Local search algorithm for the competitive facility location problem*

Beresnev V. L.
Sobolev Insitute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

We consider the competitive facility location problem that is bilevel integer programming problem. The way of constraction a lower and an upper bounds for the optimal value of the objective function and local search algorithm for finding an approximate solution are proposed.

Алгоритм локального поиска для задачи конкурентного размещения предприятий*

Береснев В. Л.
beresnev@math.msc.ru
Новосибирск, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Для задачи конкурентного размещения предприятий, являющейся задачей двухуровневого целочисленного программирования предлагается способ вычисления нижней и верхней границ значений целевой функции и алгоритм вычисления приближенного решения, представляющий собой процедуру локального поиска по обобщенной окрестности.

Рассматривается задача, являющаяся обобщением хорошо известной задачи размещения предприятий (средств обслуживания) на максимум [1]. В этой модели, в отличие от классической задачи размещения предприятии, имеется две соперничающие стороны (Лидер и Последователь), которые открывают свои предприятия, преследуя цель максимизации своей прибыли. При этом каждый потребитель, исходя из собственных предпочтений, среди открытых предприятий выбирает наилучшее и приносит тем самым доход одной из сторон. По аналогии с игрой Штакельберга [8] процесс принятия решений в данной модели представляется состоящим из трех этапов. На первом этапе Лидер открывает свои предприятия. На втором этапе Последователь, зная размещения предприятий Лидера, открывает свои предприятия. Наконец, на третьем этапе каждый потребитель, имея информацию обо всех открытых предприятиях, выбирает наилучшее.

Литературу, в которой обсуждаются различные математические постановки, формализующие указанный трехэтапный процесс, и различные концепции оптимальности в настоящее время можно считать обширной [3, 5-7]. В тоже время предложения по построению работоспособных алгоритмов решения задач конкурентного размещения практически отсутствуют. В [2] дана формулировка задачи конкурентного размещения предприятий в виде задачи двухуровневого целочисленного программирования [4] и предложен метод построения верхней оценки целевой функции для "линейного" случая задачи. В настоящей работе метод построения верхней оценки распространяется на более общий случай и предлагается алгоритм улучшения приближенного решения, получаемого одновременно с вычислением верхней границы.

Формулировка задачи

Обозначим через $I = \{1, \ldots, m\}$ множество предприятий (возможных мест размещения предприятий), а через $J = \{1, \ldots, n\}$ — множество потребителей. Считаем, что для всякого $i \in I$ заданы величины f_i и g_i равные фиксированным затратам на открытие предприятия i соответственно Лидером и Последователем. Для $i \in I$ и $j \in J$ через p_{ij} обозначим величину дохода, получаемого предприятием i при обслуживании потребителя j. Считаем, что для всякого $j \in J$ на множестве I задано отношение порядка $\succ_j$, показывающее предпочтения потребителя j при выборе им предприятия. Отношение $i \succ_j k$ для $i, k \in I$ означает, что из двух открытых предприятий i и k потребитель j выберет предприятие i. Считаем также, что отношение $i \succcurlyeq_j k$ для $i, k \in I$ означает, что либо $i \succ_j k$, либо $i = k$.

Для формальной записи задачи используем следующие переменные:

x_i — переменная, показывающая открывает или нет Лидер предприятие $i \in I; x_i = 1$, если открывает и $x_i = 0$, если нет;

x_{ij} — переменная, показывающая является ли предприятие $i \in I$ наилучшим для потребителя $j \in J$ среди всех предприятий, открытых Лидером.

z_i — переменная, показывающая открывает или нет Последователь предприятие $i \in I; z_i = 1$, если открывает и $z_i = 0$, если нет;

z_{ij} — переменная, показывающая является ли предприятие $i \in I$, открытое Последователем, наилучшим для потребителя $j \in J$ среди всех предприятий, открытых Лидером и Последователем.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №09-01-00059 и АВЦП Рособразования (проект 2.1.1/3235).

С использованием указанных переменных и введенных обозначений задача конкурентного размещения предприятий записывается как следующая задача двухуровневого целочисленного программирования:

$$\max_{(x_i),(x_{ij})}\{-\sum_{i\in I} f_i x_i+\sum_{j\in J}(\sum_{i\in I} p_{ij}x_{ij})(1-\sum_{i\in I}\widetilde{z}_{ij})\}; \quad (1)$$

$$x_i+\sum_{k|i\succ_j k} x_{kj}\leqslant 1,\ i\in I,\ j\in J; \quad (2)$$

$$x_i\geqslant x_{ij},\ i\in I, j\in J; \quad (3)$$

$$x_i, x_{ij}\in\{0,1\},\ i\in I, j\in J; \quad (4)$$

$$((\widetilde{z}_i),(\widetilde{z}_{ij})) — \text{оптимальное решение задачи:} \quad (5)$$

