построения оптимальных решений или верхних оценок значений целевых функций, не столь велико. Отметим работы [4, 13], где исследуются задачи конкурентного размещения при дополнительном предположении, что число открываемых предприятий фирмой–последователем невелико или даже равняется единице.

В настоящей работе предлагаются и исследуются задачи, формализующие рассмотренный выше трёхэтапный процесс конкурентного размещения предприятий фирмой–лидером и фирмой–последователем. В моделях присутствуют фиксированные затраты на открытие предприятий, причём затраты на открытие одного и того же предприятия могут быть разными для фирмы–лидера и фирмы–последователя. Предпочтения пользователей формализуются, как в задачах размещения предприятий с порядками [1, 5], заданием для каждого потребителя линейного порядка на множестве возможных мест открытия предприятий. Получаемые в результате задачи представляют собой задачи математического двухуровневого программирования [7]. В таких задачах ограничения на часть переменных представлены не в виде явных соотношений (равенств или неравенств), а заданы неявным образом в виде множества оптимальных решений некоторой «внутренней» оптимизационной задачи, параметры которой зависят от другой части переменных.

В следующем разделе даются формулировки задач конкурентного размещения предприятий в виде задач математического двухуровневого программирования и конкретизируется понятие оптимального решения таких задач. Рассматриваются две постановки, отличающиеся видом целевой функции внутренней оптимизационной задачи (задачи фирмы–последователя). В первой максимизируется прибыль, а во второй — до-

ход, получаемый предприятиями фирмы–последователя. Рассматриваются частные случаи сформулированных задач, в которых величина дохода, получаемая предприятием, не зависит от самого предприятия, а зависит только от потребителей, выбравших это предприятие. Эти модели записываются в виде задач целочисленного линейного двухуровневого программирования и являются основным объектом дальнейших исследований. Отмечается возможность представления второй задачи в виде максиминной задачи целочисленного линейного программирования. В разд. 2 приводятся эквивалентные формулировки рассматриваемых задач в виде задач псевдодулевого двухуровневого программирования [10]. Разд. 3 посвящён задачам конкурентного размещения предприятий на сети. Для таких задач отношения порядка, задающие предпочтения пользователей, определяются кратчайшими расстояниями между вершинами сети. Показано, что в случае, когда сеть является цепью, рассматриваемые задачи полиномиально разрешимы. Время работы соответствующих алгоритмов, построенных на основе метода динамического программирования [2, 3], равно  $O(n^5)$ , где  $n$  — число узлов цепи. В разд. 4 предлагается алгоритм вычисления верхней границы для значений целевых функций исследуемых моделей конкурентного размещения предприятий. Предлагаемый подход использует их представление в виде задач псевдодулевого двухуровневого программирования и сводится к построению псевдодулевой функции, названной оценочной, и вычислению её наименьшего значения. В заключительном разделе рассматривается числовой пример задачи конкурентного размещения, для которого строится оценочная функция и вычисляется верхняя оценка. Приводятся также результаты вычислительного эксперимента с алгоритмом построения верхней оценки для некоторых классов задач конкурентного размещения на цепи, позволяющие оценить точность вычисления верхней оценки для задач рассматриваемого класса.

### **1. Формулировка задач конкурентного размещения предприятий**

Сформулируем задачи, которые обобщают классическую задачу размещения предприятий на максимум и, как отмечено выше, описывают ситуацию, когда две конкурирующие фирмы (фирма–лидер и фирма–последователь) последовательно открывают свои предприятия, производящие некоторую продукцию для удовлетворения спроса в этой продукции заданного множества потребителей. Известно множество возможных мест размещения предприятий, в каждом из которых любая фирма может открыть своё предприятие. Для каждого такого места заданы

фиксированные затраты на открытие предприятия, которые могут быть различными для фирмы–лидера и фирмы–последователя. Предполагается, что каждый потребитель выбирает обслуживающее его предприятие, исходя из своих предпочтений, которые позволяют ранжировать (упорядочить) все места размещения предприятий. Правило выбора потребителем обслуживающего его предприятия состоит в выборе первого в заданном порядке открытого предприятия. Считаем, что для каждого предприятия и каждого потребителя известна величина дохода, который получит это предприятие при обслуживании данного потребителя. Доход каждой из фирм складывается из доходов, полученных открытыми ими предприятиями, а прибыль фирмы равняется доходу за вычетом затрат на открытие предприятий.

В рассматриваемой ситуации решения, от которых зависят получаемые фирмами доходы и прибыли, принимают все участники: фирма–лидер, фирма–последователь и потребители. Процесс принятия этих решений удобно представить как следующий трёхэтапный процесс.

1. Фирма–лидер открывает свои предприятия в возможных местах их размещения, зная, что фирма–последователь также может открыть свои предприятия и «захватить» некоторую часть потребителей.

2. Фирма–последователь, зная места размещения предприятий фирмы–лидера, открывает свои предприятия в возможных местах их размещения, не занятых предприятиями фирмы–лидера.

3. Каждый потребитель, зная множество открытых обеими фирмами предприятий, выбирает по своему правилу обслуживающее его предприятие и в зависимости от этого приносит доход либо фирме–лидеру, либо фирме–последователю.

Задача, формулируемая от лица фирмы–лидера, состоит в выборе такого размещения предприятий, чтобы получить максимальную прибыль с учётом того, что фирма–последователь, разместив свои предприятия в соответствии со своей целевой функцией, «захватит» часть потребителей. При этом предполагается, что цель фирмы–последователя известна и что обе фирмы знают правила выбора потребителями предприятий для своего обслуживания.

Рассмотрим две постановки сформулированной задачи, отличающиеся целевыми функциями фирмы–последователя. В первой считаем, что целью фирмы–последователя, как и фирмы–лидера, является получение максимальной прибыли, а во второй — получение максимального дохода, т. е. «захват» максимально возможного количества потребителей. При этом в случае второй целевой функции будем дополнительно

предполагать, что каждое открытое фирмой–последователем предприятие не должно быть убыточным, т. е. полученный этим предприятием суммарный доход не может быть меньше фиксированных затрат на его открытие.

