ЛЕКЦИЯ № 7

Лектор: Плясунов Александр Владимирович
http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/mo.html

Линейное программирование (ЛП)

1. Базисные допустимые решения

2. Симплекс-таблица

3. Симплекс-метод

Линейное программирование (ЛП)

Задача линейного программирования (ЛП) в канонической форме:

$$w(x) = (c, x) \longrightarrow \min \tag{1}$$

$$Ax = b, \tag{2}$$

$$x \geq 0, \tag{3}$$

где $c = (c_j), x = (x_j) \in R^n$, $A = (a_{ij}) - (m \times n)$ матрица, $b = (b_i) \in R^m$, $m \leq n$, $rang(A) = m$.

$$Ax = b \equiv (a_i, x) = b_i, i = \overline{1, m},$$

$$Ax = b \equiv \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = b$$

ЛП: понятие базисного допустимого решения (б.д.р.).

Определение 1. Базис — любой набор $A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}$ из m линейно независимых столбцов матрицы системы ограничений A.

Матрица $B = [A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}]$ называется базисной.

Обозначения:

$$S = \{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\}, S' = \{1, \dots, n\} \setminus S, A = [B, N],$$

где $N = [A_j]_{j \in S'}$, $x = (x_B, x_N)$, $x_B = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})$ — базисные, а $x_N = (x_j)_{j \in S'}$ — небазисные переменные.

$$E\, x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \qquad (2')$$

Определение 2. Решение $(x_B, x_N) = (B^{-1}b, 0)$ системы уравнений (2) назовем базисным (соответствующим базису B).

ЛП: понятие б.д.р.

Лемма 1. **Вектор $\boldsymbol{x}$ — базисное решение системы (2) тогда и только тогда, когда множество столбцов с индексами из множества $\boldsymbol{S(x) = \{j | x_j \neq 0\}}$ — линейно независимо.**

Определение 3. **Базисным допустимым решением (б.д.р.)** называется любой элемент множества $\boldsymbol{Q}$, являющийся базисным решением системы уравнений $\mathbf{(2)}$.

Замечание 1. Решение соответствующее базису $\boldsymbol{B}$ — б.д.р. $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{B^{-1}b \geq 0}$.

Определение грани

Пусть $S' \cup S = \{1, \ldots, n\}$. Множество решений системы уравнений

$$Ax = b, x_j = 0, j \in S', x_j \geq 0, j \in S,$$

называется гранью множества допустимых решений (1)-(3).

Размерность

Величина $\boldsymbol{n-m-|S'|}$ — размерность данной грани (здесь $\boldsymbol{m+|S'|}$ – ранг системы уравнений).

Так как $\boldsymbol{\overline{x}}$ – б.д.р., то $\boldsymbol{|S'| = n-m}$, следовательн
$\boldsymbol{\overline{x}}$ – грань размерности 0.

Если $\boldsymbol{|S'| = n-m-1}$, то получим грань размерности 1, т.е. ребро: ограниченное или неограниченное.

ЛП: Критерий разрешимости

Теорема 1 (Критерий разрешимости). Задача линейного программирования (1)-(3) разрешима тогда и только тогда, когда множество допустимых решений не пусто и целевая функция ограничена на нем.

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности покажем, что

$$\forall\, x^0 \in Q \;\exists \text{ б.д.р. } \overline{x} : w(\overline{x}) \le w(x^0).$$

Пусть

$$\overline{x} \in Q^0 = \{x \in Q | w(x) \le w(x^0)\} \ne \emptyset$$

и имеет минимальное число ненулевых компонент $(supp(\overline{x}))$.

Докажем, что $\overline{x}$ — б.д.р. Допустим противное. $\Longrightarrow$

ЛП: Критерий разрешимости

множество

$$\{A_j | \overline{x}_j > 0\} \text{ линейно зависимо } \Longrightarrow$$

$$\exists\, y \neq 0 : Ay = 0 \text{ и } \text{ если } \overline{x}_j = 0, \text{ то } y_j = 0.$$

Пусть $w(y) \leq 0$ (если необходимо, то возьмем $-y$). Положим $x(t) = \overline{x} + ty$.

$$\forall\, t \in R : \; Ax(t) = b.$$

1). Пусть $\forall j : y_j \geq 0 \Rightarrow \forall t \geq 0 \; x(t) \geq 0 \Rightarrow \forall t \geq 0 \; x(t) \in Q$

$$\text{т.к. } w(x(t)) = w(\overline{x}) + tw(y) \geq const (\text{по условию})$$

а $w(y) \leq 0$ и $t \geq 0$ — произвольно,

$$\text{то: } w(y) = 0 \text{ и, следовательно, } w(x(t)) = w(\overline{x}) \; \forall t.$$

ЛП: Критерий разрешимости

Т.к. из условия $y_j > 0 \Rightarrow \overline{x}_j > 0$, то

$$\forall \text{ малого по абсолютной величине } t < 0: \; x(t) \in Q.$$

Пусть $\bar{t} < 0$ наибольшее по абсолютной величине t удовлетворяющее условию:

$$\forall j (y_j > 0 \Rightarrow \overline{x}_j + \bar{t} y_j \geq 0).$$

Тогда

$$\bar{t} = -\min_{y_j > 0} \frac{\overline{x}_j}{y_j}.$$

Итак $x(\bar{t}) \in Q$ и $w(x(\bar{t})) = w(\overline{x}) \leq w(x^0) \Rightarrow x(\bar{t}) \in Q^0$.

