МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНКУРЕНТНОЙ БОРЬБЫ НА РЫНКЕ *

В. Л. Береснев, В.И. Суслов

Аннотация

Рассматривается математическая модель принятия наилучшего решения фирмой, стремящейся завоевать долю на рынке. Предполагается, что фирма выпускает на рынок свою продукцию в условиях конкуренции, когда на рынок аналогичную продукцию поставляет другая фирма. Обе фирмы могут варьировать поставляемыми на рынок видами продукции и назначаемыми ценами на различные виды продукции, зная предпочтения потребителей по выбору продукции для удовлетворения своих потребностей. При этом обе фирмы стремятся получить максимально возможную прибыль. Математическая формулировка задачи выбора наилучших решений участниками рынка представляет собой задачу двухуровневого математического программирования и сводится к задаче конкурентного размещения предприятий. Для этой задачи предлагается способ вычисления верхней границы оптимального значения ее целевой функции и алгоритм построения приближенного решения. Алгоритм представляет собой процедуру локального подъема относительно окрестности специального вида, начинающегося из некоторого начального приближенного решения, получаемого одновременно с вычислением верхней границы. Приводится числовой пример исследуемой задачи, на котором демонстрируются результаты работы алгоритма.

1 Введение

В монографии Штакельберга [13], посвященной рыночной экономике, конкуренция на рынке представляется посредством многоэтапной модели принятия решений. Эта модель, называемая еще игрой Штакельберга, описывает ситуацию соперничества на рынке, при котором на первом этапе принимает решение фирма–лидер, а на втором этапе с учетом этого решения принимает свое решение фирма–последователь. При этом обе фирмы преследуют и стремятся достичь свои собственные, вообще говоря, различные цели.

В настоящей работе предлагается математическая модель конкурентной борьбы на рынке продукции некоторых видов двух производителей этой продукции: фирмы–лидера и фирмы–последователя, при их последовательном вхождении на рынок и в предположении дискретности как самих видов продукции так и возможных спектров цен на продукцию каждого вида. Принятие решений участниками рынка в модели представляется как многоэтапный процесс. На первом этапе фирма–лидер принимает решение о том, какую продукцию и по каким ценам предложить рынку. На втором этапе фирма–последователь с учетом решения, принятого фирмой–лидером, делает свой выбор, стремясь предложить рынку более привлекательную продукцию по, возможно, более низким ценам, чтобы захватить часть потребителей. Наконец, на третьем этапе каждый потребитель, исходя из своих собственных целей (предпочтений), приобретает на рынке интересующую его продукцию и приносит доход либо фирме–лидеру, либо фирме–последователю. Цель фирмы–лидера состоит в выборе такого решения, которое дает наибольшую прибыль в условиях, когда фирма

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08–07–00037) и Президиума СО РАН (междисциплинарный интеграционный проект № 69).

последователь также стремиться получить максимальную прибыль, "захватив" часть потребителей. В экономической литературе (см. обзор [12]) подобные модели рассматриваются чаще всего в непрерывных постановках и изучаются преимущественно с целью выявления качественных свойств решений, позволяющих достичь рыночного равновесия.

Рассматриваемая ниже задача выбора наилучшего решения фирмой–лидером формулируется как задача двухуровневого целочисленного программирования и представляет собой известную задачу конкурентного размещения предприятий (средств обслуживания). Литературу, посвященную этой задаче и ее частным случаям, в настоящее время можно считать обширной [3, 4, 6–11]. Среди этих публикаций следует выделить работу [6], в которой рассматривается задача с фиксированными затратами на размещение средств обслуживания. Вместе с тем, число работ, где помимо обсуждения постановок задач предлагались бы еще способы построения оптимальных решений или верхних границ для значений целевых функций не столь велико. Отметим работы [3, 10], в которых предлагаются алгоритмы решения задачи в предположении, что число объектов, открываемых фирмой–последователем относительно невелико или даже равняется единице.

В [2] предложен способ вычисления верхней границы для линейного варианта задачи конкурентного размещения средств обслуживания. В настоящей работе этот способ переносится на случай задачи конкурентного размещения средств обслуживания общего вида. Алгоритм вычисления верхней границы сводится к решению классической задачи размещения предприятий (средств обслуживания). Предлагается также алгоритм построения приближенного решения исследуемой задачи. Алгоритм представляет собой процедуру локального подъема, использующую окрестность специального вида. Результатом работы этой процедуры является приближенное решение в виде локального максимума. Указанная процедура начинает поиск с начального приближенного решения, получаемого одновременно с вычислением верхней границы.

В следующем разделе дается описание математической модели конкурентной борьбы на рынке, в рамках которой формулируется задача принятия наилучшего решения фирмой–лидером. Эта задача представляется как известная задача двухуровневого математического программирования — задача конкурентного размещения предприятий (средств обслуживания). Третий раздел посвящен исследованию задачи конкурентного размещения предприятий и построению алгоритма вычисления верхней границы для оптимального значения целевой функции задачи, а четвертый раздел — описанию алгоритма поиска приближенного решения задачи. В пятом разделе приводится числовой пример предложенной модели, на котором иллюстрируется работа алгоритмов вычисления верхней границы и построения приближенного решения исследуемой задачи.

2 Математическая модель

Построим математическую модель, которая отражает конкурентную борьбу на рынке продукции некоторых видов двух фирм: фирмы–лидера и фирмы–последователя. Решения в этой борьбе принимают все участники рынка: фирма–лидер, фирма–последователь и потребители рассматриваемой продукции. Процесс принятия этих решений удобно представить в виде следующего трехэтапного процесса.

На первом этапе фирма–лидер принимает решение о том, какие виды продукции и по каким ценам реализовывать на рынке, учитывая, что фирма–последователь также может предложить рынку аналогичную продукцию.

На втором этапе фирма–последователь, зная решение фирмы–лидера, принимает свое решение о видах продукции, предлагаемых рынку, и ценах на эти виды продукции.

На третьем этапе каждый потребитель, имея возможность выбрать для удовлетворения своей потребности продукцию обеих фирм, принимает решение в соответствии со своими предпочтениями (целями) и приносит доход либо фирме–лидеру, либо фирме–последователю или удовлетворяет свою потребность на другом рынке.