Для формальной записи сформулированных задач введём следующие обозначения:

$I = \{1, \dots, m\}$  — множество предприятий (возможных мест размещения предприятий);

$J = \{1, \dots, n\}$  — множество потребителей;

$p_{ij}$  — величина дохода, получаемого предприятием  $i \in I$ , открытым фирмой–лидером, при обслуживании потребителя  $j \in J$ ;

$q_{ij}$  — величина дохода, получаемого предприятием  $i$ , открытым фирмой–последователем, при обслуживании потребителя  $j \in J$ ;

$\prec_j$  — линейный порядок на множестве  $I$ , реализующий предпочтения потребителя  $j \in J$ , при котором  $i \prec_j k$  означает, что из двух открытых предприятий  $i \in I$  и  $k \in I$  потребитель  $j$  выберет предприятие  $i$ ; отношение  $i \preceq_j k$  означает, что либо  $i \prec_j k$ , либо  $i = k$ ; в случаях, когда понятно, относительно какого потребителя сравниваются предприятия, индекс  $j$  в обозначении  $\prec_j$  будем опускать;

$f_i$  — величина фиксированных затрат фирмы–лидера на открытие предприятия  $i \in I$ ;

$g_i$  — величина фиксированных затрат фирмы–последователя на открытие предприятия  $i \in I$ .

Для формальной записи задач используем переменные классической задачи размещения предприятий с неограниченными мощностями:

$x_i$  — переменная, показывающая, открывает или нет фирма–лидер предприятие  $i \in I$ :  $x_i = 1$ , если открывает, и  $x_i = 0$ , если нет;

$x_{ij}$  — переменная, указывающая, выбрано ли потребителем  $j \in J$  для своего обслуживания предприятие  $i \in I$ , открытое фирмой–лидером:  $x_{ij} = 1$ , если выбрано, и  $x_{ij} = 0$ , если нет;

$z_i$  — переменная, показывающая открывает или нет фирма–последователь предприятие  $i \in I$ :  $z_i = 1$ , если открывает, и  $z_i = 0$ , если нет;

$z_{ij}$  — переменная, указывающая, выбрано ли потребителем  $j \in J$  для своего обслуживания предприятие  $i \in I$ , открытое фирмой–последователем:  $z_{ij} = 1$ , если выбрано, и  $z_{ij} = 0$ , если нет.

С использованием указанных переменных задача конкурентного размещения предприятий в случае, когда целью фирмы–последователя является получение максимальной прибыли, записывается следующим об-

разом:

$$\max_{(x_i), (x_{ij})} \left\{ - \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij} \right) \left( 1 - \sum_{i \in I} \tilde{z}_{ij} \right) \right\}; \quad (1)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J; \quad (2)$$

$$x_i \geq x_{ij}, \quad i \in I, j \in J; \quad (3)$$

$$x_i + \sum_{i \prec j l} x_{lj} \leq 1, \quad i \in I, j \in J; \quad (4)$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J; \quad (5)$$

$$(\tilde{z}_i), ((\tilde{z}_{ij})) \text{ — оптимальное решение задачи (7)–(11);} \quad (6)$$

$$\max_{(z_i), (z_{ij})} \left\{ - \sum_{i \in I} g_i z_i + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} q_{ij} z_{ij} \right\}; \quad (7)$$

$$\sum_{i \in I} z_{ij} \leq 1, \quad j \in J; \quad (8)$$

$$z_i \geq z_{ij}, \quad i \in I, j \in J; \quad (9)$$

$$x_i + z_i + \sum_{i \prec j l} z_{lj} \leq 1, \quad i \in I, j \in J; \quad (10)$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J. \quad (11)$$

Представленная задача, как и всякая задача двухуровневого программирования, включает *внутреннюю* оптимизационную задачу (7)–(11), которую будем называть *задачей фирмы-последователя*.

Целевая функция (1) сформулированной задачи выражает величину прибыли, получаемой фирмой-лидером с учётом потери части потребителей, «захваченных» фирмой-последователем. Это действительно так, поскольку если неравенство (8) выполняется для некоторого  $j \in J$  как равенство, т. е. если для потребителя  $j$  найдётся открытое предприятие фирмы-последователя, которое лучше любого открытого предприятия фирмы-лидера, то доход, получаемый фирмой-лидером от потребителя  $j$ , становится равным нулю. Ограничение (2) гарантирует, что каждый потребитель может выбрать только одно предприятие фирмы-лидера, а неравенство (3) означает, что может быть выбрано только открытое предприятие. Ограничения (4) реализуют правило выбора потребителем открытого предприятия. Аналогичный смысл имеют целевая

функция и ограничения задачи (7)–(11). При этом ограничение (10) помимо того, что гарантирует выбор потребителем открытого предприятия по заданному правилу, показывает также, что если предприятие открыто фирмой–лидером, то оно не может быть открыто фирмой–последователем.

В случае, когда целью фирмы–последователя является получение максимального дохода при дополнительном условии неубыточности каждого открытого предприятия, задача конкурентного размещения предприятий отличается только ограничениями, связанными с задачей фирмы–последователя. Эти ограничения записываются следующим образом:

$$((\tilde{z}_i), (\tilde{z}_{ij})) \text{ — оптимальное решение задачи (13)–(18);} \quad (12)$$

$$\max_{(z_i), (z_{ij})} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} q_{ij} z_{ij}; \quad (13)$$

$$\sum_{i \in I} z_{ij} \leq 1, \quad j \in J; \quad (14)$$

$$z_i \geq z_{ij}, \quad i \in I, j \in J; \quad (15)$$

$$x_i + z_i + \sum_{i < j} z_{lj} \leq 1, \quad i \in I, j \in J; \quad (16)$$

$$\sum_{j \in J} q_{ij} z_{ij} \geq g_i z_i, \quad i \in I; \quad (17)$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J. \quad (18)$$

Ограничения (17) задачи означают, что доход, получаемый каждым предприятием, открытым фирмой–последователем, должен быть не меньше фиксированных затрат на открытие этого предприятия.

Уточним понятие оптимального решения рассматриваемых задач конкурентного размещения предприятий (1)–(11) и (1)–(5), (12)–(18) с учётом того, что оптимальные решения внутренних задач могут определяться неоднозначно.

