Автоматика и телемеханика, № 3, 2012

Приложения математического программирования

© 2012 г. **В.Л. БЕРЕСНЕВ, д-р физ.-мат. наук**
(Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск)

АЛГОРИТМЫ ЛОКАЛЬНОГО ПОИСКА ДЛЯ ЗАДАЧИ КОНКУРЕНТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ[1]

Рассматривается математическая модель, обобщающая известную задачу размещения предприятий и представленная в виде задачи двухуровневого математического программирования. В этой модели две соперничающие стороны последовательно размещают предприятия и каждая из сторон стремится максимизировать свою прибыль. В качестве оптимальных решений исследуемой задачи рассматриваются оптимальные кооперативные и оптимальные некооперативные решения. Предлагается метод вычисления верхних границ значений целевой функции задачи на оптимальных кооперативных и некооперативных решениях. Одновременно с вычислением верхней границы строится начальное приближенное решение. Предлагаются алгоритмы локального поиска для улучшения этого решения. Алгоритмы включают два этапа: на первом строится локально-оптимальное решение, а на втором – локально-оптимальное решение относительно окрестности, названной обобщенной. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующие возможности предложенных алгоритмов.

1. Введение

Рассматривается задача, являющаяся обобщением известной задачи дискретной оптимизации – задачи размещения предприятий (средств обслуживания) [1, 2]. В этой модели в отличие от классической задачи размещения предприятий имеются две соперничающие стороны, которые последовательно открывают свои предприятия, стремясь “захватить” потребителей и максимизировать получаемую прибыль. При этом правила “захвата” потребителя одной из сторон устанавливаются с учетом предпочтений потребителя.

Принятие решений соперничающими сторонами при конкурентном размещении предприятий можно рассматривать как игру Штакельберга [3], а стороны, следуя терминологии этой игры, называть *Лидером* и *Последователем*. Задача Лидера в этой игре состоит в определении такого множества открываемых им предприятий, которое дает максимальную прибыль при условии, что часть потребителей будет “захвачена” Последователем. Получаемая математическая модель представляет собой задачу двухуровневого целочисленного программирования [4], включающую задачи верхнего и нижнего уровней. При этом оптимальное решение задачи нижнего уровня зависит от допустимого решения задачи верхнего уровня и используется для вычисления значения её целевой функции.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09-01-00059, 11-07-00474).

Дополнительные трудности при исследовании таких моделей возникают и в силу возможной неединственности оптимального решения задачи нижнего уровня, что требует конкретизации понятия оптимального решения задачи двухуровневого программирования.

Список литературы, посвященной построению и исследованию математических моделей конкурентного размещения предприятий, можно считать обширным [3, 5–10]. Большое внимание в этих работах уделяется, в частности, различным концепциям оптимальности решений, принимаемых Лидером и Последователем. Вместе с тем предложения по построению работоспособных алгоритмов решения задачи конкурентного размещения предприятий без существенных дополнительных ограничений, например на число открываемых предприятий, отсутствуют. Близкой к рассматриваемой является задача о (r/p)-центроиде [11]. В этой модели целевые функции Лидера и Последователя отличаются только знаком и заданы ограничения в виде равенств на число предприятий, открываемых как Лидером, так и Последователем. Для вычисления верхней границы значений целевой функции задачи о (r/p)-центроиде в [5, 12] предлагается подход, состоящий в её сведении к задаче $(0, 1)$-программирования с экспоненциальным числом переменных и ограничений. В [12] рассматривается эвристическая процедура, позволяющая выбрать "небольшое" число существенных переменных и ограничений такой задачи. Оптимальное решение полученной таким образом релаксированной задачи даёт искомую верхнюю границу.

Для исследуемой в работе задачи конкурентного размещения предприятий в качестве оптимальных решений рассматриваются так называемые оптимальные кооперативные и некооперативные решения. Предлагается метод вычисления верхних границ значений целевой функции на оптимальных кооперативных и некооперативных решениях. Идея метода изложена в [13] и численно апробирована в [14, 15]. В настоящей работе показано, что предложенный метод может быть использован для построения верхней границы как в случае некооперативных, так и кооперативных решений. Одновременно с вычислением верхней границы строится соответствующее допустимое кооперативное или некооперативное решение задачи конкурентного размещения предприятий. Это решение может рассматриваться как начальное приближенное решение. Предлагается алгоритм улучшения такого решения. Для этого задачи поиска оптимального кооперативного и оптимального некооперативного решений представляются в виде задачи максимизации некоторой псевдобулевой функции [1, 16]. Алгоритм поиска "хорошего" решения такой задачи включает два этапа. На первом этапе стандартным алгоритмом локального поиска [17] по окрестности специального вида начальное приближенное решение преобразуется в локально- оптимальное. На втором этапе с использованием алгоритма локального поиска по так называемой обобщенной окрестности [15] строится искомое приближенное решение. Это решение является не только локально-оптимальным, но и наилучшим в сравнении с другими локально-оптимальными решениями, "окружающими" найденное решение. Приводятся результаты вычислительного эксперимента, показывающие существенное улучшение решения в результате использования обобщенной окрестности.

В разделе 2 приводится формулировка задачи конкурентного размещения предприятий в виде задачи двухуровневого целочисленного программирования. В разделе 3 даются определения оптимального кооперативного и оптимального некооперативного решений задачи. Раздел 4 посвящен описанию метода вычисления верхних границ значений целевой функции задачи на оптимальном кооперативном и оптимальном некооперативном решениях. В разделе 5 задача поиска оптимального кооперативного (некооперативного) решения представляется как задача максимизации псевдобулевой функции и рассматривается стандартный алгоритм локального поиска для этой задачи, использующий окрестность специального вида. Раздел 6 посвящен описанию алгоритма локального поиска с обобщенной окрестностью. Там же приводятся результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующих возможности предложенных алгоритмов.

2. Задача конкурентного размещения предприятий

Задача конкурентного размещения предприятий, как уже отмечалось, является математической моделью, возникающей при исследовании более общей ситуации, чем в случае классической задачи размещения. Здесь также имеется множество потенциальных предприятий (мест размещения предприятий) и некоторое множество потребителей. Но в отличие от классической задачи размещения предприятий имеются две соперничающие стороны, которые последовательно размещают (открывают) свои предприятия, стремясь "захватить" потребителей и достичь своих, вообще говоря, различных целей.

Принятие решений соперничающими сторонами при конкурентном размещении предприятий будем рассматривать как игру Штакельберга [3], а соперничающие стороны называть соответственно *Лидером* и *Последователем*.

Задача Лидера в этой игре состоит в определении такого множества открываемых предприятий, которое максимизирует его целевую функцию при условии, что часть потребителей будет "захвачена" Последователем.