Задача выбора наилучшего решения фирмы–лидера состоит в выборе такого решения, которое дает наибольшую прибыль в условиях, когда фирма–последователь также стремиться получить максимальную прибыль, "захватив" часть потребителей. При этом предполагается, что фирма–лидер, принимая свое решение, имеет точный прогноз о видах продукции, которые может предложить рынку фирма–последователь, и о возможном спектре цен на продукцию этих видов. Кроме того, считается, что обе фирмы знают предпочтения каждого потребителя, сформированных с учетом цен на продукцию.

При формальной записи этой задачи будем использовать следующие дополнительные предположения. Считаем, что прибыль фирмы от продукции того или иного вида складывается из доходов за вычетом расходов от реализации потребителям продукции данного вида минус так называемые фиксированные затраты, связанные, например, с затратами на организацию производства (поставок) продукции, затрат на рекламу и т.п. Доход от продукции данного вида определяется количеством реализованной потребителям продукции и ее ценой. При этом будем предполагать, что спектр цен, которые можно назначить своей продукции фирма–лидер или фирма–последователь, не слишком велик и ограничен конечным набором значений, например, низкая, средняя и высокая цена.

Введем следующие обозначения. Обозначим через $I = \{1, \ldots, m\}$ множество видов продукции, которые могут обращаться на рассматриваемом рынке. Каждый элемент $i \in I$ соответствует некоторому конкретному виду продукции, который реализуется на рынке по конкретной цене. Этот вид продукции будем называть видом i. Таким образом, если два вида продукции являются продукцией одного и того же физического свойства, но имеют разные цены, то эти виды продукции представлены в множестве I разными элементами.

Обозначим через I_L и I_F подмножества множества I, означающие множества видов продукции, которые могут предложить рынку соответственно фирма–лидер и фирма–последователь. Считаем, что $I_L \cup I_F = I$ и что в общем случае $I_L \cap I_F \neq \emptyset$.

Предположим, что для всякого $i \in I$ известны следующие величины:

c_i —цена, по которой продукция вида i реализуется на рынке;

a_i —удельные затраты, связанные с производством и реализацией на рынке продукции вида i;

f_i — фиксированные затраты фирмы–лидера, связанные с производством и реализацией на рынке продукции вида i; считаем, что $f_i = \infty$ для $i \notin I_L$;

g_i — фиксированные затраты фирмы–последователя, связанные с производством и реализацией на рынке продукции вида i; считаем, что $g_i = \infty$ для $i \notin I_F$;

Обозначим через $J = \{1, \ldots, n\}$ множество потребителей продукции, реализуемой на рынке. Каждый элемент $j \in J$ обозначает некоторого потребителя, которого будем называть потребителем j. Считаем, что потребитель выбирает на рынке продукцию для удовлетворения потребности, исходя из собственных предпочтений. Эти предпочтения задаются линейным порядком $\succ_j$ на множестве I. Отношение $i \succ_j k$ для $i, k \in I$ означает, что если на рынке присутствует продукция вида i и продукция вида k, то потребитель j предпочтет продукцию вида i. Считаем также, что для любых $i, k \in I$ отношение $i \succcurlyeq_j k$ означает либо $i \succ_j k$, либо $i = k$.

Для $i \in I, j \in J$ через q_{ij} обозначим количество единиц продукции вида i, которое необходимо потребителю j для удовлетворения его потребности. Считаем, что $q_{ij} = 0$, если продукция вида i не пригодна для потребителя j. Для $i \in I, j \in J$ обозначим через p_{ij} величину $q_{ij}(c_i - a_i)$, равную прибыли, которую получает фирма–лидер или фирма–последователь, если потребитель j выбирает продукцию вида i для удовлетворения своей потребности. Для всякого $j \in J$ через A_j обозначим множество $\{i \in I \mid p_{ij} > 0\}$ допустимых видов продукции для потребителя j. Считаем, что рассматриваемый рынок удовлетворяет потребность потребителя j, если на нем присутствует продукция хотя бы одного вида из множества A_j.

Для формальной записи задачи введем следующие переменные:

x_i — переменная, показывающая предлагает ли рынку фирма–лидер продукцию вида $i \in I$; $x_i = 1$, если предлагает, и $x_i = 0$, если нет;

x_{ij} — переменная, показывающая, является ли продукция вида $i \in I_L$, предлагаемая фирмой–лидером, наиболее предпочтительной для потребителя $j \in J$ среди всех видов продукции, предлагаемых рынку фирмой–лидером; $x_{ij} = 1$, если является, и $x_{ij} = 0$, если нет.

z_i — переменная, показывающая предлагает ли рынку фирма–последователь продукцию вида $i \in I$; $z_i = 1$, если предлагает, и $z_i = 0$, если нет;

z_{ij} — переменная, показывающая, является ли продукция вида $i \in I_F$, предлагаемая фирмой–последователем, наиболее предпочтительной для потребителя $j \in J$ среди всех видов продукции, предлагаемых рынку фирмой–лидером и фирмой–последователем; $z_{ij} = 1$, если является, и $z_{ij} = 0$, если нет.

С использованием введенных обозначений и указанных переменных *задача выбора наилучшего решения фирмой–лидером в конкурентной борьбе на рынке* записывается следующим образом:

$$\max_{(x_i),(x_{ij})} \Big\{ -\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J} \Big(\sum_{i\in I} p_{ij} x_{ij} \Big) \Big(1 - \sum_{i\in I} \widetilde{z}_{ij} \Big) \Big\} \tag{1}$$

$$x_i + \sum_{k | i \succ_j k} x_{kj} \le 1, \quad i \in I, j \in J; \tag{2}$$

$$x_i \ge x_{ij}, \quad i \in I, j \in J; \tag{3}$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, j \in J; \tag{4}$$

$$\big((\widetilde{z}_i), (\widetilde{z}_{ij}) \big) \text{ — оптимальное решение задачи (6)–(8);} \tag{5}$$

$$\max_{(z_i),(z_{ij})} \Big\{ -\sum_{i\in I} g_i z_i + \sum_{j\in J} \sum_{i\in I} p_{ij} z_{ij} \Big\}; \tag{6}$$

$$x_i + z_i + \sum_{k | i \succ_j k} z_{kj} \le 1, \quad i \in I, j \in J; \tag{7}$$

$$z_i \ge z_{ij}, \quad i \in I, j \in J; \tag{8}$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, j \in J. \tag{9}$$

Целевая функция (1) сформулированной задачи выражает величину прибыли, получаемой фирмой–лидером с учетом потери доходов за счет "захвата" части потребителей фирмой–последователем. Неравенство (2) обеспечивает выполнение правила выбора потребителем j продукции для удовлетворения своей потребности. Это же неравенство гарантирует, что потребитель j для удовлетворения своей потребности может выбирать продукцию не больше чем одного вида. Ограничение (3) означает, что потребитель j может выбрать продукцию фирмы–лидера только такого вида i, которая имеется на рынке. Аналогичный смысл имеют целевая функция (6) и ограничения (7), (8). Целевая функция (6) выражает суммарную прибыль, получаемую фирмой–последователем, а неравенство (7) обеспечивает выполнение правила выбора потребителем j наилучшего вида продукции среди всех видов продукции, представленных на рынке как фирмой–лидером, так и фирмой–последователем. Помимо этого, ограничение (7) показывает, что продукция одного и того же вида не может быть предложена рынку и фирмой–лидером и фирмой–последователем.