Обозначим через  $X$  решение  $((x_i), (x_{ij}))$ , удовлетворяющее условиям (2)–(5), которое будем называть *допустимым решением* задачи конкурентного размещения предприятий (1)–(11) и (1)–(5), (12)–(18). При фиксированном решении  $X$  обозначим через  $Z$  допустимое решение  $((z_i), (z_{ij}))$  задачи (7)–(11) или (13)–(18) в зависимости от того, какую внутреннюю задачу имеет рассматриваемая задача конкурентного размещения предприятий. Обозначим через  $O(X)$  множество оптимальных решений



$\tilde{Z}$  внутренней задачи. Значение целевой функции (1) на допустимых решениях  $X$  и  $Z$  обозначим через  $L(X, Z)$ . Тогда сформулированные выше задачи конкурентного размещения предприятий в компактной форме записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \max_X L(X, \tilde{Z}); \\ \tilde{Z} \in O(X). \end{aligned}$$

Допустимое решение  $X^*$  задачи конкурентного размещения предприятий назовём *оптимальным*, если имеется оптимальное решение  $\tilde{Z}^* \in O(X)$  внутренней задачи такое, что выполняются следующие два условия:

1.  $L(X^*, \tilde{Z}^*) \leq L(X^*, \tilde{Z})$  для любого  $\tilde{Z} \in O(X^*)$ .
2. Для любого допустимого решения  $X$  существует оптимальное решение  $\tilde{Z} \in O(X)$  такое, что  $L(X^*, \tilde{Z}^*) \geq L(X, \tilde{Z})$ .

Легко видеть, что если при любом решении  $X$  значения функции  $L(X, \tilde{Z})$  одинаковы для всякого  $\tilde{Z} \in O(X)$ , то первое условие оптимальности решения выполняется автоматически. В общем случае при таком определении оптимального решения получаем, что задачи конкурентного размещения предприятий (1)–(11) и (1)–(5), (12)–(18) переписываются эквивалентным образом в виде задачи

$$\max_X \min_{\tilde{Z} \in O(X)} L(X, \tilde{Z}).$$

Это максиминная задача математического двухуровневого программирования, в которой множество допустимых решений  $\tilde{Z}$  задано неявным образом как множество оптимальных решений внутренней оптимизационной задачи.

Представленные задачи конкурентного размещения предприятий (1)–(11) и (1)–(5), (12)–(18) будем исследовать при следующем дополнительном условии, позволяющем переформулировать их как задачи целочисленного линейного двухуровневого программирования. Будем считать, что доход, получаемый любым предприятием от потребителя  $j \in J$ , не зависит от самого предприятия и равен  $b_j$ , т. е. будем считать, что для всякого  $j \in J$  имеют место равенства  $p_{ij} = q_{ij} = b_j$  при любом  $i \in I$ .

В этом случае функция  $L(X, Z)$  принимает вид

$$L(X, Z) = - \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} b_j \left( 1 - \sum_{i \in I} \tilde{z}_{ij} \right)$$

и, следовательно, переменные  $x_{ij}$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$ , могут быть исключены из рассматриваемых задач. В результате задача (1)–(11) переписывается следующим образом:

$$\max_{(x_i)} \min_{(\tilde{z}_i), (\tilde{z}_{ij})} \left\{ - \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} b_j \left( 1 - \sum_{i \in I} \tilde{z}_{ij} \right) \right\}; \quad (19)$$

$$\sum_{i \in I} x_i \geq 1; \quad (20)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I; \quad (21)$$

$$((\tilde{z}_i), (\tilde{z}_{ij})) \text{ — оптимальное решение задачи (23)–(27);} \quad (22)$$

$$\max_{(z_i), (z_{ij})} \left\{ - \sum_{i \in I} g_i z_i + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} b_j z_{ij} \right\}; \quad (23)$$

$$\sum_{i \in I} z_{ij} \leq 1, \quad j \in J; \quad (24)$$

$$z_i \geq z_{ij}, \quad i \in I, j \in J; \quad (25)$$

$$x_i + z_i + \sum_{i < j} z_{lj} \leq 1, \quad i \in I, j \in J; \quad (26)$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J. \quad (27)$$

Аналогичная запись задачи (1)–(5), (12)–(18) отличается от задачи (19)–(27) только ограничениями, связанными с задачей фирмы–последователя, которые принимают следующий вид:

$$((\tilde{z}_i), (\tilde{z}_{ij})) \text{ — оптимальное решение задачи (29)–(34);} \quad (28)$$

$$\max_{(z_i), (z_{ij})} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} b_j z_{ij}; \quad (29)$$

$$\sum_{i \in I} z_{ij} \leq 1, \quad j \in J; \quad (30)$$

$$z_i \geq z_{ij}, \quad i \in I, j \in J; \quad (31)$$

$$x_i + z_i + \sum_{i < j} z_{lj} \leq 1, \quad i \in I, j \in J; \quad (32)$$

$$\sum_{j \in J} b_j z_{ij} \geq g_i z_i, \quad i \in I; \quad (33)$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J. \quad (34)$$

Представленные формулировки (19)–(27) и (19)–(21), (28)–(34) задач конкурентного размещения предприятий являются задачами целочисленного линейного двухуровневого программирования. Однако это замечание не в одинаковой степени относится к обоим рассматриваемым задачам.

При фиксированном решении  $X$  задач (19)–(27) и (19)–(21), (28)–(34) обозначим через  $O_1(X)$  множество оптимальных решений задачи (23)–(27), а через  $O_2(X)$  и  $D_2(X)$  соответственно множество оптимальных и допустимых решений задачи (29)–(34). Через  $F_2(Z)$  обозначим целевую функцию (29) задачи (29)–(34). Заметим, что поскольку

$$L(X, Z) = - \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} b_j \left( 1 - \sum_{i \in I} z_{ij} \right) = - \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} b_j - F_2(Z),$$

значение функции  $L(X, Z)$  будет одинаковым для всех оптимальных решений  $\tilde{Z} \in O_2(X)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{Z} \in O_2(X)} L(X, \tilde{Z}) &= - \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} b_j - F_2(\tilde{Z}) \\ &= - \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} b_j - \max_{Z \in D_2(X)} F_2(Z) = \min_{Z \in D_2(X)} L(X, Z). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что задача (19)–(21), (28)–(34) эквивалентна следующей максиминной задаче целочисленного линейного программирования:

$$\begin{aligned} \max_{(x_i)} \min_{(z_i), (z_{ij})} & \left\{ - \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} b_j \left( 1 - \sum_{i \in I} z_{ij} \right) \right\}; \\ & \sum_{i \in I} x_i \geq 1; \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I; \end{aligned}$$

где  $((z_i), (z_{ij}))$  — допустимое решение задачи (29)–(34).