$$\max_{(z_i),(z_{ij})}\{-\sum_{i\in I} g_i z_i+\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{ij}z_{ij}\}; \quad (6)$$

$$x_i+z_i+\sum_{k|i\succ_j k} z_{kj}\leqslant 1,\ i\in I,\ j\in J; \quad (7)$$

$$z_i\geqslant z_{ij},\ i\in I, j\in J; \quad (8)$$

$$z_i, z_{ij}\in\{0,1\},\ i\in I, j\in J; \quad (9)$$

Эта задача, как и всякая задача двухуровневого программирования, включает задачу первого уровня (1)–(4), которую будем обозначать через L, и задачу второго уровня (6)–(9), которую будем обозначать через F. Для задачи (1)–(9) будем использовать обозначение (L,F).

Обозначим через $X=((x_i),(x_{ij}))$ допустимое решение задачи L, а через $\widetilde{Z}=((\widetilde{z}_i),(\widetilde{z}_{ij}))$ оптимальное решение задачи F при фиксированном допустимом решении X. Пару $(X,\widetilde{Z})$ будем называть *допустимым решением задачи* (L,F). Обозначим через $L(X,\widetilde{Z})$ значение целевой функции (1) на допустимом решении $(X,\widetilde{Z})$.

Далее будем считать, что Последователь при выборе своего наилучшего решения руководствуется правилом так называемого *некооперативного поведения*, когда из всех оптимальных решений задачи F выбирается такое, при котором значение целевой функции задачи (L,F) наименьшее.

При фиксированном допустимом решении X задачи L оптимальное решение $\overline{Z}$ задачи F будем называть *оптимальным некооперативным решением*, если для всякого оптимального решения $\widetilde{Z}$ задачи F выполняется неравенство $L(X,\overline{Z})\leqslant L(X,\widetilde{Z})$. Допустимое решение $(X,\overline{Z})$ задачи (L,F) назовем *допустимым некооперативным решением*, если $\overline{Z}$ — оптимальное некооперативное решение задачи F. Допустимое некооперативное решение $(X^*,\overline{Z}^*)$ задачи (L,F) назовем *оптимальным некооперативным решением*, если для любого допустимого некооперативного решения $(X,\overline{Z})$ задачи (L,F) выполняется неравенство $L(X^*,\overline{Z}^*)\geqslant L(X,\overline{Z})$. При этом величину $L(X^*,\overline{Z}^*)$ будем называть *оптимальным* значением целевой функции задачи (L,F).

Допустимое некооперативное решение $(X,\overline{Z})$ задачи (F,L) будем называть также *приближенным* решением задачи (L,F). Понятно, что приближенное решение $(X,\overline{Z})$ задачи (L,F) можно построить по допустимому решению X задачи L. Соответствующее оптимальное некооперативное решение $\overline{Z}$ задачи F определяется с помощью алгоритма, состоящего из двух этапов. На этапе 1 при фиксированном решении X решается задача F и вычисляется оптимальное значение ее целевой функции, а на этапе 2 с использованием этой величины определяется оптимальное некооперативное решение задачи F.

Верхняя граница для оптимального значения целевой функции задачи (L,F)

При построении верхней границы будем дополнительно предполагать, что для всякого $j\in J$ величины $p_{ij}, i\in I$, обладают *свойством невозрастания* относительно порядка $\succ_j$, т.е. для любых $i,k\in I$ таких, что $i\succ_j k$ выполняется неравенство $p_{ij}\geqslant p_{kj}$.

Для всякого $j\in J$ определим множества $I_j\subset I$, с использованием которых будет построена искомая верхняя граница. Для этого при фиксированном $j_0\in J$ сформулируем условия, позволяющие для всякого $i\in I$ выяснить $i\in I_{j_0}$ или $i\notin I_{j_0}$. Для $i\in I$ рассмотрим множества

$$N(i)=\{k\in I\mid k\succ_{j_0} i\},$$

$$J(i)=\{j\in J\mid i\not\succ_j k \text{ для всякого } k\notin N(i)\}.$$

Заметим, что $J(i)\neq\emptyset$ поскольку $j_0\in J(i)$.

Если $N(i)=\emptyset$, то считаем по определению, что $i\in I_{j_0}$. Пусть $N(i)\neq\emptyset$. Для всякого $k\in N(i)$ построим множество

$$J(k,i)=\{j\in J\mid k\succ_j i\}.$$

Считаем, что $i\in I_{j_0}$, если для каждого $k\in N(i)$ выполняется неравенство

$$g_k>\sum_{j\in J(k,i)} p_{kj},$$

и $i\notin I_{j_0}$, если найдется $k\in N(i)$, для которого указанное неравенство нарушается.