Для формальной записи задачи Лидера введем обозначения и сформулируем необходимые допущения. Как и в классической задаче размещения предприятий [1, 2], обозначим через $I = \{1, \dots, m\}$ множество предприятий (возможных мест открытия предприятий), а через $J = \{1, \dots, n\}$ – множество потребителей. Считаем, что предприятие $i \in I$ может быть открыто как Лидером, так и Последователем. Поэтому для всякого $i \in I$ предполагаем заданными величины f_i и g_i, равные фиксированным затратам на открытие предприятия i соответственно Лидером и Последователем. Если по каким-то причинам Лидер или Последователь не может открыть предприятие i, то полагаем $f_i = \infty$ или $g_i = \infty$.

Для любых $i \in I$, $j \in J$ через p_{ij} обозначим величину прибыли, получаемой предприятием i при обслуживании потребителя j.

Будем считать, что выбор открываемого предприятия для обслуживания потребителя $j \in J$ производится с учетом предпочтений потребителя j. Считаем, что предпочтения потребителя $j \in J$ задаются отношением порядка $\succ_j$ на множестве I. Для $i, k \in I$ отношение $i \succ_j k$ означает, что из двух открытых предприятий i и k для потребителя $j \in J$ более предпочтительным является предприятие i. Отношение $i \succcurlyeq_j k$ означает, что либо $i \succ_j k$, либо $i = k$.

При определении стороны, захватывающей потребителя $j \in J$, принимается следующее правило. Пусть i_j есть наиболее предпочтительное предприятие для потребителя j среди всех предприятий, открытых Лидером, т.е. такое, что $i_j \succcurlyeq_j i$ для всякого предприятия $i \in I$, открытого Лидером. Аналогично пусть k_j есть наиболее предпочтительное для потребителя j предприятие среди всех, открытых Последователем. Полагаем, что потребителя $j \in J$ "захватывает" Лидер, если $i_j \succ_j k_j$, и "захватывает" Последователь, если $k_j \succ_j i_j$.

Если потребитель $j \in J$ "захвачен" Лидером, то будем считать, что для обслуживания данного потребителя Лидер использует предприятие i_j. Если же потребитель $j \in J$ "захвачен" Последователем, то будем считать, что при выборе предприятия для обслуживания данного потребителя Последователь имеет некоторую свободу и может выбрать любое открытое им предприятие $k \in I$, но такое, что $k \succ_j i_j$.

Будем считать, что целью как Лидера, так и Последователя является получение максимальной прибыли. Прибыль Лидера и Последователя складывается из прибылей всех открытых соответственно Лидером и Последователем предприятий. В свою очередь, прибыль каждого открытого предприятия равняется сумме прибылей, полученных от потребителей, которые обслуживаются данным предприятием, минус величина фиксированных затрат на открытие этого предприятия.

Введем следующие переменные, аналогичные переменным классической задачи размещения предприятий:

x_i – переменная, равная единице, если Лидер открывает предприятие $i \in I$, и принимающая значение нуль в противном случае;

x_{ij} – переменная, принимающая значение единица, если предприятие $i \in I$, открытое Лидером, назначается для обслуживания потребителя $j \in J$, и равная нулю в противном случае;

z_i – переменная, равная единице, если Последователь открывает предприятие $i \in I$, и принимающая значение нуль в противном случае;

z_{ij} – переменная, принимающая значение единица, если предприятие $i \in I$, открытое Последователем, назначается для обслуживания потребителя $j \in J$, и равная нулю в противном случае.

С использованием введенных переменных задача Лидера в рассматриваемой игре Штакельберга, которую будем называть *задачей конкурентного размещения предприятий*, формулируется как следующая задача двухуровневого целочисленного программирования:

$$\max_{(x_i),(x_{ij})} \left\{ -\sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij} \right) \left(1 - \sum_{i \in I} \tilde{z}_{ij} \right) \right\}; \tag{1}$$

$$x_i + \sum_{k: i \succ_j k} x_{kj} \leqslant 1, \quad i \in I,\ j \in J; \tag{2}$$

$$x_i \geqslant x_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J; \tag{3}$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I,\ j \in J; \tag{4}$$

$$(\tilde{z}_i, \tilde{z}_{ij}) \text{ – оптимальное решение задачи :} \tag{5}$$

$$\max_{(z_i),(z_{ij})} \left\{ -\sum_{i \in I} g_i z_i + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} p_{ij} z_{ij} \right\}; \tag{6}$$

$$x_i + \sum_{k: i \succcurlyeq_j k} z_{kj} \leqslant 1, \quad i \in I,\ j \in J; \tag{7}$$

$$z_i \geqslant z_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J; \tag{8}$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I,\ j \in J. \tag{9}$$

Как и всякая задача двухуровневого математического программирования, сформулированная задача (1)–(9) включает задачу верхнего уровня (1)–(4) и задачу нижнего уровня (5)–(9). Задачу верхнего уровня будем обозначать через $\mathcal{L}$, а задачу нижнего уровня – через $\mathcal{F}$. Для задачи (1)–(9) в целом будем использовать обозначение $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, а целевую функцию (1) будем считать также целевой функцией задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

Целевая функция задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ выражает, как уже отмечено, величину прибыли, получаемой Лидером с учетом потери части потребителей, захваченных Последователем. Неравенства (2) реализуют правило выбора предприятия, открытого Лидером, для обслуживания потребителей. Эти же неравенства гарантируют, что для обслуживания каждого потребителя может быть выбрано только одно предприятие, открытое Лидером. Целевая функция (6) задачи $\mathcal{F}$ выражает величину прибыли, получаемой Последователем. Неравенства (7) реализуют условие “захвата” потребителей Последователем при заданных предприятиях, открытых Лидером. В частности, эти ограничения показывают, что если предприятие открыто Лидером, то оно не может быть использовано Последователем для обслуживания потребителей.

3. Оптимальные решения задачи конкурентного размещения предприятий

Далее допустимое решение $((x_i), (x_{ij}))$ задачи $\mathcal{L}$ будем обозначать через X, а допустимое решение $((z_i), (z_{ij}))$ задачи $\mathcal{F}$ – через Z. Не умаляя общности, будем считать, что если допустимое решение X задачи $\mathcal{L}$ – ненулевое решение, то $\sum_{i\in I} x_{ij} = 1$ для всякого $j \in J$. Пару $(X, \widetilde{Z})$, где X – допустимое решение задачи $\mathcal{L}$, а $\widetilde{Z}$ – оптимальное решение задачи $\mathcal{F}$ при заданном X, назовем *допустимым решением* задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. Будем считать, что если X – нулевое решение, то существует допустимое решение Z задачи $\mathcal{F}$, на котором значение целевой функции задачи $\mathcal{F}$ положительно. Поэтому при исследовании задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ будем рассматривать только ненулевые допустимые решения $(X, \widetilde{Z})$.

Обозначим через $L(X, \widetilde{Z})$ значение целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на допустимом решении $(X, \widetilde{Z})$, а через $F(Z)$ – значение целевой функции задачи $\mathcal{F}$ на допустимом решении Z.