В этой задаче множество решений  $((z_i), (z_{ij}))$ , среди которых выбирается наилучшее, задается явным образом посредством ограничений (30)–(34).

С учётом данного представления задачи (19)–(21), (28)–(34) для любого решения  $X$  задач (19)–(27) и (19)–(21), (28)–(34) имеем

$$\min_{\tilde{Z} \in O_2(X)} L(X, \tilde{Z}) = \min_{Z \in D_2(X)} L(X, Z) \leq \min_{\tilde{Z} \in O_1(X)} L(X, \tilde{Z}).$$

Последнее неравенство справедливо в силу того, что для оптимального решения  $\tilde{Z}$  задачи (23)–(27), очевидно, выполняется ограничение (33). Поэтому решение  $\tilde{Z}$  является допустимым решением задачи (29)–(34).

Отсюда получаем, что верхняя оценка значений целевой функции (19) задачи (19)–(27) будет одновременно и верхней границей для значений целевой функции (19) задачи (19)–(21), (28)–(34).

## 2. Эквивалентные формулировки задач конкурентного размещения предприятий

Заметим, что поскольку при фиксированном решении  $(x_i)$  задач (19)–(27) и (19)–(21), (28)–(34) значения переменных  $z_{ij}$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$ , допустимого решения  $((z_i), (z_{ij}))$  внутренних задач (23)–(27) и (29)–(34) определяются однозначно по векторам  $(x_i)$  и  $(z_i)$ , то эти переменные так же, как и ранее переменные  $x_{ij}$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$ , могут быть исключены из рассмотрения. Для получения соответствующих эквивалентных формулировок исследуемых задач введём следующие обозначения.

Для произвольного  $(0, 1)$ -вектора  $w = (w_i)$ ,  $i \in I$ , при заданном  $j \in J$  обозначим через  $i_j(w)$  элемент  $i_0$  из множества  $I_0 = \{i \in I \mid w_i = 0\}$  такой, что  $i_0 \preccurlyeq_j i$  для всякого  $i \in I_0$ . Если  $I_0 = \emptyset$ , то через  $i_j(w)$  обозначим элемент  $i_0 \in I$  такой, что  $i \preccurlyeq_j i_0$  для любого  $i \in I$ . Для  $(0, 1)$ -векторов  $(x_i)$  и  $(z_i)$  обозначим через  $y = (y_i)$  и  $u = (u_i)$  такие  $(0, 1)$ -векторы, что  $y_i = 1 - x_i$ ,  $u_i = 1 - z_i$ ,  $i \in I$ .

С использованием введённых обозначений получаем, что при любых решениях  $(x_i)$  и  $((z_i), (z_{ij}))$  для всякого  $j \in J$  выполняются равенства

$$\sum_{i \in I} z_{ij} = 1 - \prod_{i \prec i_j(y)} u_i = \prod_{i \preccurlyeq_j i_j(u)} y_i.$$

Действительно, пусть  $u_i = 1$  для всякого  $i \prec i_j(y)$ . Тогда  $i_j(y) \preccurlyeq i_j(u)$ , и поэтому  $y_i = 0$  для некоторого  $i \preccurlyeq i_j(u)$ . Следовательно, в данном случае равенства выполняются. Если  $u_i = 0$  для некоторого  $i \prec i_j(y)$ , то  $i_j(u) \prec i_j(y)$  и поэтому  $y_i = 1$  для всякого  $i \preccurlyeq i_j(u)$ . Следовательно, и в этом случае требуемые равенства выполняются.

Используя эти равенства, получаем

$$\begin{aligned} \max_{(x_i)} \min_{(\tilde{z}_i), (\tilde{z}_{ij})} \left\{ - \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} b_j \left( 1 - \sum_{i \in I} \tilde{z}_{ij} \right) \right\} \\ = \max_{(y_i)} \min_{(u_i)} \left\{ - \sum_{i \in I} f_i (1 - y_i) + \sum_{j \in J} b_j \left( 1 - \prod_{i \preccurlyeq_j i_j(u)} y_i \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{i \in I} f_i + \sum_{j \in J} b_j + \max_{(y_i)} \min_{(\tilde{u}_i)} \left\{ \sum_{i \in I} f_i y_i - \sum_{j \in J} b_j \prod_{i \prec i_j(\tilde{u})} y_i \right\} \\
&= - \sum_{i \in I} f_i + \sum_{j \in J} b_j - \min_{(y_i)} \max_{(\tilde{u}_i)} \left\{ - \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{j \in J} b_j \prod_{i \prec i_j(\tilde{u})} y_i \right\}; \\
&\max_{(z_i), (z_{ij})} \left\{ - \sum_{i \in I} g_i z_i + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} b_i z_{ij} \right\} \\
&= \max_{(u_i)} \left\{ - \sum_{i \in I} g_i (1 - u_i) + \sum_{j \in J} b_j \left( 1 - \prod_{i \prec i_j(y)} u_i \right) \right\} \\
&= - \sum_{i \in I} g_i + \sum_{j \in J} b_j - \min_{(u_i)} \left\{ - \sum_{i \in I} g_i u_i + \sum_{j \in J} b_j \prod_{i \prec i_j(y)} u_i \right\}.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем следующую эквивалентную формулировку задачи (19)–(27) в виде минимаксной задачи псевдодулева двухуровневого программирования:

$$\min_{(y_i)} \max_{(\tilde{u}_i)} \left\{ - \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{j \in J} b_j \prod_{i \prec i_j(\tilde{u})} y_i \right\}; \quad (35)$$

$$\prod_{i \in I} y_i = 0; \quad (36)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I; \quad (37)$$

$$(\tilde{u}_i) \text{ — оптимальное решение задачи (39)–(40);} \quad (38)$$

$$\min_{(u_i)} \left\{ - \sum_{i \in I} g_i u_i + \sum_{j \in J} b_j \prod_{i \prec i_j(y)} u_i \right\}; \quad (39)$$

$$u_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I. \quad (40)$$

Аналогичным образом получаем, что задача (19)–(21), (28)–(34) имеет эквивалентную формулировку в виде минимаксной задачи псевдодулева программирования.