Содержательный смысл множества I_j поясняет следующая лемма, устанавливающая, что если Лидер планирует получить доход от потребителя $j \in J$ и при этом не открывает ни одного предприятия из множества I_j, то потребитель j будет "захвачен" Последователем.

Лемма 1. При любом допустимом некооперативном решении $(X, \overline{Z})$, $X = ((x_i),(x_{ij}))$, $\overline{Z} = ((\overline{z}_i),(\overline{z}_{ij}))$, для всякого $j_0 \in J$, такого что $p_{i_0 j_0} x_{i_0 j_0} > 0$ для некоторого $i_0 \notin I_{j_0}$, выполняется неравенство $\sum\limits_{i \in I} \overline{z}_{i j_0} = 1$.

Отсюда получаем

Лемма 2. При любом допустимом некооперативном решении $(X, \overline{Z})$, $X = ((x_i),(x_{ij}))$, $\overline{Z} = ((\overline{z}_i),(\overline{z}_{ij}))$, для всякого $j \in J$ выполняется неравенство

$$(\sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij})(1 - \sum_{i \in I} \overline{z}_{ij}) \leqslant \max_{i \in I_j} p_{ij} x_i.$$

Определим матрицу $(h_{ij}), i \in I, j \in J$, положив

$$h_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in I_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 1. *Величина*

$$\max_{(x_i)} \{- \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} \max_{i | x_i = 1} p_{ij} h_{ij}\}$$

является верхней границей для оптимального значения целевой функции задачи (L, F).

Из сказанного следует, что вычисление верхней границы сводится к решению классической задачи размещения предприятий на максимум вида

$$\max_{(x_i),(x_{ij})} \{- \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} p_{ij} h_{ij} x_{ij}\};$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \leqslant 1, \; j \in J;$$

$$x_i \geqslant x_{ij}, \; i \in I, j \in J;$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0,1\}, \; i \in I, j \in J.$$

Если $X^* = ((x_i^*),(x_{ij}^*))$ — оптимальное решение этой задачи, то в силу свойства невозрастания величин $p_{ij}, i \in I$, при фиксированном $j \in J$ это решение можно считать допустимым решением задачи L, которое порождает допустимое некооперативное решение задачи (L, F), определяющее нижнюю границу для оптимального значения целевой функции задачи (L, F).

Алгоритм построения приближенного решения задачи (L, F)

Выше отмечено, что в качестве приближенного решения задачи (L, F) можно рассматривать любое допустимое решение X задачи L. Значение целевой функции задачи (L, F) на соответствующем допустимом некооперативном решении $(X, \overline{Z})$ определяется по решению X однозначно. Кроме того, само допустимое решение $X = ((x_i),(x_{ij}))$ задачи L полностью определяется (0,1)-вектором $x = (x_i)$. В силу этого задачу (L, F) можно рассматривать как задачу максимизации псевдобулевой функции $f(x), x \in B^m$, значение которой на (0,1)-векторе x есть значение целевой функции задачи (L, F) на соответствующем допустимом некооперативном решении.

Общепринятым подходом к отысканию приближенного решения задачи максимизации псевдобулевой функции $f(x)$ является использование процедуры локального поиска [1] по некоторой заданной окрестности $N(x) \subset B^m$. Результатом работы этой процедуры является локально-оптимальное решение x_0, т.е. такое решение, что $f(x_0) \geqslant f(x)$ для всякого $x \in N(x_0)$. При этом в качестве окрестности $N(x)$ используются следующие множества:

$$N_1(x) = \{y \in B^m \mid d(x,y) = 1\},$$

$$N_2(x) = \{y \in B^m \mid d(x,y) = 2, d(0,x) = d(0,y)\},$$

$$N_3(x) = N_1(x) \cup N_2(x),$$

где $d(x,y)$ — расстояние Хэмминга.

В нашем случае локальный поиск по "широкой" окрестности, например окрестности $N_3(x)$ может оказаться трудоемким, поскольку вычисление значения функции $f(x)$ является трудоемкой процедурой. Поэтому для построения локально-оптимального решения используется окрестность $N_0(x) \subset N_3(x)$ специального вида, включающая в себя m "перспективных" вариантов изменения текущего решения x.

Таким образом, для построения приближенного решения может быть использована стандартная процедура локального поиска по окрестности $N_0(x)$ с начальным решением x^*, получаемым одновременно с вычислением верхней границы. Однако такое приближенное решение x_0 является наилучшим в сравнении только с относительно небольшим числом решений — элементами множества $N_0(x)$.