Представленная математическая формулировка (1)–(9) задачи выбора наилучшего решения фирмой–лидером в конкурентной борьбе на рынке представляет собой задачу, известную как задача конкурентного размещения предприятий (средств обслуживания) [2]. Эта модель является двухуровневой задачей целочисленного программирования [5]. Как и всякая задача двухуровневого программирования она включает задачу верхнего уровня (1)–(4), которую назовем задачей L и задачу нижнего уровня (6)–(9), которую назовем задачей F.

Обозначим через $X = \big((x_i), (x_{ij})\big)$ допустимое решение задачи L и при фиксированном допустимом решении X обозначим через $\widetilde{Z} = \big((\widetilde{z}_i), (\widetilde{z}_{ij})\big)$ оптимальное решение задачи F, а через $O(X)$ — множество оптимальных решений задачи F. Обозначим через $L(X, \widetilde{Z})$ значение целевой функции задачи L на допустимом решении X и оптимальном решении $\widetilde{Z} \in O(X)$.

Если предположить, что для любого допустимого решения X оптимальное решение $\widetilde{Z}$ определяется однозначно, то есть множество $O(X)$ является одноэлементным, то значение $L(X, \widetilde{Y})$ для всякого допустимого решения X вычисляется однозначно. В этом смысле задача (1)–(9) является корректной и вопрос о том, что есть оптимальное решение задачи L не возникает. Допустимое решение $X^\star$ задачи L является *оптимальным решением* задачи L, если для всякого допустимого решения X выполняется неравенство $L(X^\star, \widetilde{Y}^\star) \geq L(X, \widetilde{Y})$, где $\widetilde{Y}^\star \in O(X^\star)$, $\widetilde{Y} \in O(X)$.

Если же для некоторых допустимых решений X множество $O(X)$ включает более одного элемента и при этом для различных $\widetilde{Z}_1 \in O(X)$, $\widetilde{Z}_2 \in O(X)$ имеем $L(X, \widetilde{Z}_1) \neq L(X, \widetilde{Z}_2)$, то приведенная формулировка (1)–(9) задачи выбора наилучшего решения фирмой–лидером не является корректной. Чтобы сделать ее таковой, необходимо уточнить и отразить в модели правило выбора фирмой–последователем оптимального решения $\widetilde{Z} \in O(X)$. Будем предполагать, что в рассматриваемой ситуации конкурентной борьбы на рынке фирма–последователь примет так называемую *некооперативную* линию поведения, при которой из всех возможных оптимальных решений $\widetilde{Z} \in O(X)$ будет выбрано такое решение, которое приведет к наименьшему значению $L(X, \widetilde{Z})$ целевой функции задачи L.

В случае *некооперативного поведения* фирмы–последователя получаем формулировку задачи выбора наилучшего решения фирмой–лидером, отличающуюся от задачи (1)–(9) только условием (1), которое принимает следующий вид:

$$\max_{(x_i),(x_{ij})} \min_{(\widetilde{z}_i),(\widetilde{z}_{ij})} \Big\{ -\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J} \Big(\sum_{i\in I} p_{ij} x_{ij}\Big)\Big(1 - \sum_{i\in I} \widetilde{z}_{ij}\Big)\Big\} \tag{1'}$$

Задача (1′), (2)–(9) является максиминной двухуровневой задачей целочисленного программирования. В этом случае оптимальное решение задачи верхнего уровня L' определяется следующим образом. *Допустимым решением* задачи (1′), (2)–(9) назовем пару $(X, \overline{Z})$, где X — допустимое решение задачи L', а $\overline{Z} \in O(X)$ такое оптимальное решение, что $L(X, \overline{Z}) = \min_{\widetilde{Z}\in O(X)} L(X, \widetilde{Z})$. Допустимое решение $(X^\star, \overline{Z}^\star)$ задачи (1′), (2)–(9) назовем *оптимальным решением* задачи (1′), (2)–(9), если $L(X^\star, \overline{Z}^\star) \geq L(X, \overline{Z})$ для любого допустимого решения $(X, \overline{Z})$. Тогда получаем, что допустимое решение $X^\star$ задачи L' есть *оптимальное решение* этой задачи, если можно указать $\overline{Z}^\star \in O(X^\star)$ такое, что пара $(\overline{Z}^\star, X^\star)$ есть оптимальное решение задачи (1′), (2)–(9).

Допустимое решение X задачи L' назовем *приближенным решением* задачи L', если можно указать $\overline{Z} \in O(X)$ такое, что пара $(X, \overline{Z})$ есть допустимое решение задачи (1′), (2)–(9). Понятно, что приближенным решением задачи L' можно считать любое допустимое решение X. Соответствующее оптимальное решение $\overline{Z} \in O(X)$ задачи F определяется с помощью алгоритма, состоящего из двух этапов.

На первом этапе при фиксированном решении X решается задача F и вычисляется некоторое оптимальное решение $\widetilde{Z} = \big((\widetilde{z}_i), (\widetilde{z}_{ij})\big)$ задачи F.

На втором этапе при фиксированных решениях X и $\widetilde{Z}$ решается следующая вспомогательная задача:

$$\min_{(z_i),(z_{ij})} \sum_{j\in J} \Big(\sum_{i\in I} p_{ij}x_{ij}\Big)\Big(1 - \sum_{i\in I} z_{ij}\Big); \tag{10}$$

$$x_i + z_i + \sum_{i\prec_j k} x_{kj} \le 1, \quad i \in I, j \in J; \tag{11}$$

$$z_i \ge z_{ij}, \quad i \in I, j \in J; \tag{12}$$

$$-\sum_{i\in I} g_i z_i + \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} p_{ij} z_{ij} \ge -\sum_{i\in I} g_i \widetilde{z}_i + \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} p_{ij}\widetilde{z}_{ij}; \tag{13}$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, j \in J. \tag{14}$$

Оптимальное решение $\overline{Z} = \big((\overline{z}_i)(\overline{z}_{ij})\big)$ этой задачи будет искомым оптимальным решением задачи F.