### 3. Задачи конкурентного размещения предприятий на сети

Пусть  $G = (V, E)$  — связный граф с множеством узлов  $V$  и множеством рёбер  $E$ , и пусть каждому ребру приписан положительный вес, называемый *длиной ребра*. Длина пути в графе  $G$  равняется сумме длин рёбер, составляющих этот путь. Путь из вершины  $i$  в вершину  $j$  назовём

наименьшим, если длина этого пути не больше длины любого пути из  $i$  в  $j$ . Длину такого пути обозначим  $d(i, j)$ . Считаем, что  $d(i, i) = 0$ .

Рассмотрим задачу конкурентного размещения предприятий, в которой множество возможных мест размещения предприятий  $I$  и множество потребителей  $J$  совпадают с множеством узлов  $V$  заданного графа  $G(V, E)$ . Предположим также, что для всякого  $j \in J$  отношение порядка  $\prec_j$  на множестве  $I$  определяется длинами наименьших путей до узла  $j$ . Считаем, что  $i \prec_j k$ , если  $d(i, j) < d(k, j)$  или  $d(i, j) = d(k, j)$  и  $i < k$ . При выполнении указанных условий рассмотренные задачи конкурентного размещения будем называть *задачами конкурентного размещения предприятий на сети*.

Покажем, что если граф  $G$  — цепь, т. е. не имеет вершин степени больше 2, то задача (19)–(27) на сети  $G$  и задача (19)–(21), (28)–(34) на сети  $G$  могут быть решены за полиномиальное время.

Зафиксируем решение  $(x_i)$  задач (18)–(26) и (18)–(20), (27)–(33). Пусть множество  $I_0 = \{i \in I \mid x_i = 1\}$  есть множество  $\{i_1, i_2, \dots, i_K\}$ , где  $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \dots < i_K < i_{K+1} = n + 1$ . Для удобства обозначений будем считать, что множество  $I_0$  включает также фиктивные элементы 0 и  $n + 1$ . Поэтому дополним множество узлов  $V$  цепи  $G$  фиктивными элементами 0 и  $n + 1$  и будем считать, что  $f_{n+1} = 0$ ,  $b_{n+1} = 0$  и что при любом  $j \in J$  для всякого  $i \in I$  справедливы соотношения  $i \prec_j 0$  и  $i \prec_j n + 1$ .

Заметим, что в силу свойств отношений  $\prec_j$  на узлах цепи допустимые решения  $((z_i), (z_{ij}))$  внутренних задач (23)–(27) и (29)–(34) при любом  $k = 1, \dots, K + 1$  обладают следующими свойствами:

- если  $z_i = 1$  и  $i \in \{i_{k-1}, \dots, i_k\}$ , то  $z_{ij} = 0$  для всякого  $j \notin \{i_{k-1}, \dots, i_k\}$ ;
- если  $z_i = 1$  и  $i \notin \{i_{k-1}, \dots, i_k\}$ , то  $z_{ij} = 0$  для всякого  $j \in \{i_{k-1}, \dots, i_k\}$ .

Отсюда следует, что при фиксированном решении  $(x_i)$  каждая из внутренних задач (23)–(27) и (29)–(34) распадается на  $K + 1$  внутренних задач таких, что  $k$ -я,  $k = 1, \dots, K + 1$ , внутренняя задача отличается от соответствующей исходной задачи тем, что в ней множества  $I$  и  $J$  заменяются множествами  $I_k$  и  $J_k$ ,  $I_k = J_k = \{i_{k-1}, \dots, i_k\}$ . При этом  $k$ -я внутренняя задача рассматривается при фиксированном векторе  $(x_i)$ ,  $i \in I_k$ , где  $x_{i_{k-1}} = x_{i_k} = 1$  и  $x_i = 0$  при  $i \neq i_{k-1}$ ,  $i \neq i_k$ .

Обозначим через  $((\tilde{z}_i^k), (\tilde{z}_{ij}^k))$  оптимальное решение  $k$ -й внутренней задачи,  $k = 1, \dots, K + 1$ . Заметим, что при любом  $k = 1, \dots, K + 1$  в силу свойств отношений  $\prec_j$  на узлах цепи в случае задачи (23)–(27) для каждого оптимального решения  $((\tilde{z}_i^k), (\tilde{z}_{ij}^k))$  вектор  $(\tilde{z}_i^k)$  будет иметь не более двух единичных компонент, и в случае задачи (29)–(34) найдётся

оптимальное решение  $((\tilde{z}_i^k), (\tilde{z}_{ij}^k))$  такое, что вектор  $(\tilde{z}_i^k)$  будет иметь не более двух единичных компонент. Отсюда следует, что при фиксированном решении  $(x_i)$  в случае обеих задач (19)–(27) и (19)–(21), (28)–(34) нужное оптимальное решение соответствующей внутренней задачи может быть найдено за время  $O(n^3)$ .

С учётом сказанного при фиксированном решении  $(x_i)$  представим целевую функцию (19) задачи (19)–(27) следующим образом:

$$\begin{aligned} \min_{(\tilde{z}_i), (\tilde{z}_{ij})} & \left\{ - \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} b_j \left( 1 - \sum_{i \in I} \tilde{z}_{ij} \right) \right\} \\ & = - \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} b_j - \max_{(\tilde{z}_i), (\tilde{z}_{ij})} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} b_j \tilde{z}_{ij} \\ & = \sum_{k=1}^{K+1} \left\{ f_{i_k} + \sum_{j=i_{k-1}+1}^{i_k} b_j - \max_{(\tilde{z}_i^k), (\tilde{z}_{ij}^k)} \sum_{j=i_{k-1}+1}^{i_k} \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} b_j \tilde{z}_{ij}^k \right\}. \end{aligned}$$

Положим

$$l(i_{k-1}, i_k) = -f_{i_k} + \sum_{j=i_{k-1}+1}^{i_k} b_j - \max_{(\tilde{z}_i^k), (\tilde{z}_{ij}^k)} \sum_{j=i_{k-1}+1}^{i_k} \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} b_j \tilde{z}_{ij}^k,$$

где  $((\tilde{z}_i^k), (\tilde{z}_{ij}^k))$  — оптимальное решение  $k$ -й,  $k = 1, \dots, K$ , внутренней задачи для задачи (23)–(27). Тогда получим следующую эквивалентную форму записи задачи (19)–(27) на цепи:

$$\max_K \max_{i_1, \dots, i_K} \sum_{k=1}^{K+1} l(i_{k-1}, i_k); \quad (41)$$

$$0 = i_0 < i_1 < \dots < i_K < i_{K+1} = n + 1. \quad (42)$$

В том же виде представляется и задача (19)–(21), (28)–(34) на цепи, для которой функция  $l(i_{k-1}, i_k)$  имеет вид

$$l(i_{k-1}, i_k) = -f_{i_k} + \sum_{j=i_{k-1}+1}^{i_k} b_j - \sum_{j=i_{k-1}+1}^{i_k} \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} b_j \tilde{z}_{ij}^k,$$

где  $((\tilde{z}_i^k), (\tilde{z}_{ij}^k))$  — оптимальное решение  $k$ -й,  $k = 1, \dots, K$ , внутренней задачи для задачи (29)–(34). Отметим, что для обеих рассматриваемых задач в силу указанных выше свойств оптимальных решений  $((\tilde{z}_i^k), (\tilde{z}_{ij}^k))$

внутренних задач вычисление значения функции  $l(i_{k-1}, i_k)$  на любой паре точек может быть произведено за время  $O(n^3)$ .