Отметим, что рассматриваемая задача $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ является корректной, если для любых допустимых решений $(X, \widetilde{Z}_1)$, $(X, \widetilde{Z}_2)$ выполняется равенство $L(X, \widetilde{Z}_1) = L(X, \widetilde{Z}_2)$. Это условие справедливо, в частности, когда при любом допустимом решении X задача $\mathcal{F}$ имеет единственное оптимальное решение. В общем случае задача $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ не является корректной, поскольку для некоторых допустимых решений X не понятно, какое оптимальное решение $\widetilde{Z}$ задачи $\mathcal{F}$ использовать для вычисления значения целевой функции.

Чтобы снять эту неопределенность, необходимо принять дополнительные правила, руководствуясь которыми Последователь принимает решение о размещении своих предприятий. Рассмотрим следующие два правила, которые назовем соответственно *правилами кооперативного* и *некооперативного поведения*.

Считаем, что при кооперативном поведении Последователь выбирает такое оптимальное решение $\widetilde{Z}$, которое является наилучшим с точки зрения Лидера. Допустимое решение $(X, \bar{Z})$ задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ назовем *допустимым кооперативным решением* задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, если $L(X, \bar{Z}) \geqslant L(X, \widetilde{Z})$ для всякого допустимого решения $(X, \widetilde{Z})$ задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. Допустимое кооперативное решение $(X^*, \bar{Z}^*)$ задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ назовем *оптимальным кооперативным решением* задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, если $L(X^*, \bar{Z}^*) \geqslant L(X, \bar{Z})$ для всякого допустимого кооперативного решения $(X, \bar{Z})$.

Аналогично при некооперативном поведении Последователь выбирает оптимальное решение $\widetilde{Z}$, которое является наихудшим для Лидера и которое дает наименьшее значение целевой функции $L(X, \widetilde{Z})$. Допустимое решение $L(X, \bar{Z})$ задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ назовем *допустимым некооперативным решением* задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, если $L(X, \bar{Z}) \leqslant L(X, \widetilde{Z})$ для всякого допустимого решения $(X, \widetilde{Z})$ задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. Допустимое некооперативное решение $(X^*, \bar{Z}^*)$ задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ назовем *оптимальным некооперативным решением* задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, если $L(X^*, \bar{Z}^*) \geqslant L(X, \bar{Z})$ для всякого допустимого некооперативного решения $(X, \bar{Z})$.

Цель работы – построение допустимых кооперативных и некооперативных решений задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, дающих значения целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, близкие к наилучшим. Такие допустимые решения будем называть еще *приближенными* кооперативными и некооперативными решениями задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

Заметим, что значение целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на любом приближенном кооперативном (некооперативном) решении определяется некоторым допустимым решением X задачи $\mathcal{L}$. При этом данному X может соответствовать несколько допустимых кооперативных (некооперативных) решений $(X, \bar{Z})$, но значение целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на всех таких решениях будет одинаковым. Таким образом, любое допустимое решение X задачи $\mathcal{L}$ однозначно определяет значение $L(X, \bar{Z})$ на некотором допустимом кооперативном (некооперативном) решении.

Пусть задано решение X. Соответствующее допустимое кооперативное решение $(X, \bar{Z})$ задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ определяется алгоритмом, включающим два этапа.

На этапе 1 при фиксированном решении X решается задача $\mathcal{F}$ и вычисляется оптимальное значение $F(\widetilde{Z})$ ее целевой функции.

На этапе 2 при фиксированном решении X решается следующая вспомогательная задача:

$$\max_{(z_i),(z_{ij})} \left\{ \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I} p_{ij} x_{ij} \right) \left(1 - \sum_{i\in I} z_{ij} \right) \right\}; \tag{10}$$

$$x_i + \sum_{k: i \succcurlyeq_j k} z_{kj} \leqslant 1, \quad i \in I,\ j \in J; \tag{11}$$

$$z_i \geqslant z_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J; \tag{12}$$

$$-\sum_{i\in I} g_i z_i + \sum_{j\in J} \sum_{i\in I} p_{ij} z_{ij} \geqslant F(\widetilde{Z}); \tag{13}$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I,\ j \in J. \tag{14}$$

Оптимальное решение $\bar{Z} = ((\bar{z}_i), (\bar{z}_{ij}))$ этой задачи дает искомое допустимое кооперативное решение $(X, \bar{Z})$ задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

Допустимое некооперативное решение $(X, \bar{Z})$ задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ строится аналогичным образом. Отличие состоит в том, что на этапе 2 рассматривается вспомогательная задача, в которой требуется найти величину

$$\min_{(z_i),(z_{ij})} \left\{ \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I} p_{ij} x_{ij} \right) \left(1 - \sum_{i\in I} z_{ij} \right) \right\} \tag{15}$$

при ограничениях (11)–(14). Оптимальное решение $\bar{Z} = ((\bar{z}_i), (\bar{z}_{ij}))$ задачи (15), (11)–(14) дает искомое допустимое некооперативное решение $(X, \bar{Z})$ задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

4. Верхние границы для значений целевой функции задачи конкурентного размещения предприятий

Поскольку целью исследования является получение приближенных решений задачи конкурентного размещения предприятий, то важное значение имеет построение верхних границ значений целевой функции задачи на допустимых кооперативных и допустимых некооперативных решениях. Такие границы необходимы для оценки точности получаемых приближенных решений. Кроме того, одновременно с вычислением верхней границы можно получить связанное с ней допустимое решение задачи. Это решение может оказаться хорошим начальным приближенным решением, улучшение которого позволит быстро получить допустимое решение, близкое к оптимальному.

Построим алгоритм вычисления верхней границы для значений целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на любом допустимом решении. В основе предлагаемого способа вычисления верхней границы лежит построение системы подмножеств $\{I_j\}$, $j \in J$, множества I.

Для всякого $j \in J$ определим множество I_j. Для этого при фиксированном $j_0 \in J$ сформулируем условия, позволяющие для всякого $i \in I$ выяснить, будет ли $i \in I_{j_0}$ или $i \notin I_{j_0}$.

Для $i \in I$ рассмотрим множества:

$$N(i) = \{k \in I \mid k \succ_{j_0} i\}, \quad J(i) = \{j \in J \mid i \succcurlyeq_j k \text{ для всякого } k \notin N(i)\}.$$

Заметим, что $J(i) \neq \emptyset$, поскольку $j_0 \in J(i)$.

Если $N(i) = \emptyset$, то считаем, что $i \in I_{j_0}$. Пусть $N(i) \neq \emptyset$, для всякого $k \in N(i)$ построим множество $J(k,i) = \{j \in J(i) \mid k \succ_j i\}$. Считаем, что $i \in I_{j_0}$, если для каждого $k \in N(i)$ выполняется неравенство

$$g_k \geqslant \sum_{j \in J(k,i)} p_{kj},$$

и $i \notin I_{j_0}$, если найдется $k \in N(i)$, для которого указанное неравенство нарушается.

Так определяемую систему подмножеств I_j, $j \in J$, будем называть *системой подмножеств, определенной нестрогими неравенствами.*

Содержательный смысл множества I_j поясняет следующая лемма, устанавливающая, что если Лидер планирует получить прибыль от потребителя $j \in J$ и при этом не открывает ни одного предприятия из множества I_j, то этот потребитель будет "захвачен" Последователем.