Получили противоречие. Т.к. $supp(x(\bar{t})) \leq supp(\overline{x}) - 1$.

ЛП: Критерий разрешимости

2). Пусть $\exists j : y_j < 0$. Тогда

$$\forall \text{ достаточно малых } t \geq 0: \; x(t) \in Q.$$

Пусть $\bar{t}$ наибольшее t удовлетворяющее условию:

$$\forall j (y_j < 0 \Rightarrow \bar{x}_j + \bar{t} y_j \geq 0).$$

Тогда

$$\bar{t} = \min_{y_j < 0} \frac{\bar{x}_j}{-y_j}.$$

Итак $x(\bar{t}) \in Q$ и т.к. $\bar{t} > 0, w(y) \leq 0$, то

$$w(x(\bar{t})) = w(\bar{x}) + w(y)\bar{t} \leq w(x^0).$$

Следовательно $x(\bar{t}) \in Q^0$. $\rightarrow\leftarrow$ т.к. $supp(x(\bar{t})) \leq supp(\bar{x}) - 1$.

ЛП: Критерий разрешимости

Т.к. по условию $\boldsymbol{Q} \neq \varnothing$, то множество базисных допустимых решений задачи не пусто. Т.к. оно конечно, то

$$\exists\, \boldsymbol{x}^* \text{ — б.д.р.: } \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}^*) \leq \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) \ \forall \text{ б.д.р. } \boldsymbol{x}.$$

Из ранее доказанного следует, что $\boldsymbol{x}^*$ — оптимальное решение. ■

Следствие 1. Если множество допустимых решений задачи ЛП не пусто, то существуют базисные допустимые решения.

Следует из доказательства теоремы 2 (взять $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{0}$).

Следствие 2. Если задача ЛП разрешима, то существует оптимальное базисное решение.

Симплекс-таблица (с.-т.)

Пусть $\overline{\boldsymbol{x}}$ — б.д.р., $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{m})})$ — базисная матрица. Тогда

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \qquad (2')$$

следовательно

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}}, \text{ и}$$

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{N}} - \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}}, \quad (1')$$

$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = (\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\sigma}(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{m})})$ — базисные,

$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} = (\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{j}})_{\boldsymbol{j} \in \boldsymbol{S}'}$ — небазисные переменные

Симплекс-таблица (с.-т.)

$$-w + \sum_{j \in S'} z_{0j} x_j = z_{00}, \qquad (1'')$$

$$x_{\sigma(i)} + \sum_{j \in S'} z_{ij} x_j = z_{i0}, \ i = \overline{1, m}, \qquad (2'')$$

где

$$z_{00} = -c_B B^{-1} b = -w(\overline{x}),$$

$$z_{0j} = c_j - c_B B^{-1} A_j, \ j = 1, \ldots, n,$$

$$(z_{10}, \ldots, z_{m0})^\top = B^{-1} b,$$

$$(z_{1j}, \ldots, z_{mj})^\top = B^{-1} A_j, \ \ j = 1, \ldots, n.$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

$$
\begin{array}{c|c|ccccc|}
 & & x_1 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \\
\hline
-w & z_{00} & z_{01} & \cdots & z_{0j} & \cdots & z_{0n} \\
\hline
x_{\sigma(1)} & z_{10} & z_{11} & \cdots & z_{1j} & \cdots & z_{1n} \\
. & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{\sigma(i)} & z_{i0} & z_{i1} & \cdots & z_{ij} & \cdots & z_{in} \\
. & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{\sigma(m)} & z_{m0} & z_{m1} & \cdots & z_{mj} & \cdots & z_{mn} \\
\hline
\end{array}
$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

Определение 4. Симплекс–таблица называется прямо допустимой, если $\boldsymbol{z_{i0} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m.}$

Базис $\boldsymbol{B}$, которому эта таблица соответствует, также называется прямо допустимым.

Определение 5. Симплекс–таблица называется двойственно допустимой, если $\boldsymbol{z_{0j} \geq 0,\ j = 1, \ldots, n.}$

Базис $\boldsymbol{B}$, которому эта таблица соответствует, называется двойственно допустимым.

Лемма 2 (признак оптимальности). Если симплекс–таблица прямо и двойственно допус[т...] то текущее базисное допустимое решение $\overline{x}$ является оптимальным решением задачи (1)–(3).

Пусть $x \in Q$. Так как $z_{0j} \geq 0$ и $x_j \geq 0$, $j \in S'$, то из $(1'')$ следует, что

$$w(x) = -z_{00} + \sum_{j \in S'} z_{0j} x_j \geq -z_{00} = w(\overline{x}) \blacksquare$$