В предлагаемой модификации стандартной процедуры локального поиска используется обобщенная окрестность $\widetilde{N}_0(x_0)$, определяемая для локально-оптимальных решений x_0 и включающая локально-оптимальные решения "окружающие" решение x_0.

Пусть задана окрестность $N_0(x)$ и пусть x_0 — локально-оптимальное решение относительно окрестности $N_0(x)$. Обобщенная окрестность $\widetilde{N}_0(x)$ содержит не более m элементов и включает в себя локально-оптимальные решения $\widetilde{x}_0^k, k \in I$, которые определяются по решению x_0 следующим образом. При фиксированном $k \in I$ рассмотрим наряду с окрестностью $N_0(x)$ окрестность $N_0^k(x) = \{y \in N_0(x) \mid y_k = x_k\}$ и (0,1)-вектор $y^k = (y_1^k, \ldots, y_m^k)$, отличающийся от решения $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0m})$ только тем, что $y_k^k = 1 - x_{0k}$. Используя вектор y^k в качестве начальной точки, посредством процедуры локального поиска по окрестности $N_0^k(x)$ определяется решение y_0^k. Далее по этому решению посредством процедуры локального поиска по окрестности $N_0(x)$ строится локально-оптимальное решение $\widetilde{x}_0^k$. В целом получаем

$$\widetilde{N}_0(x_0) = \{y \in B^m \mid y = \widetilde{x}_0^k, \text{ для некоторого } k \in I\}.$$

Отметим, что для различных $k \in I$ получаемые локально-оптимальные решения $\widetilde{x}_0^k$ могут совпадать друг с другом и с исходным локально-оптимальным решением x_0. Поэтому число элементов в множестве $\widetilde{N}_0(x_0)$ может быть меньше чем m.

Алгоритм локального поиска по обобщенной окрестности $\widetilde{N}_0(x_0)$ состоит из предварительного шага и некоторого числа однотипных основных шагов.

На предварительном шаге посредством стандартной процедуры локального поиска по окрестности $N_0(x)$, начиная с решения x^*, определяется локально-оптимальное решение x_0.

На каждом основном шаге имеется текущее локально-оптимальное решение x_0. Шаг состоит в последовательном построении для всякого $k \in I$ локально-оптимального относительно окрестности $N_0(x)$ решения $\widetilde{x}_0^k$ и отыскании среди элементов множества $\widetilde{N}_0(x_0)$ локально-оптимального решения лучше чем x_0. Если найти такое решение не удается, то алгоритм заканчивает работу. В противном случае начинается следующий основной шаг.

Проведенные вычислительные эксперименты на некоторых классах задач конкурентного размещения предприятий размерности $m = 20 \div 40, n = 20 \div 40$ со случайным образом сформированными исходными данными показали, что локально-оптимальное относительно окрестности $N_0(x)$ решение x_0 существенно улучшает начальное приближенное решение x^*, получаемое в результате вычисления верхней границы, а использование обобщенной окрестности $\widetilde{N}_0(x_0)$ в подавляющем большинстве примеров позволяет получить оптимальное решение.

Выводы

Построены алгоритмы, позволяющие за приемлемое время получать верхнюю оценку значения целевой функции задачи конкурентного размещения предприятий и "хорошее" приближенное решение задачи. Предложенный способ вычисления верхней границы может быть модифицирован на случай, когда значения части переменных решения $(x_i), i \in I$, фиксированы. Это дает возможность использовать данный подход для построения алгоритмов неявного перебора для нахождения оптимального решения задачи.

Литература

[1] *Береснев В. Л.* Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. — Новосибирск: Изд-во Института математики, 2005. — 408 с.

[2] *Береснев В. Л.* Верхние оценки для целевых функций дискретных задач конкурентного размещения предприятий // Дискретный анализ и исследование операций. — 2008. — Т. 15, № 4. — С. 3–24.

[3] *Campos C., Moreno J.A.* Multiple voting location problems // European J. Oper. Res. — 2008. — V. 191, N 2. — P. 436–452.

[4] *Dempe S.* Foundations of bilevel programming. — Dordrecht: Kluwer Ac. Pub., 2002. — 332 p.

[5] *Plastria F.* Static competitive facility location: An overview of optimization approaches // Eur. J. Oper. Res. — 2001. — V. 129. — P. 461–470.

[6] *Plastria F., Vanhaverbeke L.* Discrete models for competitive location with foresight // Comput. Oper. Res. — 2008. — V. 35. — P. 683–700.

[7] *Santos-Penãte D.R., Suárez-Vega R., Dorta-Gonzáles P.* The Leader-Follower location model // Networks and Spatial Economics. — 2007. — V. 7. — P. 45–61.

[8] *Stackelberg H.von.* The theory of the market Economy. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1952 — 289 p.