Рассмотрим ненулевой $(0,1)$-вектор $w = (w_i)$, $i \in I$, и обозначим через $I_0(w)$ множество $\{i \in I \mid w_i = 1\}$. Для всякого $j \in J$ обозначим через $i_j(w)$ элемент $i_0 \in I_0(w)$ такой, что $i_0 \succcurlyeq_j i$ для всякого $i \in I_0(w)$. Если $u = (u_i)$ и $v = (v_i)$ – два $(0,1)$-вектора, то через $u \cup v$ обозначим $(0,1)$-вектор $w = (w_i)$, где $w_i = \max\{u_i, v_i\}$, $i \in I$.

Л е м м а 1. *Пусть $\{I_j\}$, $j \in J$,– система подмножеств, определенная нестрогими неравенствами. При любом допустимом решении $(X, \widetilde{Z})$, $X = ((x_i),(x_{ij}))$, $\widetilde{Z} = ((\tilde{z}_i),(\tilde{z}_{ij}))$, задачи $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ для всякого $j_0 \in J$ такого, что $p_{i_0 j_0} x_{i_0 j_0} > 0$ для некоторого $i_0 \notin I_{j_0}$, выполняется равенство $\sum\limits_{i \in I} \tilde{z}_{i j_0} = 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для заданных $(0,1)$-векторов $x = (x_i)$ и $\tilde{z} = (\tilde{z}_i)$ рассмотрим элементы i_j, $j \in J$, где $i_j = i_j(x \cup \tilde{z})$. Предположим, что для некоторых $j_0 \in J$ и $i_0 \notin I_{j_0}$ имеем $p_{i_0 j_0} x_{i_0 j_0} > 0$, но требуемое равенство не выполняется. Рассмотрим множества $N(i_0)$ и $J(i_0)$ и заметим, что $\tilde{z}_i = 0$ для всякого $i \in N(i_0)$ и $i_0 = i_j$ для всякого $j \in J(i_0)$. Поскольку $i_0 \notin I_{j_0}$, то найдется $k \in N(i_0)$, для которого существует множество $J(k,i_0) \subset J(i_0)$ такое, что $g_k < \sum\limits_{j \in J(k,i_0)} p_{kj}$.

Для данного $k \in N(i_0)$ рассмотрим множество $S(k) = \{j \notin J(i_0) \mid k \succ_j i_j,\ x_{i_j} = 1\}$ и построим допустимое решение $Z' = ((z'_i),(z'_{ij}))$ задачи $\mathcal{F}$, которое отличается от оптимального решения $\widetilde{Z}$ тем, что $z'_k = 1$ и $z'_{kj} = 1$ для $j \in J(k,i_0) \cup S(k)$.

Для разности значений целевой функции задачи $\mathcal{F}$ на решениях $\widetilde{Z}$ и Z' справедливы соотношения

$$F(Z') - F(\widetilde{Z}) = -g_k + \sum_{j \in J(k,i_0)} p_{kj} + \sum_{j \in S(k)} p_{kj} > 0.$$

Это противоречит тому, что $\tilde{Z}$ – оптимальное решение задачи $\mathcal{F}$. Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. *Пусть $\{I_j\}$, $j \in J$,— система подмножеств, определенная нестрогими неравенствами. При любом допустимом решении $(X, \widetilde{Z})$, $X = ((x_i),(x_{ij}))$,*

$\widetilde{Z} = ((\tilde{z}_i), (\tilde{z}_{ij}))$, *задачи* $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ *для всякого* $j \in J$ *справедливо равенство*

$$\left(\sum_{i\in I} p_{ij}x_{ij}\right)\left(1 - \sum_{i\in I} \tilde{z}_{ij}\right) = \left(\sum_{i\in I_j} p_{ij}x_{ij}\right)\left(1 - \sum_{i\in I} \tilde{z}_{ij}\right).$$

Доказательство. Если $p_{ij}x_{ij} = 0$ для любого $i \in I$, то равенство выполняется. Пусть $p_{i_0 j}x_{i_0 j} > 0$ для некоторого $i_0 \in I$. Если $i_0 \in I_j$, то равенство также выполняется. Если же $i_0 \notin I_j$, то равенство справедливо, поскольку в силу леммы 1 имеем $\sum\limits_{i\in I} \tilde{z}_{ij} = 1$. Лемма 2 доказана.

Рассмотрим следующую задачу, которую будем называть *оценочной*:

$$\max_{(x_i),(x_{ij})} \left\{ -\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} p_{ij}x_{ij} \right\}; \tag{16}$$

$$x_i + \sum_{k: i \succ_j k} x_{kj} \leqslant 1, \quad i \in I,\ j \in J; \tag{17}$$

$$x_i \geqslant x_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J; \tag{18}$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I,\ j \in J. \tag{19}$$

Из леммы 2 следует, что если $(X, \widetilde{Z})$ – допустимое решение задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, то величина $L(X, \widetilde{Z})$ не превосходит значения целевой функции оценочной задачи на решении X. Поэтому оптимальное значение B_0 целевой функции оценочной задачи будет верхней границей для величины $L(X, \widetilde{Z})$ при любом допустимом решении $(X, \widetilde{Z})$ задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. Отсюда получаем следующее утверждение.

Теорема 1. Если I_j, $j \in J$,– система подмножеств, определенных нестрогими неравенствами, то для любого допустимого решения $(X, \widetilde{Z})$ задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ выполняется неравенство $L(X, \widetilde{Z}) \leqslant B_0$.

Поскольку оптимальное кооперативное и оптимальное некооперативное решения являются допустимыми решениями задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, то полученная величина B_0 является оценкой сверху для значений целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ как на оптимальном кооперативном, так и на оптимальном некооперативном решениях. Но на оптимальном некооперативном решении значение целевой функции может быть меньше, чем на оптимальном кооперативном решении. Поэтому можно попытаться уменьшить верхнюю оценку для значений целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на допустимых некооперативных решениях. Для вычисления такой верхней оценки построим систему подмножеств $\{I_j\}$, $j \in J$, используя при их определении строгие неравенства.

При фиксированном $j_0 \in J$ будем считать, что $i \in I_{j_0}$, если для каждого $k \in N(i)$ выполняется неравенство

$$g_k > \sum_{j\in J(k,i)} p_{kj},$$

и $i \notin I_{j_0}$, если найдется $k \in N(i)$, для которого указанное неравенство нарушается. Такую систему подмножеств $\{I_j\}$, $j \in J$, будем называть *системой подмножеств, определенной строгими неравенствами*. Для данной системы подмножеств справедливы утверждения, аналогичные леммам 1 и 2.