3 Верхняя граница для оптимального значения целевой функции задачи (1′), (2)–(9)

Дальнейшей нашей задачей будет построение приближенного решения X задачи L', для которого величина $L(X, \overline{Z})$ была бы близка к оптимальному значению целевой функции задачи (1′), (2)–(9). Для оценки этой близости вычислим верхнюю границу для оптимального значения целевой функции задачи (1′), (2)–(9)

Для всякого $j \in J$ положим $p_j = \max\limits_{i\in A_j\cap I_L} p_{ij}$.

Тривиальная верхняя граница для величины $L(X, \overline{Z})$ при любом допустимом решении $(X, \overline{Z})$, $X = \big((x_i)(x_{ij})\big)$, $\overline{Z} = \big((\overline{z}_i)(\overline{z}_{ij})\big)$ вытекает из справедливости для всякого $j \in J$ следующего неравенства

$$\Big(\sum_{i\in I} p_{ij}x_{ij}\Big)\Big(1 - \sum_{i\in I} \overline{z}_{ij}\Big) \le p_j \max_{i\in A_j\cap I_L} x_i.$$

Это неравенство имеет место, поскольку если $x_i = 0$ для всякого $i \in A_j \cap I_L$, то $\sum\limits_{i\in I} p_{ij}x_{ij} = 0$.

Определим для всякого $j \in J$ множество $I_j \subset A_j \cap I_L$, для которого справедливо аналогичное, но более сильное неравенство, позволяющее получить более точную верхнюю границу.

Пусть $i \in A_j \cap I_L$, рассмотрим множество

$$N(i) = \{k \in A_j | k \succ_j i\}$$

и множество

$$J(i) = \{s \in J | i \succcurlyeq_s k \text{ для всякого } k \in A_s \setminus N(i)\}.$$

Заметим, что $J(i) \neq \emptyset$ поскольку $j \in J(i)$.

Если $N(i) = \emptyset$, то считаем по определению, что $i \in I_j$. Пусть $N(i) \neq \emptyset$. Для всякого $k \in N(i) \cap I_F$ построим множество

$$J(k,i) = \{s \in J(i) | k \succ_s i\}.$$

Считаем, что $i \in I_j$, если для каждого $k \in N(i) \cap I_F$ выполняется неравенство

$$g_k > \sum_{s \in J(k,i)} p_{ks}.$$

Отметим, что множество I_j может быть пустым, поскольку даже для элемента $i_0 \in A_j \cap I_L$ такого, что $i_0 \succcurlyeq_j i$ для всякого $i \in A_j \cap I_L$, множество $N(i_0)$ может быть непустым и найдется $k \in N(i_0) \cap I_F$, для которого не будет выполняться приведенное выше неравенство.

Содержательный смысл множества I_j поясняет следующая лемма, устанавливающая, что если фирма–лидер планирует удовлетворять потребность потребителя j своей продукцией, но при этом не предлагает рынку продукцию вида i при всех $i \in I_j$, то потребитель j будет "захвачен" фирмой–последователем. В частности, если I_j — пустое множество, потребитель j будет "захвачен" фирмой–последователем независимо от предложений фирмы–лидера.

Лемма 1. Для всякого допустимого решения $(X, \overline{Z})$, $X = \big((x_i)(x_{ij})\big)$, $\overline{Z} = \big((\overline{z}_i)(\overline{z}_{ij})\big)$ задачи $(1')$, (2)–(9) и всякого $j \in J$ таких, что $\sum\limits_{i \in I} p_{ij} x_{ij} > 0$ и $x_i = 0$ для любого $i \in I_j$, выполняется равенство $\sum\limits_{i \in I} \overline{z}_{ij} = 1$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого $j \in J$ требуемое равенство не выполняется и пусть $x_{i_0 j} = 1$ для некоторого $i_0 \in I$. Поскольку $p_{i_0 j} > 0$, то $i_0 \in A_j$. Рассмотрим множество $N(i_0)$ и заметим, что $\overline{z}_k = 0$ для любого $k \in N(i_0)$. Рассмотрим также множество $J(i_0)$ и отметим, что для всякого $s \in J(i_0)$ соотношение $i_0 \succ_s i$ выполняется для любого $i \in A_j$ такого, что $\overline{z}_i = 1$. Поскольку $x_{i_0} = 1$, то $i_0 \notin I_j$ и, следовательно, найдется $k \in N(i_0) \cap I_F$, для которого существует множество $J(k, i_0) \subset J(i_0)$ такое, что

$$g_k \leq \sum_{s \in J(k,i_0)} p_{ks}.$$

Кроме того, для всякого $s \in J(k, i_0)$ имеем $k \succ_s i_0$ и $i_0 \succ_s i$ для любого $i \in A_j$ такого, что $\overline{z}_i = 1$. Это означает, что решение $\overline{Z}' = \big((\overline{z}'_i), (\overline{z}'_{ij})\big)$, отличающееся от исходного оптимального решения $\overline{Z}$ лишь тем, что $\overline{z}'_k = 1, \overline{z}'_{kj} = 1$ для $j \in J(k, i_0)$ также будет оптимальным решением. Кроме того справедливо неравенство $L(X, \overline{Z}') < L(X, \overline{Z})$. Это противоречит тому, что $(X, \overline{Z})$ —допустимое решение. Лемма доказана.

Для всякого $j \in J$ положим $p_j = \max\limits_{i \in I_j} p_{ij}$. Если $I_j = \emptyset$, то $p_j = 0$.