Алгоритм решения задачи (41), (42) строится на основе метода динамического программирования [2, 3]. Для всякого  $i \in \{0, 1, \dots, n+1\}$  обозначим через  $S(i)$  оптимальное значение целевой функции следующей задачи:

$$\max_K \max_{i_1, \dots, i_K} \sum_{k=1}^{K+1} l(i_{k-1}, i_k);$$

$$0 = i_0 < i_1 < \dots < i_K < i_{K+1} = i.$$

Считаем, что  $S(0) = 0$ .

Алгоритм решения задачи (41), (42) состоит из двух этапов. Первый этап включает  $n+1$  шагов. На  $i$ -м,  $i = 1, \dots, n+1$ , шаге вычисляется величина  $S(i)$  по формуле

$$S(i) = \max_{0 \leq i' < i} \{S(i') + l(i', i)\}.$$

Второй этап состоит из предварительного шага и конечного числа основных шагов. На предварительном шаге полагается  $i'_0 = n+1$ . На  $t$ -м,  $t = 1, 2, \dots$ , основном шаге отыскивается элемент  $i'_t$ ,  $0 \leq i'_t < i'_{t-1}$ , такой, что

$$S(i'_{t-1}) = S(i'_t) + l(i'_t, i'_{t-1}).$$

Если  $i'_t > 0$ , то начинается следующий шаг. Если  $i'_t = 0$ , то полагается  $K = t-1$ , строится оптимальное решение  $\{i_1, \dots, i_K\}$ , где  $i_k = i'_{K-k+1}$ ,  $k = 1, \dots, K$ , после чего алгоритм заканчивает работу.

Время работы алгоритма решения задачи (41), (42) при заданной функции  $l(i_{k-1}, i_k)$  равно  $O(n^2)$ , а время, необходимое для вычисления всех требуемых значений функции  $l(i_{k-1}, i_k)$ , равно  $O(n^5)$ .

Таким образом, доказана следующая

**Теорема 1.** *Задача конкурентного размещения предприятий (19)–(27) и (19)–(21), (28)–(34) на цепи с числом узлов  $n$  полиномиально разрешима с трудоёмкостью  $O(n^5)$ .*

#### 4. Верхняя граница для целевой функции задач конкурентного размещения предприятий

Рассмотрим задачу (19)–(27) и её эквивалентное представление в виде задачи псевдодулева двухуровневого программирования (35)–(40). Построим псевдодулеву функцию  $f(y_i, \dots, y_m)$  такую, что на любом  $(0, 1)$ -



векторе  $y = (y_i)$  значение этой функции не превосходит значения целевой функции (35). Такую псевдодобулеву функцию  $f(y_i, \dots, y_m)$  назовём *оценочной*.

Чтобы построить оценочную псевдодобулеву функцию, для любого  $j_0 \in J$  определим множество  $I_{j_0} \subset I$  следующим образом. Пусть  $i_0 \in I$ . Рассмотрим множество

$$N(i_0, j_0) = \{i \in I \mid i \prec_{j_0} i_0\}$$

и множество

$$J(i_0) = \{j \in J \mid i_0 \preccurlyeq_j i \text{ для всякого } i \notin N(i_0, j_0)\},$$

задающее множество точек  $j \in J$ , для которых элемент  $i_0$  предпочтительнее любого элемента  $i \notin N(i_0, j_0)$ . Это множество непусто, поскольку  $j_0 \in J(i_0)$ . Если  $N(i_0, j_0) = \emptyset$ , то считаем по определению, что  $i_0 \in I_{j_0}$ . Если  $N(i_0, j_0) \neq \emptyset$ , то для всякого  $k \in N(i_0, j_0)$  построим множество

$$J(k, i_0) = \{j \in J(i_0) \mid k \prec_j i_0\},$$

задающее множество точек  $j \in J(i_0)$ , для которых элемент  $k$  предпочтительнее элемента  $i_0$ . Считаем, что  $i_0 \in I_{j_0}$  тогда и только тогда, когда для всякого  $k \in N(i_0, j_0)$  выполняется неравенство

$$g_k > \sum_{j \in J(k, i_0)} b_j.$$

Заметим, что при любом  $j_0 \in J$  множество  $I_{j_0}$  непусто, поскольку если  $i_0 \preccurlyeq_{j_0} i$  для всякого  $i \in I$ , то  $i_0 \in I_{j_0}$ .

Важное свойство множества  $I_{j_0}$  устанавливает следующая

**Лемма 1.** Если  $(x_i)$  — решение задачи (19)–(27) такое, что  $x_i = 0$  для всякого  $i \in I_{j_0}$ , то для оптимального решения  $((\tilde{z}_i), (\tilde{z}_{ij}))$  задачи (23)–(27), на котором значение целевой функции (19) наименьшее, выполняется равенство

$$\sum_{i \in I} \tilde{z}_{ij_0} = 1.$$

**Доказательство.** Рассмотрим оптимальное решение  $((\tilde{z}_i), (\tilde{z}_{ij}))$  задачи (23)–(27), обладающее указанным в условии леммы свойством и предположим, что  $\tilde{z}_{ij_0} = 0$  для всякого  $i \in I$ . Пусть  $i_0 \in I$  такой, что  $x_{i_0} = 1$  и  $x_i = 0, \tilde{z}_i = 0$  для всякого  $i \in N(i_0, j_0)$ . Согласно определению множества  $J(i_0)$  для всякого  $j \in J(i_0)$  имеем  $i_0 \prec_j i$  для любого  $i \in I$