Лемма 3. Пусть $\{I_j\}$, $j \in J$,– система подмножеств, определенная строгими неравенствами. При любом допустимом некооперативном решении $(X, \widetilde{Z})$,

$X = ((x_i),(x_{ij}))$, $\widetilde{Z} = ((\tilde{z}_i),(\tilde{z}_{ij}))$, задачи $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ для всякого $j_0 \in J$ такого, что $p_{i_0 j_0} x_{i_0 j_0} > 0$ для некоторого $i_0 \notin I_{j_0}$, выполняется равенство $\sum\limits_{i\in I} \tilde{z}_{ij_0} = 1$.

Доказательство. Предположим, что для некоторых $j_0 \in J$ и $i_0 \notin I_{j_0}$ имеем $p_{i_0 j_0} x_{i_0 j_0} > 0$, а требуемое равенство не выполняется. Поскольку $i_0 \notin I_{j_0}$, то найдется $k \in N(i_0)$, для которого существует множество $J(k,i_0)$ такое, что

$$g_k \leqslant \sum_{j\in J(k,i_0)} p_{kj}.$$

Для данного $k \in N(i_0)$ рассмотрим множество $S(k) = \{j \notin J(i_0) \mid k \succ_j i_j,\ x_{i_j} = 1\}$ и построим допустимое решение $Z' = ((z'_i),(z'_{ij}))$ задачи $\mathcal{F}$, которое отличается от оптимального решения $\widetilde{Z}$ тем, что $z'_k = 1$, $z'_{kj} = 1$ для $j \in J(k,i_0) \cup S(k)$. Поскольку

$$F(Z') - F(\widetilde{Z}) \geqslant -g_k + \sum_{j\in J(k,i_0)} p_{kj} \geqslant 0,$$

то Z' – оптимальное решение задачи $\mathcal{F}$, а (X,Z') – допустимое решение задачи $(\mathcal{L},\mathcal{F})$. Для допустимых решений $(X,\widetilde{Z})$ и (X,Z') имеем:

$$L(X,\widetilde{Z}) - L(X,Z') \geqslant \sum_{j\in J(k,i_0)} p_{i_0 j} x_{i_0 j} \geqslant p_{i_0 j_0} > 0.$$

Это противоречит тому, что $(X,\widetilde{Z})$ – допустимое некооперативное решение. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть $\{I_j\}$, $j \in J$,– система подмножеств, определенная строгими неравенствами. При любом допустимом некооперативном решении $(X,\widetilde{Z})$, $X = ((x_i),(x_{ij}))$, $\widetilde{Z} = ((\tilde{z}_i),(\tilde{z}_{ij}))$, задачи $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ для всякого $j \in J$ справедливо равенство

$$\left(\sum_{i\in I} p_{ij}x_{ij}\right)\left(1 - \sum_{i\in I}\tilde{z}_{ij}\right) = \left(\sum_{i\in I_j} p_{ij}x_{ij}\right)\left(1 - \sum_{i\in I}\tilde{z}_{ij}\right).$$

Обозначим через B оптимальное значение целевой функции оценочной задачи (16)–(19), сформулированной с использованием системы подмножеств $\{I_j\}$, $j \in J$, определенной строгими неравенствами. Применяя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Если $\{I_j\}$, $j \in J$,– система подмножеств, определенная строгими неравенствами, то для любого допустимого некооперативного решения $(X,\widetilde{Z})$ задачи $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ выполняется неравенство $L(X,\widetilde{Z}) \leqslant B$.

Нетрудно заметить, что при любом $j \in J$ множество I_j, определенное строгими неравенствами, содержится в аналогичном множестве, но определенном нестрогими неравенствами. Это значит, что для построенных верхних границ B_0 и B справедливо неравенство $B \leqslant B_0$.

В заключение в качестве следствия из теорем 1 и 2 укажем на некоторые случаи, когда найденные верхние границы являются точными, а получаемое одновременно с вычислением верхней границы допустимое кооперативное (некооперативное) решение $(X^*,\bar{Z})$ является оптимальным кооперативным (некооперативным) решением.

Следствие 1. Пусть $(X^*, \bar{Z})$ есть допустимое кооперативное (некооперативное) решение задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, соответствующее оптимальному решению X^* оценочной задачи. Если для всякого $j \in J$ выполняется равенство

$$\left(\sum_{i \in I_j} p_{ij} x^*_{ij} \right) \left(\sum_{i \in I} \bar{z}_{ij} \right) = 0,$$

то $(X^*, \bar{Z})$ – оптимальное кооперативное (некооперативное) решение задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

Доказательство. В силу лемм 2 и 4 и заданного условия для всякого $j \in J$ выполняются равенства

$$\left(\sum_{i \in I} p_{ij} x^*_{ij} \right) \left(1 - \sum_{i \in I} \bar{z}_{ij} \right) = \left(\sum_{i \in I_j} p_{ij} x^*_{ij} \right) \left(1 - \sum_{i \in I} \bar{z}_{ij} \right) = \left(\sum_{i \in I_j} p_{ij} x^*_{ij} \right).$$

Отсюда получаем, что значение целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на допустимом кооперативном (некооперативном) решении $(X^*, \bar{Z})$ совпадает с величиной верхней границы и, следовательно, $(X^*, \bar{Z})$ – оптимальное кооперативное (некооперативное) решение задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

Из сказанного вытекает, в частности, что если X^* или $\bar{Z}$ являются нулевыми решениями, то $(X^*, \bar{Z})$ будет оптимальным кооперативным (некооперативным) решением задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

5. Стандартный алгоритм локального поиска

Выше отмечалось, что допустимое кооперативное (некооперативное) решение задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ может быть построено по допустимому решению X задачи $\mathcal{L}$, причем таких решений может быть построено несколько, но значения целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на всех этих решениях будут одинаковыми. Таким образом, допустимое решение X задачи $\mathcal{L}$ однозначно определяет значение $L(X, \bar{Z})$ целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на соответствующем допустимом кооперативном (некооперативном) решении $(X, \bar{Z})$.

Заметим также, что само допустимое решение $X = ((x_i), (x_{ij}))$ задачи $\mathcal{L}$ однозначно определяется $(0,1)$-вектором $x = (x_i)$. Поэтому любой $(0,1)$-вектор x однозначно определяет некоторое значение $L(X, \bar{Z})$ целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на соответствующем допустимом кооперативном (некооперативном) решении $(X, \bar{Z})$.

Таким образом, получаем, что задачу поиска оптимального кооперативного или некооперативного решения задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ можно представить как задачу максимизации некоторой псевдобулевой функции $f(x)$, $x \in B^m$. Эта функция задана неявным образом, и для вычисления ее значения необходимо найти оптимальное решение задачи $\mathcal{F}$ и затем оптимальное решение соответствующей вспомогательной задачи.

В силу сказанного далее при построении алгоритмов вычисления приближенных решений исследуемой задачи конкурентного размещения предприятий будем рассматривать задачу максимизации псевдобулевой функции $f(x)$, определенной на множестве $(0,1)$-векторов $x = (x_i)$, $i \in I$. Значение этой функции на произвольном $(0,1)$-векторе x равно значению $L(X, \bar{Z})$ целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на соответствующем допустимом кооперативном (некооперативном) решении $(X, \bar{Z})$. При этом считаем, что имеется некоторое начальное приближенное решение. Таким решением может быть $(0,1)$-вектор $x^* = (x^*_i)$, порождаемый оптимальным решением X^* оценочной задачи. Оптимальное значение B_0 или B целевой функции этой задачи дает оценку сверху для значений псевдобулевой функции $f(x)$.