Лемма 2. Для всякого допустимого решения $(X, \overline{Z})$, $X = \big((x_i)(x_{ij})\big)$, $\overline{Z} = \big((\overline{z}_i)(\overline{z}_{ij})\big)$ задачи $(1')$, (2)–(9) при любом $j \in J$ выполняется неравенство

$$\Big(\sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij}\Big)\Big(1 - \sum_{i \in I} \overline{z}_{ij}\Big) \leq p_j \max_{i \in I_j} x_i.$$

Доказательство. Если $\sum\limits_{i \in I} p_{ij} x_{ij} = 0$, то неравенство выполняется. Если $x_i = 1$ для некоторого $i \in I_j$, то неравенство также выполняется. Пусть $\sum\limits_{i \in I} p_{ij} x_{ij} > 0$ и пусть $x_i = 0$

для всякого $i \in I_j$. Тогда в силу леммы 1 имеем $\sum\limits_{i\in I} \overline{z}_{ij} = 1$ и требуемое неравенство выполняется. Лемма доказана.

Определим матрицу $(h_{ij}), i \in I, j \in J$, положив

$$h_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \in I_j \\ 1 & \text{иначе;} \end{cases}$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Величина

$$\sum_{j\in J} p_j - \min_{(x_i)} \Big\{ \sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J} \min_{i|x_i=1} p_j h_{ij} \Big\}$$

является верхней границей для оптимального значения целевой функции задачи $(1')$, (2)–(9).

Доказательство. Для всякого допустимого решения $(X, \overline{Z})$, $X = \big((x_i)(x_{ij})\big)$, $\overline{Z} = \big((\overline{z}_i)(\overline{z}_{ij})\big)$ задачи $(1')$, (2)–(9) в силу предыдущей леммы и равенства

$$\max_{i\in I_j} x_i = \max_{i|x_i=1} (1 - h_{ij})$$

справедливы соотношения

$$L(X, \overline{Z}) = -\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J} \Big(\sum_{i\in I} p_{ij} x_{ij} \Big) \Big(1 - \sum_{i\in I} \overline{z}_{ij} \Big) \leq$$

$$-\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J} p_j \max_{i\in I_j} x_i =$$

$$-\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J} p_j \max_{i|x_i=1} (1 - h_{ij}) =$$

$$\sum_{j\in J} p_j - \Big(\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J} \min_{i|x_i=1} p_j h_{ij} \Big).$$

Отсюда получаем, что величина

$$\max_{x_i} \Big\{ \sum_{j\in J} p_j - \Big(\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J} \min_{i|x_i=1} p_j h_{ij} \Big) \Big\} =$$

$$\sum_{j\in J} p_j - \min_{x_i} \Big\{ \sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J} \min_{i|x_i=1} p_j h_{ij} \Big\}$$

будет искомой верхней границей. Теорема доказана.

Из представленного вида верхней границы следует, что ее вычисление сводится к решению хорошо известной задачи размещения предприятий (средств обслуживания) [1, 8]. Поэтому алгоритм вычисления верхней границы включает два этапа. На первом этапе строятся исходные данные (определяется матрица $(h_{ij}), i \in I, j \in J$) рассматриваемой задачи размещения средств обслуживания, а на втором этапе определяется ее оптимальное решение $(x_i^\star), i \in I$.

Процедура построения матрицы $(h_{ij}), i \in I, j \in J$ состоит из n шагов. На j-м шаге при фиксированном элементе $j \in J$ выполняется m однотипных подшагов. На i-м подшаге вычисляется элемент h_{ij}. В начале полагается $h_{ij} = 0$. Если $i \notin A_j$ или $f_i = \infty$, то полагается $h_{ij} = 1$. Пусть $i \in A_j$ и $f_i \neq \infty$. Прежде всего, для всякого $s \in J$ вычисляется наилучший элемент i_s множества $A_s \setminus N(i)$ по отношению $\succ_s$, то есть такой элемент, что $i_s \succcurlyeq_s k$ для всякого $k \in A_s \setminus N(i)$. Если $A_s \setminus N(i) = \emptyset$, то полагается $i_s = i$. Далее для каждого $k \in I, g_k \neq \infty$, такого что $k \succ_j i$ определяются элементы $s \in J$, для которых верны соотношения $i \succcurlyeq_s i_s$ и $k \succ_s i$, что соответствует построению множества $J(k, i) = \{s \in J | i \succcurlyeq_s i_s, k \succ_s i\}$. Одновременно проверяется справедливость неравенства

$$g_k \leq \sum_{s | i \succcurlyeq_s i_s, k \succ_s i} p_{ks}.$$

Если для некоторого $k \in I, g_k \neq \infty, k \succ_j i$, неравенство выполняется, то полагается $h_{ij} = 1$. После этого начинается следующий подшаг.

Несложно видеть, что для выполнения одного подшага требуется время $O(mn)$, поэтому временная сложность первого этапа алгоритма вычисления верхней границы оценивается величиной $O(m^2n^2)$.

На втором этапе алгоритма для решения задачи размещения средств обслуживания может быть использован целый ряд алгоритмов [1, 8], построенных на идеях методов неявного перебора и локального поиска, включая коммерческие программные средства для решения задач целочисленного линейного программирования.

4 Алгоритм построения приближенного решения задачи $(1')$, (2)–(9)

Выше отмечалось, что в качестве приближенного решения задачи $(1')$, (2)–(9) можно рассматривать любое допустимое решение X задачи L'. Значение целевой функции $L(X, \overline{Z})$ на соответствующем допустимом решении $(X, \overline{Z})$ задачи $(1')$, (2)–(9) определяется по решению X однозначно. Кроме того, само допустимое решение $X = \big((x_i)(x_{ij})\big)$ однозначно определяется $(0,1)$–вектором (x_i). Поэтому допустимое решение задачи $(1')$, (2)–(9) можно отождествлять с $(0,1)$–вектором (x_i). По любому такому вектору (x_i) однозначно определяется значение $L(X, \overline{Z})$ целевой функции задачи $(1')$, (2)–(9) на соответствующем допустимом решении $(X, \overline{Z})$.

Отметим, что одновременно с вычислением верхней границы для оптимального значения целевой функции задачи $(1')$, (2)–(9) определяется оптимальное решение $(x_i^\star)$ соответствующей задачи размещения средств обслуживания. Это оптимальное решение можно рассматривать как начальное приближенное решение задачи $(1')$, (2)–(9). Но поскольку мы заинтересованы в построении приближенного решения со значением целевой функции близким к оптимальному, то рассмотрим процедуру улучшения начального приближенного решения.