такого, что  $\tilde{z}_i = 1$ . Поскольку  $i_0 \notin I_{j_0}$ , существует  $k \in N(i_0, j_0)$ , для которого множество  $J(k, i_0)$  обладает свойством

$$g_k \leq \sum_{j \in J(k, i_0)} b_j.$$

Таким образом, получаем, что для некоторого  $k \in I$ ,  $\tilde{z}_k = 0$ , существует множество  $J(k, i_0)$  такое, что для всякого  $j \in J(k, i_0)$  имеем  $k \prec_j i_0$  и  $i_0 \prec_j i$  при любом  $i \in I$ ,  $\tilde{z}_i = 1$ . Кроме того, для данного множества выполняется приведённое выше неравенство. Это означает, что решение  $((\tilde{z}'_i), (\tilde{z}'_{ij}))$ , отличающееся от исходного оптимального решения  $((\tilde{z}_i), (\tilde{z}_{ij}))$  лишь тем, что  $\tilde{z}'_k = 1$  и  $\tilde{z}'_{kj} = 1$ ,  $j \in J(i_0, k)$ , также будет оптимальным решением задачи (23)–(27) и, кроме того, будет давать меньшее значение целевой функции (19). Это противоречит выбору исходного оптимального решения  $((\tilde{z}_i), (\tilde{z}_{ij}))$  и доказывает лемму 1.

Рассмотрим задачу (35)–(40) и, опираясь на доказанное выше, убедимся в справедливости следующей леммы.

**Лемма 2.** Для любого решения  $y = (y_i)$  задачи (35)–(40) и оптимального решения  $\tilde{u} = (\tilde{u}_i)$  задачи (39), (40), на котором значение целевой функции (35) наибольшее, при любом  $j \in J$  выполняется неравенство

$$\prod_{i \prec_{j_0}(\tilde{u})} y_i \geq \prod_{i \in I_{j_0}} y_i.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $y_i = 0$  для некоторого  $i \in I_{j_0}$ , то неравенство выполняется. Пусть  $y_i = 1$  для всякого  $i \in I_{j_0}$ . Тогда согласно лемме 1 для оптимального решения  $(\tilde{u}_i)$  задачи (39), (40), на котором значение целевой функции (35) наибольшее, выполняется соотношение  $i_{j_0}(\tilde{u}) \prec i_{j_0}(y)$ . Поэтому  $y_i = 1$  для всякого  $i \preceq i_{j_0}(\tilde{u})$  и, следовательно, требуемое неравенство выполняется. Лемма 2 доказана.

Рассмотрим псевдодобулеву функцию вида

$$f^0(y_1, \dots, y_m) = - \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{j \in J} b_j \prod_{i \in I_j} y_i.$$

По лемме 2 для любого вектора  $y = (y_i)$  выполняется неравенство

$$\max_{(\tilde{u}_i)} \left\{ - \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{j \in J} b_j \prod_{i \prec_{j_0}(\tilde{u})} y_i \right\} \geq f^0(y_1, \dots, y_m).$$

Следовательно, псевдодобулева функция  $f^0(y_1, \dots, y_m)$  является оценочной, а величина  $f^0 = \min_{(y_i)} \{f^0(y_1, \dots, y_m) + F \prod_{i \in I} y_i\}$ , где  $F > \min_{i \in I} f_i$ , есть оценка снизу для значений целевой функции (35) задачи (35)–(40). Таким образом, получаем следующую теорему.

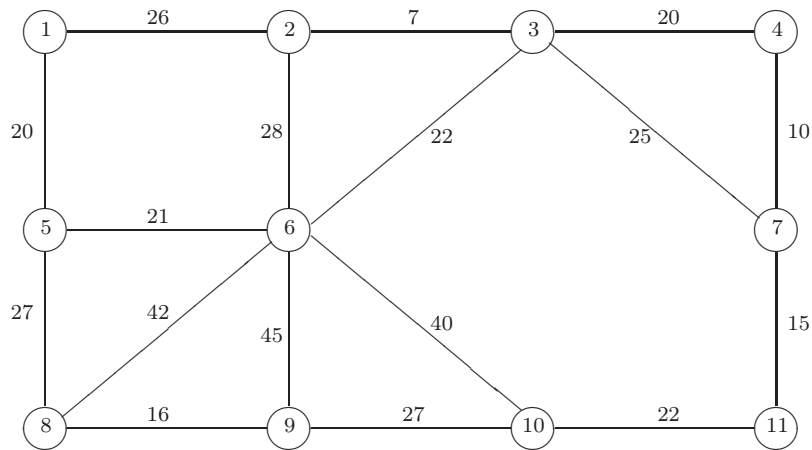
**Теорема 2.** Величина  $UB = \sum_{j \in J} b_j - \sum_{i \in I} f_i - f^0$  является верхней границей для оптимального значения целевой функции (19) задачи (19)–(27).

Приведённая верхняя граница, как отмечалось ранее, является также верхней границей для оптимального значения целевой функции (19) задачи (19)–(21), (28)–(34).

Алгоритм вычисления предложенной верхней границы для целевой функции задач (19)–(27) и (19)–(21), (28)–(34) включает в себя два этапа. На первом строится оценочная псевдодобулева функция, а на втором вычисляется её наименьшее значение. Построение оценочной функции сводится к отысканию для всякого  $j \in J$  множества  $I_j$ . Из самого определения этого множества следует, что оно может быть построено за время  $O(m^2 n^2)$ . Для решения задачи минимизации псевдодобулевой функции, которая эквивалентна задаче размещения предприятий с неограниченными мощностями [3], может быть использован целый ряд алгоритмов [3], построенных на идеях методов неявного перебора и локального поиска.

## 5. Численный пример и результаты вычислительного эксперимента

Приведём результаты работы алгоритма построения верхней границы для примера задачи (19)–(27) на сети  $G$ , изображённой на рисунке:



Сеть имеет 11 узлов с номерами, указанными в центре окружности, изображающей узел сети. Расстояния между соседними узлами, задающие для потребителей правила выбора открытого предприятия, указаны рядом с рёбрами, соединяющими соседние узлы.

Исходные данные задачи (доход  $b_j$ , получаемый от  $j$ -го потребителя; фиксированные затраты  $f_i$  и  $g_i$  на открытие предприятия  $i$  соответственно фирмой-лидером и фирмой-последователем) приведены в таблице.