С учетом неявного задания функции $f(x)$ для построения алгоритмов максимизации этой функции используем универсальный метод локального поиска [17] и, в частности, стандартную процедуру локального поиска.

Основным понятием метода локального поиска является понятие окрестности. Окрестностью решения x называется подмножество $N(x) \subset B^m$, заданное для всякого $x \in B^m$. Решение $x_0 \in B^m$, такое что $f(x_0) \geqslant f(x)$ для всякого $x \in N(x_0)$, называется локально-оптимальным. Результатом работы алгоритма локального поиска является локально-оптимальное решение.

В случае множества B^m в качестве окрестности $N(x)$ обычно используются следующие множества:

$$N_1(x) = \{y \in B^m \mid d(x,y) = 1\}, \tag{20}$$

$$N_2(x) = \{y \in B^m \mid d(x,y) = 2, d(0,x) = d(0,y)\}, \tag{21}$$

где $d(x,y)$ – расстояние Хэмминга, равное числу несовпадающих компонент $(0,1)$-векторов x и y.

Стандартный алгоритм локального поиска по заданной окрестности $N(x)$, $x \in B^m$, включает конечное число однотипных шагов, на каждом из которых рассматривается некоторое текущее решение x_0. На первом шаге в качестве x_0 может быть взят любой $(0,1)$-вектор. Шаг состоит в поиске элемента $x' \in N(x)$, улучшающего текущее решение x_0, т.е. такого элемента $x' \in N(x)$, что $f(x') > f(x_0)$. Если решение x' найти не удается, то алгоритм останавливается и текущее решение x_0 есть результат его работы. В противном случае текущее решение x_0 заменяется на решение x' и начинается следующий шаг.

Способ выбора решения x' в алгоритме локального поиска нуждается в уточнении. Если задан некоторый порядок просмотра элементов множества $N(x_0)$, то решение x' может быть выбрано в результате *частичного просмотра* окрестности $N(x_0)$. Таким решением будет первый в заданном порядке элемент $x \in N(x_0)$, для которого $f(x) > f(x_0)$. При *полном просмотре* окрестности $N(x_0)$ в качестве улучшающего решения выбирается такой элемент x', что $f(x') > f(x_0)$ и $f(x') \geqslant f(x)$ для каждого $x \in N(x_0)$.

В рассматриваемом случае локальный поиск по “широкой” окрестности, например окрестности $N(x) = N_1(x) \cup N_2(x)$, может оказаться достаточно трудоемкой процедурой хотя бы потому, что вычисление значения функции $f(x)$ требует решения двух задач целочисленного линейного программирования. Поэтому определим для $(0,1)$-вектора x окрестность $N_0(x) \subset N_1(x) \cup N_2(x)$, которая включает относительно небольшое число существенных вариантов изменения текущего решения x.

Для произвольного ненулевого $(0,1)$-вектора $w = (w_i)$, $i \in I$, рассмотрим множество $I_0(w) = \{i \in I \mid w_i = 1\}$ и для всякого $j \in J$ вычислим величины $i_j(w)$. Для всякого $k \in I_0(w)$ определим величину

$$\Delta_k(w) = -f_k + \sum_{j:k=i_j(w)} p_{kj},$$

которую назовем *прибыльностью* предприятия k относительно решения w.

Пусть задано решение $x = (x_i)$. Используя величину прибыльности, построим множество $N_0(x)$ существенных вариаций текущего решения x. Окрестность $N_0(x)$ считаем состоящей из $(0,1)$-векторов $x^k = (x_i^k)$, $k \in I$. При фиксированном $k \in I$ вектор x^k строится следующим образом.

Если $x_k = 1$, то полагается $x_i^k = x_i$ для $i \neq k$ и $x_k^k = 0$. После этого вектор x^k считается построенным.

Если $x_k = 0$, то полагается $x_i^k = x_i$ для $i \neq k$ и $x_k^k = 1$. Далее вычисляется величина $\Delta_k(x^k)$. Возможны два случая: $\Delta_k(x^k) \geqslant 0$ и $\Delta_k(x^k) < 0$. В первом случае, когда доходность предприятия k неотрицательная, для всякого $i \in I_0(x)$ вычисляется величина $\Delta_i(x^k)$. Если $\Delta_i(x^k) \geqslant 0$ для всякого $i \in I_0(x)$, т.е. открытие "нового" предприятия k не приводит к тому, что некоторые "старые" предприятия, открытые Лидером, становятся убыточными, то вектор x^k считается построенным. Если же $\Delta_i(x^k) < 0$ для некоторых $i \in I_0(x)$, то определяется элемент $i_0 \in I_0(x)$ такой, что $\Delta_{i_0}(x^k) \leqslant \Delta_i(x^k)$ для всякого $i \in I_0(x)$, полагается $x^k_{i_0} = 0$ и вектор x^k считается построенным.

Если $\Delta_k(x^k) < 0$, т.е. доходность нового предприятия отрицательная, то среди старых предприятий отыскивается такое, удаление которого максимально увеличивает доходность нового предприятия k. Для этого для всякого $l \in I_0(x)$ строится $(0,1)$-вектор $x^{kl} = (x^{kl}_i)$, где $x^{kl}_i = x^k_i$ при $i \neq l$ и $x^{kl}_l = 0$, и вычисляется величина $\Delta_k(x^{kl})$. Далее определяется номер $l_0 \in I_0(x)$ такой, что $\Delta_k(x^{kl_0}) \geqslant \Delta(x^{kl})$ для всякого $l \in I_0(x)$. Если $\Delta_k(x^{kl_0}) \geqslant 0$, то полагается $x^k_{l_0} = 0$. После этого вектор x^k считается построенным.

Предлагаемый *алгоритм построения приближенного решения* задачи максимизации рассматриваемой псевдобулевой функции $f(x)$ представляет собой стандартный алгоритм локального поиска по окрестности $N_0(x)$. Работа алгоритма начинается с решения x^*, полученного в результате вычисления верхней границы, и завершается построением локально-оптимального решения. Поэтому этот алгоритм будем называть также *алгоритмом улучшения начального приближенного решения*.

В данном алгоритме рассматриваются три способа выбора улучшающего элемента x' в окрестности $N_0(x) = \{x^k,\ k \in I\}$. При первом способе используется правило полного просмотра, а в двух других — частичного просмотра окрестности. При втором способе просмотр элементов множества $\{x^k, k \in I\}$ производится в порядке возрастания номера k, а при третьем – в порядке неубывания числа вхождений элемента $k \in I$ в множества I_j, $j \in J$, определенных при вычислении верхней границы.