В качестве основы для такой процедуры используем процедуру локального поиска по некоторой окрестности. В случае локального поиска в множестве $(0,1)$–векторов $x = (x_i)$ обычно используется окрестность

$$N(x) = \{y \,|\, d(x,y) \leq 1 \text{ или } d(x,y) \leq 2, \quad d(0,x) = d(0,y)\},$$

где $d(x,y)$ — расстояние Хэмминга , равное числу несовпадающих компонент $(0,1)$–векторов x и y. Элементы этого множества получаются из вектора x изменением значения одной компоненты или изменением значений двух компонент, сумма которых равна единице. В нашем случае поиск по окрестности $N(x)$ может быть затруднён, поскольку вычисление для каждого вектора $y \in N(x)$ соответствующего ему допустимого решения $(X, \overline{Z})$ задачи $(1')$, (2)–(9) может оказаться достаточно трудоемкой процедурой хотя бы потому, что для ее реализации необходимо всякий раз решить две задачи целочисленного линейного программирования. Поэтому определим для $(0,1)$–вектора x окрестность $N_0(x) \subset N(x)$, включающую лишь относительно небольшое число наиболее перспективных вариантов изменения вектора x. В качестве основной характеристики, по значению которой будем оценивать целесообразность включения (или исключения) продукции данного вида в перспективное решение, используем величину прибыли от продукции данного вида, получаемой фирмой–лидером. Для допустимого решения $X = \big((x_i)(x_{ij})\big)$ эта величина для элемента $i \in I, x_i = 1$, равняется $\sum\limits_{j\in J} p_{ij}x_{ij} - f_i$.

Множество $N_0(x)$ "перспективных" локальных вариаций решения x строится следующим образом. Число элементов в множестве $N_0(x)$ равняется числу элементов $k \in I$, для которых $f_k \neq \infty$. Обозначим через $I_0(x)$ множество $\{i \in I | x_i = 1\}$ и для всякого $k \in I, f_k \neq \infty$, определим $(0,1)$–вектор $x^k = (x_i^k)$ по следующим правилам.

Если $x_k = 1$, то положим $x_i^k = x_i$ для $i \neq k$ и $x_k^k = 0$.

Если $x_k = 0$, то положим $x_i^k = x_i$ для $i \neq k$ и $x_k^k = 1$. Далее построим допустимое решение $X^k = \big((x_i^k)(x_{ij}^k)\big)$ и вычислим величину прибыли для продукции вида k, равную $\sum\limits_{j\in J} p_{kj}x_{kj}^k - f_k$.

Если эта величина неотрицательная, то для всякого $i \in I_0(x)$ вычисляем величину прибыли $\sum\limits_{j\in J} p_{ij}x_{ij}^k - f_i$. Если для всякого $i \in I_0(x)$ величина прибыли неотрицательная, то есть появление на рынке продукции вида k не делает продукцию других видов убыточной, то вектор (x_i^k) считаем построенным. Если же для некоторых $i \in I_0(x)$ величина прибыли отрицательная, то определяем элемент $i_0 \in I_0(x)$, для которого эта величина наименьшая, полагаем $x_{i_0}^k = 0$ и завершаем построение вектора (x_i^k).

Если $\sum\limits_{j\in J} p_{kj}x_{kj}^k - f_k < 0$, то среди элементов $l \in I_0(x)$ выберем такой элемент l_0, что вывод продукции вида l_0 с рынка приводит к максимальному увеличению прибыли от продукции вида k. С этой целью для всякого $l \in I_0(x)$ рассматриваем $(0,1)$–вектор (y_i^l), где $y_i^l = x_i^k$ для $i \neq l$ и $y_l^l = 0$, строим допустимое решение $Y^l = \big((y_i^l)(y_{ij}^l)\big)$, вычисляем величину прибыли $\sum\limits_{j\in J} p_{kj}y_{kj}^l - f_k$ для продукции вида k и выбираем элемент l_0, для которого эта величина наибольшая. После этого полагаем $x_{l_0}^k = 0$ и вектор (x_i^k) считаем построенным.

Алгоритм улучшения исходного приближенного решения $x^\star = (x_i^\star)$ представляет собой процедуру локального подъема по окрестности $N_0(x)$, начиная с вектора $x^\star = (x_i^\star)$ до локального максимума по окрестности $N_0(x)$ функции $L(X, \overline{Z})$. Алгоритм состоит из предварительного шага и некоторого числа однотипных основных шагов.

На предварительном шаге имеется вектор $(x_i^\star)$. Шаг состоит в построении по этому вектору допустимого решения $(X, \overline{Z})$ и вычислении значения $L(X, \overline{Z})$. Для этого по вектору $(x_i^\star)$ строится допустимое решение $X = \big((x_i^\star)(x_{ij}^\star)\big)$ задачи L', затем при фиксированном решении X определяется оптимальное решение $\widetilde{Z}$ задачи F и, наконец, при фиксированных решениях X и $\widetilde{Z}$ определяется оптимальное решение $\overline{Z}$ вспомогательной задачи (10)–(14) и вычисляется значение $L(X, \overline{Z})$. После этого начальное допустимое решение $(X, \overline{Z})$ считается построенным и начинается первый основной шаг.

На каждом основном шаге имеется вектор $x = (x_i)$, соответствующее ему допустимое решение $(X, \overline{Z})$ и значение L целевой функции задачи $(1')$, (2)–(9) на этом решении. Шаг состоит в последовательном просмотре элементов окрестности $N_0(x)$ и выборе среди них такого решения, которое дает допустимое решение лучше, чем текущее допустимое решение $(X, \overline{Z})$. Чтобы найти такое решение для всякого $k \in I, f_k \neq \infty$, строится вектор $x^k = (x_i^k)$

и определяется соответствующее ему допустимое решение $(X^k, \overline{Z}^k)$ и значение L^k целевой функции. Для этого по вектору (x_i^k) строится допустимое решение $X^k = \big((x_i^k)(x_{ij}^k)\big)$ задачи L', затем при фиксированном решении X^k определяется оптимальное решение $\widetilde{Z}^k$ задачи F и, наконец, при фиксированных решениях X^k и $\widetilde{Z}^k$ определяется оптимальное решение $\overline{Z}^k$ вспомогательной задачи (10)–(14) и вычисляется значение L^k. Если $L \geq L^k$, то рассматривается следующий элемент $k \in I, f_k \neq \infty$, и строится новый вектор $x^k \in N_0(x)$, в противном случае полагается $x = x^k$, $X = X^k$, $\overline{Z} = \overline{Z}^k$, $L = L^k$ и начинается следующий шаг. Если на данном шаге неравенство $L \geq L^k$ выполняется для всех $k \in I, f_k \neq \infty$, то алгоритм заканчивает работу и $(X, \overline{Z})$ —искомое приближенное решение задачи.