Т а б л и ц а

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$b_j$	10	15	20	10	15	20	10	15	20	5	5
$f_j$	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28
$g_j$	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18

Оптимальным решением рассматриваемой задачи является вектор  $(x_i^*)$ , где  $x_3^* = x_9^* = 1$ ,  $x_i^* = 0$  при  $i \neq 3, i \neq 9$ , а соответствующее оптимальное решение внутренней задачи определяется вектором  $(\tilde{z}_i^*)$ , где  $\tilde{z}_4^* = \tilde{z}_5^* = 1$ ,  $\tilde{z}_i^* = 0$  при  $i \neq 4, i \neq 5$ . При этом предприятия фирмы-лидера будут обслуживать потребителей, размещённых в узлах с номерами 2, 3, 8, 9, 10, приносящих суммарный доход, равный 75. Поэтому максимальная прибыль фирмы-лидера равна 19.

Необходимые для вычисления верхней оценки множества  $I_j$ ,  $j = 1, \dots, 11$ , в случае рассматриваемого примера получаются следующими:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \{1, 2, 5\}, & I_7 &= \{4, 7, 10, 11\}, \\
 I_2 &= \{1, 2, 3\}, & I_8 &= \{5, 6, 8, 9\}, \\
 I_3 &= \{3\}, & I_9 &= \{9\}, \\
 I_4 &= \{3, 4, 7\}, & I_{10} &= \{6, 7, 9, 10, 11\}, \\
 I_5 &= \{1, 5, 6, 8\}, & I_{11} &= \{4, 7, 9, 10, 11\}, \\
 I_6 &= \{6\}.
 \end{aligned}$$

Наименьшее значение  $f^0$  соответствующей оценочной функции достигается на векторе  $(y_i^*)$ , где  $y_3^* = y_6^* = 0$ ,  $y_i^* = 1$  при  $i \neq 3, i \neq 6$ , и равняется  $-207$ , поэтому величина верхней границы равна

$$\sum_{j=1}^{11} b_j - \sum_{i=1}^{11} f_i - f^0 = 145 - 308 + 207 = 44,$$

в то время как оптимальное значение целевой функции равняется 19.

Для демонстрации качества предложенной верхней границы приведём результаты вычислительного эксперимента, состоящего в вычислении значений верхней границы целевой функции задачи (19)–(27) на цепи и их сравнении с оптимальными значениями целевой функции.

Вычисления проводились для двух классов задач с исходными данными, сформированными следующим образом.

Число узлов цепи — 100.

Расстояния между соседними узлами — равномерно распределённая случайная величина с целыми значениями от 1 до 6.

Величина дохода  $b_j$ , получаемого от потребителя  $j$ , — равномерно распределённая случайная величина с целыми значениями от 5 до 15.

Фиксированные затраты  $f_i$  на открытие предприятия  $i$  фирмой-лидером — постоянная величина, равная 40.

Фиксированные затраты на открытие предприятия  $i$  фирмой-последователем — постоянная величина, равная 35 для первого класса задач и 40 для второго.

Вычисления проводились для серий из 20 задач каждого класса. Для каждой конкретной задачи вычислялась точность верхней границы, равная отношению величины верхней границы к оптимальному значению целевой функции. Для первого класса задач среднее значение этой величины равняется 1,81, а для второго — 1,47.

Полученные значения точности верхней границы представляются вполне приемлемыми и позволяют надеяться на эффективное использование предложенной верхней границы при построении алгоритмов решения задач конкурентного размещения предприятий на базе метода «ветвей и границ». Отметим также, что полученные в ходе вычислений оптимальные решения задачи конкурентного размещения предприятий (в виде задач двухуровневого псевдоболева программирования) и оптимальные решения задачи минимизации соответствующих оценочных псевдоболевых функций имеют близкие по числу и составу элементов множества нулевых компонент. Это позволяет надеяться на использование оптимального решения задачи минимизации оценочной функции в качестве основы для построения приближённых решений рассмотренных в работе задач конкурентного размещения предприятий.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеева Е. В., Кочетов Ю. А. Генетический локальный поиск для задачи о  $p$ -медиане с предпочтениями клиентов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2007. — Т. 14, № 1. — С. 3–13.

2. **Беллман Р., Дрейфус С.** Прикладные задачи динамического программирования. — М.: Наука, 1965. — 460 с.
3. **Береснев В. Л.** Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005. — 408 с.
4. **Campos C., Moreno J. A.** Multiple voting location problems // Eur. J. Oper. Res. — (to appear)
5. **Canovas L., Garsia S., Labbe M., Marin A.** A strengthened formulation for the simple plant location problems with order // Oper. Res. Letters. — 2007. — V. 35. — P. 141–150.
6. **Eiselt H. A., Laporte G.** Sequential location problems // Eur. J. Oper. Res. — 1996. — V. 96. — P. 217–231.
7. **Dempe S.** Foundations of bilevel programming. — Dordrecht: Kluwer Ac. Pub., 2002. — 332 p.
8. **Dobson G., Karmarkar U.** Competitive location on a network // Oper. Res. — 1987. — V. 35. — P. 565–574.
9. **Drezner Z., Hamacher H. W. (eds.)** Facility location: applications and theory. — Berlin: Springer-Verl., 2002. — 457 p.
10. **Hammer P. L., Rudeanu S.** Boolean method in operations research and related areas. — Berlin: Springer, 1968. — 330 p.
11. **Mirchandani P. B., Francis R. L.** Discrete location theory. — New York: John Wiley and Sons, 1990. — 555 p.
12. **Plastria F.** Static competitive facility location: An overview of optimization approaches // Eur. J. Oper. Res. — 2001. — V. 129. — P. 461–470.
13. **Plastria F., Vanhaverbeke L.** Discrete models for competitive location with foresight // Comput. Oper. Res. — 2008. — V. 35. — P. 683–700.
14. **Santos–Penãte D. R., Suárez–Vega R., Dorta–González P.** The leader – follower location model // Networks and Spatial Economics. — 2007. — V. 7. — P. 45–61.
15. **Stackelberg H. von.** Marktform und Gleichgewicht. — Berlin: Springer-Verl., 1934 (engl. transl.: The theory of the market economy. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1952. — 289 p.)

Береснев Владимир Леонидович,  
e-mail: beresnev@math.nsc.ru

Статья поступила  
19 марта 2008 г.