Приведем результаты вычислительного эксперимента с предложенными алгоритмами построения локально-оптимального решения задачи максимизации псевдобулевой функции $f(x)$ в случае, когда ее значение определяется допустимым некооперативным решением задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. Алгоритмы отличаются способами выбора улучшающего элемента окрестности, и им присвоены номера 1, 2, 3 в соответствии с номерами используемых способов выбора улучшающего элемента.

Рассматривается класс задач конкурентного размещения предприятий A из [18]. Задачи этого класса являются задачами конкурентного размещения предприятий на сети [13]. В таких задачах, во-первых, множество возможных мест размещения предприятий I и множество потребителей J совпадают с множеством вершин некоторого графа и, во-вторых, отношение порядка для каждого потребителя определяется длинами кратчайших путей из соответствующей вершины во все другие вершины графа.

Вычисления проводились для четырех подклассов $A20$, $A30$, $A40$, $A50$ задач данного класса, отличающихся числом узлов сети, равным соответственно 20, 30, 40 и 50. В таблице для серий из 20 задач каждого подкласса приводятся средние значения следующих показателей, полученных в результате работы трех рассмотренных алгоритмов:

B – величина верхней границы;

L – значение целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на найденном допустимом кооперативном решении;

$|x|$ – число открываемых Лидером предприятий, определяемое найденным решением;

$|z|$ – число открываемых Последователем предприятий, определяемое найденным решением;

Таблица

Задачи	Алгоритм	B	L	$\lvert x\rvert$	$\lvert z\rvert$	S	L/B	L^*	B/L^*	L/L^*
$A20$	1	84,73	37,50	3,18	1,85	2,80	0,44	42,55	1,99	0,88
	2	84,73	36,20	3,03	1,78	3,80	0,43	42,55	1,99	0,85
	3	84,73	37,25	3,13	1,85	3,40	0,44	42,55	1,99	0,88
$A30$	1	132,45	58,68	4,80	2,60	3,57	0,44	67,90	1,95	0,86
	2	132,45	54,32	4,75	2,68	4,35	0,41	67,90	1,95	0,80
	3	132,45	55,87	4,75	2,60	4,35	0,42	67,90	1,95	0,82
$A40$	1	198,05	87,88	7,05	3,40	4,70	0,44			
	2	198,05	84,40	6,80	3,40	6,15	0,43			
	3	198,05	85,70	6,65	3,58	6,10	0,43			
$A50$	1	240,20	104,13	7,90	4,08	4,82	0,43			
	2	240,20	101,53	7,80	3,98	7,15	0,42			
	3	240,20	101,03	7,43	4,04	7,05	0,42			

S – число шагов алгоритма;

L/B – оценка относительной точности найденного допустимого некооперативного решения, равная отношению величин L и B.

Кроме того, в таблице для задач из подклассов $A20$ и $A30$ приводятся средние значения следующих величин:

L^* – значение целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на оптимальном некооперативном решении;

B/L^* – относительная точность вычисленной верхней границы, равная отношению величин B и L^*;

L/L^* – относительная точность найденного допустимого некооперативного решения, равная отношению величин L и L^*.

Из таблицы видно, что средняя точность приближенных решений, полученных рассматриваемыми алгоритмами, примерно одинаковая. Среднее значение верхней границы почти в два раза превосходит оптимальное значение целевой функции. Такая точность не является удовлетворительной для получения оценок точности вычисляемых приближенных решений. Однако начальное приближенное решение, получаемое одновременно с вычислением верхней границы, является хорошей основой для построения локального максимума целевой функции. Для этого, как следует из таблицы, достаточно в среднем 3–7 шагов. Получаемое локально-оптимальное решение для некоторых примеров является оптимальным. Вместе с тем из результатов вычислений ясно, что алгоритм поиска "хорошего" приближенного решения не должен завершаться построением первого локально-оптимального решения. Ниже предлагается алгоритм локального поиска с так называемой обобщенной окрестностью [15]. Использование обобщенной окрестности позволяет усилить требования к получаемому в результате работы алгоритма решению. Оно должно быть не только локально-оптимальным, но еще и наилучшим в сравнении с другими локально-оптимальными решениями, "окружающими" данное решение.

6. Алгоритм локального поиска по обобщенной окрестности

Пусть для всякого $x \in B^m$ задана окрестность $N(x) \in B^m$, которую будем называть *базовой*, и пусть x_0 – локально-оптимальное решение относительно этой окрестности. Определим обобщенную окрестность $\widetilde{N}(x_0)$ локально-оптимального решения x_0. Она содержит все попарно различные локально-оптимальные решения из множества $\{\tilde{x}_0^k,\ k \in I\}$. Для всякого $k \in I$ локально-оптимальное решение $\tilde{x}_0^k$ определяется следующим образом.

При фиксированном $k \in I$ рассмотрим наряду с базовой окрестностью $N(x)$ окрестность $N^k(x) = \{y \in N(x) \mid y_k = x_k\}$ и $(0,1)$-вектор $y^k = (y_i^k)$, $i \in I$, отличающийся от решения $x_0 = (x_{0i})$, $i \in I$, только тем, что $y_k = 1 - x_{0k}$. Локально-оптимальное решение $\tilde{x}_0^k$ строится в два этапа. Сначала, используя стандартную процедуру локального поиска с окрестностью $N^k(x)$ и вектором y^k в качестве начальной точки, определяется решение y_0^k. Это решение является локально-оптимальным относительно вспомогательной окрестности $N^k(x)$. Затем по решению y_0^k с помощью стандартной процедуры локального поиска с окрестностью $N(x)$ строится локально-оптимальное решение $\tilde{x}_0^k$.

Обобщенной окрестностью локально-оптимального решения x_0 назовем множество

$$\widetilde{N}(x_0) = \{x \in B^m \mid x = \tilde{x}_0^k \text{ для некоторого } k \in I\}.$$

Вектор x_0 будем называть *центром* обобщенной окрестности $\widetilde{N}(x_0)$.

Отметим, что для различных $k \in I$ построенные локально-оптимальные решения $\tilde{x}_0^k$ могут совпадать между собой и с центром окрестности x_0. Поэтому число элементов в окрестности $\widetilde{N}(x_0)$ может быть меньше, чем m. В связи с этим возникает вопрос о строении множества $\widetilde{N}(x_0)$, которое можно охарактеризовать числом элементов в множестве и расстояниями от этих элементов до центра окрестности.

Алгоритм поиска с обобщенной окрестностью так же, как и стандартный алгоритм локального поиска, представляет собой процедуру последовательного улучшения текущего решения, но в случае обобщенной окрестности текущим решением является локально-оптимальное решение, для улучшения которого используется также локально-оптимальное решение.

Пусть для всякого $x \in B^m$ задана базовая окрестность $N(x)$. *Алгоритм локального поиска с обобщенной окрестностью* при заданной базовой окрестности $N(x)$, $x \in B^m$, состоит из предварительного шага и конечного числа однотипных основных шагов, на каждом из которых рассматривается некоторое текущее локально-оптимальное решение x_0.