Время работы алгоритма зависит от числа шагов, необходимых для построения локального оптимума, а временная сложность каждого шага определяется временем построения окрестности $N_0(x)$, которое оценивается величиной $O(mn)$ и временем, необходимым для решения задач F и (10)–(14). При этом отметим, что задача F и вспомогательная задача (10)–(14) являются задачами смешанного линейного программирования, поскольку в обеих задачах переменные $z_{ij}, i \in I, j \in J$, можно считать неотрицательными. Значения 0 и 1 этим переменным обеспечивают ограничения (7) и (11).

5 Числовой пример

В рассматриваемом числовом примере задачи выбора наилучшего решения фирмой–лидером имеется 12 потребителей и 12 видов продукции, которые могут быть предложены рынку фирмой–лидером и фирмой–последователем. Виды продукции с номерами от 1 до 6 принадлежит фирме–лидеру, а с номерами от 7 до 12 — фирме–последователю. Каждая пара видов продукции с номерами i и $i+1$, где i — нечетный номер, соответствует продукции одного потребительского свойства, но реализуемой по разным ценам. Продукция с нечетным номером реализуется по низкой цене, а с четным номером — по высокой цене. Величина фиксированных затрат фирмы–лидера f_i на продукцию вида $i, 1 \leq i \leq 6$, равняется 40 для нечетных i и 35 для четных i. Аналогично, величина фиксированных затрат фирмы–последователя g_i на продукцию вида $i, 7 \leq i \leq 12$, равняется 35 для нечетных i и 30 для четных i.

Множества $A_j, j = 1, \ldots, 12$, обозначающие допустимые множества видов продукции для каждого потребителя, содержат следующие элементы, упорядоченные по предпочтениям соответствующего потребителя:

$$
\begin{array}{ll}
A_1 = \{3, 7, 4, 8, 5\}, & A_7 = \{5, 7, 6, 8\}, \\
A_2 = \{3, 9, 10, 4, 1, 2\}, & A_8 = \{11, 12, 7, 8, 1, 2, 5\}, \\
A_3 = \{9, 10, 1, 2\}, & A_9 = \{5, 11, 12, 6\}, \\
A_4 = \{9, 3, 10, 4\}, & A_{10} = \{3, 7, 8, 4, 5\}, \\
A_5 = \{7, 8, 5, 6, 11\}, & A_{11} = \{1, 11, 2, 5, 12, 6\}, \\
A_6 = \{7, 5, 8, 6, 1\}, & A_{12} = \{5, 3, 9, 6, 10, 4\}.
\end{array}
$$

Для видов продукции из множеств $A_j, j = 1, \ldots, 12$, значения соответствующих доходов фирмы–лидера или фирмы–последователя задаются следующими величинами:

$p_{3,1} = 10$; $p_{4,1} = 12$; $p_{5,1} = 12$;	$p_{7,1} = 9,6$; $p_{8,1} = 12$;
$p_{1,2} = 15$; $p_{2,2} = 20$; $p_{3,2} = 14$; $p_{4,2} = 16,8$;	$p_{9,2} = 14,4$; $p_{10,2} = 16$;
$p_{1,3} = 18$, $p_{2,3} = 24$;	$p_{9,3} = 14,4$; $p_{10,3} = 16$;
$p_{3,4} = 10$; $p_{4,4} = 12$;	$p_{9,4} = 10,8$; $p_{10,4} = 12$;
$p_{5,5} = 18$; $p_{6,5} = 22,5$;	$p_{7,5} = 12$; $p_{8,5} = 15$; $p_{11,5} = 22,5$;
$p_{1,6} = 18$; $p_{5,6} = 14,4$; $p_{6,6} = 18$;	$p_{7,6} = 14,4$; $p_{8,6} = 18$;
$p_{5,7} = 8,4$; $p_{6,7} = 10,5$;	$p_{7,7} = 9,6$; $p_{8,7} = 12$;
$p_{1,8} = 12$; $p_{2,8} = 16$; $p_{5,8} = 18$;	$p_{7,8} = 14,4$; $p_{8,8} = 18$; $p_{11,8} = 15$; $p_{12,8} = 18$;
$p_{5,9} = 16,8$; $p_{6,9} = 21$;	$p_{11,9} = 15$; $p_{12,9} = 18$;
$p_{3,10} = 10$; $p_{4,10} = 12$; $p_{5,10} = 12$;	$p_{7,10} = 8$; $p_{8,10} = 10$;
$p_{1,11} = 18$; $p_{2,11} = 24$; $p_{5,11} = 24$; $p_{6,11} = 30$;	$p_{11,11} = 21$; $p_{12,11} = 25,2$;
$p_{3,12} = 16$; $p_{4,12} = 19,2$; $p_{5,12} = 14,4$; $p_{6,12} = 18$;	$p_{9,12} = 16,2$; $p_{10,12} = 18$.

По указанным величинам несложно вычислить прибыли, которые получат фирма–лидер и фирма–последователь при любом решении (x_i) фирмы–лидера. Например, если фирма–лидер принимает решение (x_i), где $x_3 = 1, x_5 = 1$ и $x_i = 0$ при $i \neq 3, i \neq 5$, то соответствующим оптимальным решением фирмы–последователя будет вектор $(\overline{z}_i)$, где $\overline{z}_7 = 1$ и $\overline{z}_i = 0$ при $i \neq 7$. При этом фирма–лидер обслуживает потребителей с номерами 1, 2, 4, 7, 9, 11 и 12, которые дают ей доход равный 107,6. Фирма–последователь получает потребителей с номерами 5, 6, 8 и доход равный 40,8. Прибыль фирмы–лидера равняется 27,6, а фирмы–последователья — 5,8. Заметим, что при рассмотренных решениях потребитель 3 остается необслуженным.