На предварительном шаге по заданному $(0,1)$-вектору с использованием стандартной процедуры локального поиска строится начальное локально-оптимальное решение x_0. После этого начинается основной шаг. На основном шаге имеется текущее локально-оптимальное решение x_0. Шаг состоит в построении обобщенной окрестности $\widetilde{N}(x_0)$ и поиске элемента $x' \in \widetilde{N}(x_0)$ такого, что $f(x') > f(x_0)$. Если решение x' найти не удается, то алгоритм заканчивает работу, результатом которой является текущее локально-оптимальное решение x_0. В противном случае текущее локально-оптимальное решение x_0 заменяется на локально-оптимальное решение x' и начинается следующий шаг.

Так же, как и в случае стандартного алгоритма локального поиска, будем использовать два способа выбора решения x' из окрестности $\widetilde{N}(x_0)$, улучшающего текущее решение x_0. При полном просмотре окрестности $\widetilde{N}(x_0)$ решение x' должно удовлетворять условиям $f(x') > f(x_0)$ и $f(x') \geqslant f(x)$ для каждого $x \in \widetilde{N}(x_0)$, а при частичном просмотре элементы окрестности $\widetilde{N}(x_0)$ исследуются в некотором заданном порядке и в качестве решения x' выбирается первый элемент $x \in \widetilde{N}(x_0)$, для которого $f(x') > f(x_0)$.

В [15] приводятся результаты вычислительного эксперимента с алгоритмом локального поиска по обобщенной окрестности для задачи максимизации псевдобулевой функции $f(x)$, значения которой определяются допустимыми некооперативными решениями задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. В этом алгоритме в качестве базовой используется окрестность $N_0(x)$, а выбор улучшающего элемента при построении локально-оптимальных решений производится по правилу неполного просмотра окрестностей. Выбор улучшающего элемента в обобщенной окрестности $\widetilde{N}_0(x_0)$ также производится по правилу неполного ее просмотра за исключением первого шага алгоритма, где улучшающий элемент определяется в результате полного просмотра окрестности. Кроме того, на предварительном шаге алгоритма в качестве начальной точки используется $(0, 1)$-вектор, получаемый одновременно с вычислением верхней границы для значений функции $f(x)$.

Цель данного вычислительного эксперимента состояла в том, чтобы выяснить строение обобщенной окрестности $\widetilde{N}_0(x_0)$ и оценить, насколько локально-оптимальное решение, найденное на предварительном шаге алгоритма, отличается от локально-оптимального, полученного в результате поиска по обобщенной окрестности. Решались те же примеры из подклассов $A20$, $A30$, $A40$ и $A50$ класса A из [18], что и рассмотренные выше. Вычисления проводились на PC AMD Turion 64 X2 TL-60, 2 GHz, RAM 2GB. Для решения возникающих задач целочисленного линейного программирования применялся Gurobi parallel MIP solver, включенный в пакет Microsoft Solver Foundation.

Полученные результаты показывают, что обобщенная окрестность в случае рассматриваемой псевдобулевой функции не является вырожденной. Элементы обобщенной окрестности для большинства примеров в среднем отличаются от ее центра двумя или тремя компонентами. Из представленных в [15] таблиц следует также, что для некоторых примеров локально-оптимальное решение $\tilde{x}_0$ существенно лучше, чем локально-оптимальное решение x_0. Более того, использование обобщенной окрестности для подавляющего большинства примеров позволяет получить оптимальное решение. Это свидетельствует о хороших вычислительных возможностях предложенных алгоритмов, позволяющих получать удовлетворительные приближенные решения задачи конкурентного размещения предприятий средней размерности (20–50 предприятий) за время в пределах нескольких минут.

7. Заключение

В работе рассмотрены две постановки задачи конкурентного размещения предприятий, различающиеся видом целевой функции Последователя, и введены понятия оптимального кооперативного и некооперативного решений. Предложен оригинальный метод построения верхних границ значений целевых функций исследуемых задач на оптимальных коопертивных и некооперативных решениях. Разработан универсальный метод для построения приближённых решений рассматриваемых вариантов задачи конкурентного размещения предприятий. В основе метода – представление исследуемых задач в виде задачи максимизации псевдобулевых функций, заданных неявным образом. Для отыскания решений такой задачи используется процедура локального поиска с окрестностью специального вида, названной обобщённой. Использование такой окрестности позволяет построить локально-оптимальное решение, являющееся наилучшим по сравнению с другими локально-оптимальными решениями, “окружающими” найденное. Проведённые вычислительные эксперименты указывают на хорошие вычислительные возможности предложенных алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Береснев В.Л.* Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005.
2. Discrete Location Theory / Eds. Mirchandani P.B., Francis R.L. N. Y.: John Wiley and Sons, 1990.
3. *Stackelberg H.* The Theory of the Market Economy. Oxford: Oxford Univ. Press, 1952.

4. *Dempe S.* Foundations of Bilevel Programming. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.
5. *Campos C., Moreno J.A.* Multiple voting location problems // Eur. J. Oper. Res. 2008. V. 191. No. 2. P. 436–452.
6. *Dobson G., Karmarkar U.* Competitive location on network // Oper. Res. 1987. V. 35. P. 565–574.
7. Facility Location: Applications and Theory / Ed. Drezner Z., Hamacher H.W. Berlin: Springer-Verl., 2002.
8. *Plastria F.* Static competitive facility location: An overview of optimization approaches // Eur. J. Oper. Res. 2001. V. 129. P. 461–470.
9. *Plastria F., Vanhaverbeke L.* Discrete model for competitive location with foresight // Comput. Oper. Res. 2008. V. 35. P. 683–700.
10. *Santos-Penãte D.R., Suárez-Vega R., Dorta-Gonzáles P.* The Leader-Follower location model // Networks Spat. Econom. 2007. V. 7. P. 45–61.
11. *Hakimi S.L.* Locations with spatial interactions: competitive locations and games / Discrete Location Theory. Eds. Mirchandani P.B., Francis R.L. N. Y.: John Wiley and Sons, 1990. P. 439–478.
12. *Alekseeva E., Kochetova N., Kochetov Y., Plyasunov A.* Heuristic and Exact Methods for the Discrete (r/p)-Centroid Problem // EvoCOP 2010, LNCS 6022. Heidelberg: Springer-Verl., 2010. P. 11–22.
13. *Береснев В.Л.* Верхние оценки для целевых функций дискретных задач конкуретного размещения предприятий // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т. 15. № 4. С. 3–24.
14. *Береснев В.Л., Мельников А.А.* Приближенные алгоритмы для задачи конкурентного размещения предприятий // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т. 17. № 6. С. 3–19.
15. *Береснев В.Л., Гончаров Е.Н., Мельников А.А.* Локальный поиск по обобщенной окрестности // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18. № 4. С. 3–16.
16. *Hammer P.L., Rudeanu S.* Boolean method in operations research and related areas. Berlin: Springer-Verl., 1968.
17. Local search in Combinotorial Optimization / Eds. Aarts E.H.L., Lenstra J.K. Chichester: John Wiley and Sons, 1997.
18. http://www.math.nsc.ru/AP/benchmarks/

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 06.06.2011