Необходимые для вычисления верхней границы величины прибыли фирмы–лидера множества $I_j, j = 1, \ldots, 12$, и коэффициенты $p_j, j = 1, \ldots, 12$, в случае рассматриваемого примера, получаются следующими:

$$
\begin{array}{llll}
I_1 = \{3,4\}, & p_1 = 12; & I_7 = \{5,6\}, & p_7 = 10,5; \\
I_2 = \{3,4\}, & p_2 = 16,8; & I_8 = \{1\}, & p_8 = 12; \\
I_3 = \{1,2\}, & p_3 = 24; & I_9 = \{5,6\}, & p_9 = 21; \\
I_4 = \{3,4\}, & p_4 = 12; & I_{10} = \{3,4\}, & p_{10} = 12; \\
I_5 = \{5\}, & p_5 = 18; & I_{11} = \{1,2,5\}, & p_{11} = 24; \\
I_6 = \{5\}, & p_6 = 14,4; & I_{12} = \{3,5,6\}, & p_{12} = 18.
\end{array}
$$

Оптимальное значение целевой функции соответствующей задачи размещения средств обслуживания равняется 111, поэтому значение верхней границы получается следующее $UB = 194,7 - 111 = 83,7$. Указанное оптимальное значение достигается на решении $(x_i^\star)$ равном $(0,0,0,1,1,0)$. Отметим, что здесь и далее для решений (x_i) будем указывать значения только шести первых компонент, поскольку остальные всегда будут нулевыми.

Алгоритм улучшения исходного приближенного решения $x = (0,0,0,1,1,0)$ состоит из предварительного шага и, в нашем случае, трех основных шагов.

На предварительном шаге по вектору $x = (0,0,0,1,1,0)$ определяется решение $\overline{z} = (1,0,0,1,0,0)$ и значение целевой функции $L = -11,4$. По аналогии с решениями (x_i) для решений $(\overline{z}_i)$ будем указывать значения только шести последних компонент, поскольку первые шесть всегда будут нулевыми.

На первом основном шаге имеется решение $x = (0,0,0,1,1,0)$, для которого $L = -11,4$. Шаг начинается с построения вектора $x^1 = (1,0,0,1,1,0)$, для которого вычисляется решение $\overline{z}^1 = (1,0,0,1,0,0)$ и значение целевой функции $L^1 = -57,4$. Поскольку $L^1 < L$, то далее строится решение $x^2 = (0,1,0,1,1,0)$, для которого определяется решение $\overline{z}^2 = (1,0,0,1,0,0)$ и значение целевой функции $L^2 = -46,4$. Поскольку $L^2 < L$, то рассматривается следующее решение $x^3 = (0,0,1,0,1,0)$. Для этого вектора вычисляется решение

$\overline{z}^3 = (1,0,0,0,0,0)$ и значение целевой функции $L^3 = 27,6$. Поскольку $L^3 > L$, то начинается второй шаг.

На втором основном шаге имеется решение $x = (0,0,1,0,1,0)$, для которого $L = 27,6$. Шаг состоит в последовательном построении векторов x^k, вычислении соответствующих решений $\overline{z}^k$ и значений целевой функции L^k. Получаются следующие вектора x^k и величины L^k:

$$\begin{aligned}
x^1 &= (1,0,1,0,1,0), \quad L^1 = -0,4;\\
x^2 &= (0,1,1,0,1,0), \quad L^2 = 16,6;\\
x^3 &= (0,0,0,0,1,0), \quad L^3 = 38;
\end{aligned}$$

Поскольку $L^3 > L$, то начинается третий шаг.

На третьем шаге имеется решение $x = (0,0,0,0,1,0)$, для которого $L = 38$. На этом шаге рассматриваются следующие вектора x^k и соответствующие значения целевой функции L^k:

$$\begin{aligned}
x^1 &= (1,0,0,0,1,0), \quad L^1 = -8;\\
x^2 &= (0,1,0,0,1,0), \quad L^2 = 3;\\
x^3 &= (0,0,1,0,1,0), \quad L^3 = 27,6;\\
x^4 &= (0,0,0,1,1,0), \quad L^4 = -11,4;\\
x^5 &= (0,0,0,0,0,0), \quad L^5 = 0;\\
x^6 &= (0,0,0,0,0,1), \quad L^3 = -24,5;
\end{aligned}$$

Поскольку $L^k \leq L$ для всякого $k = 1,\ldots,6$, то алгоритм заканчивает работу и $x = (0,0,0,0,1,0)$ — искомое приближенное решение.

Решению $x = (0,0,0,0,1,0)$ фирмы–лидера соответствует оптимальное решение $\overline{z} = (0,1,0,1,0,0)$ фирмы–последователя. При этом фирма–лидер обслуживает потребителей с номерами 6, 7, 9, 11 и 12, получая прибыль равную 38, а фирма–последователь захватывает остальных потребителей и получает прибыль равную 39.

В заключение отметим, что полученное приближенное решение, как несложно проверить, является не только локальным максимумом, но и оптимальным решением рассматриваемого примера задачи выбора наилучшего решения фирмой–лидером.

Список литературы

[1] Береснев В. Л. Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. – Новосибирск. Изд-во Инст. математики, – 2005.

[2] Береснев В. Л. Верхние оценки для целевых функций дискретных задач конкурентного размещения предприятий // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2008. Т. 15, № 4. С. 3–24.

[3] Campos C., Moreno J. A. Multiple voting location problems // Eur. J. Oper. Res. — (to appear)

[4] Eiselt H.A. Laporte G. Sequential location problems // Eur. J. Oper. Res. 1996. V. 96. P. 217–231.

[5] Dempe S. Foundations of bilevel programming. Kluwer Ac. Pub. 2002.

[6] Dobson G., Karmarkar U. Competitive location on network // Oper. Res. 1987. V. 35. P. 565–574.

[7] Drezner Z., Hamacher H.W. (eds.) Facility location: applications and theory. Springer. 2002.

[8] Mirchandani P. B., Francis R. L. Discrete location theory. New York: John Wiley and Sons, 1990.

[9] Plastria F. Static competitive facility location: An overvew of optimixation approaches // Eur. J. Oper. Res. 2001. V. 129. P. 461–470.

[10] Plastria F., Vanhaverbeke L. Discrete models for competitive location with foresight // Comput. Oper. Res. 2008. V.35. P. 683–700.

[11] Santos Renate D.R., Suarez Vega R. Dorta Gonzalez P. The leader – follower location model // Networks and Spatial Economics. 2007. V. 7. P. 45–61.

[12] Stole L.A. Price Discrimination and Competition // M. Armstrong, R.H. Porter (Eds.) Handbook of Industrial Organization. V. 3. Amsterdam: Elsevier, 2007. P. 2221–2299.

[13] Stackelberg H. von. Marktform und Gleichgewicht. — Berlin: Springer-Verl., 1934 (engl.transl.: The theory of the market economy. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1952. — 289 p.)