ЛЕКЦИЯ № 8

Линейное программирование (ЛП)

1. Симплекс-метод

2. Теория двойственности

Содержательное описание с.-м.

$x(t), t \geq 0:$

$$
\begin{aligned}
x_{\sigma(i)}(t) &= \overline{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t, \\
x_s(t) &= t, \\
x_j(t) &= 0, j \in S' \setminus s
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Содержательное описание с.-м.

Лемма 3 (о неограниченности). Если для номера s оценка замещения $z_{0s} < 0$ и для всех индексов i коэффициенты замещения z_{is} неположительны, то в задаче (1)–(3) не существует оптимального решения.

Содержательное описание с.-м.

Лемма 4 (о существовании лучшей вершины). Если оценка замещения $z_{0s} < 0$ и существуют базисные переменные с коэффициентами замещения $z_{is} > 0$, то элементарное преобразование приведёт либо в вершину с меньшим значением целевой функции, либо вершина останется прежней, но изменится её базис.

Содержательное описание с.-м.

Пусть

$$\bar{t} = \frac{\bar{x}_{\sigma(r)}}{z_{rs}} = \frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min_{z_{is}>0,\ i\geq 1} \frac{z_{i0}}{z_{is}}.$$

Предположим, что $\bar{t} > 0$. Тогда

$$\forall i \forall t \leq \bar{t}: \ x_{\sigma(i)}(t) = \bar{x}_{\sigma(i)} - z_{is} t \geq 0,$$

но $x_{\sigma(r)}(\bar{t}) = 0 \Longrightarrow$

Содержательное описание с.-м.

Семейство векторов $\boldsymbol{x(t), 0 \leq t \leq \bar{t}}$ – ограниченное ребро множества $\boldsymbol{Q}$.

Вектор $\boldsymbol{x(\bar{t})}$ – б.д.р.:

$$\boldsymbol{(z_{1s}, \ldots, z_{ms})^\top = B^{-1}A_s \Longleftrightarrow}$$

$$\boldsymbol{A_s = B(z_{1s}, \ldots, z_{ms})^\top \Longleftrightarrow}$$

$\boldsymbol{A_s = \sum_{i=1}^{m} z_{is}A_{\sigma(i)}}$ (отсюда и условия) $\boldsymbol{z_{rs} > 0}$

следует, что матрица $\boldsymbol{B'}$ со столбцами

Содержательное описание с.-м.

$$[\boldsymbol{A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(r-1)}, A_s, A_{\sigma(r+1)}, \dots, A_{\sigma(m)}}]$$

невырождена.

Следовательно $\boldsymbol{B'}$ – базис б.д.р. $\boldsymbol{x(\bar{t})}$. Т.к.

$$\boldsymbol{\forall t, 0 < t \leq \bar{t}, w(x(t)) = -z_{00} + z_{0s}t < -z_{00},}$$

то $\boldsymbol{x(\bar{t})}$ – искомое б.д.р. с меньшим значением целевой функции.

Содержательное описание с.-м.

Пусть $\bar{\boldsymbol{t}} = \mathbf{0}$. В силу выбора $\boldsymbol{r} : \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r})}(\bar{\boldsymbol{t}}) = $
$= \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r})}(\mathbf{0}) = \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{i})} = \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{r}\mathbf{0}} = \mathbf{0}$.

Т.к. $\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{rs}} > \mathbf{0}$, то матрица $\boldsymbol{B}'$ со столбцами

$$[\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{1})}, \ldots, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r}-\mathbf{1})}, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{s}}, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r}+\mathbf{1})}, \ldots, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{m})}]$$

снова невырождена. Следовательно $\boldsymbol{B}'$ – другой базис вершины $\overline{\boldsymbol{x}}$. ■

Симплекс-таблица (с.-т.)

$\alpha_i' = (z_{i0}', z_{i1}', \ldots, z_{in}')$ $(i = \overline{0, m})$ строки новой симплекс– таблицы:

$$\begin{cases} \alpha_i' = \alpha_i - \dfrac{z_{is}}{z_{rs}}\alpha_r, \; i \neq r, \\ \alpha_r' = \dfrac{1}{z_{rs}}\alpha_r. \end{cases} \qquad (5)$$

r-я строка, s-й столбец и элемент z_{rs} называются ведущими.

Замечание. Преобразования (5) сохраняют прямо допустимость с.-т.

Симплекс-метод

0) Построить симплекс–таблицу, соответствующую заданному базисному допустимому решению (таблица, естественно, будет прямо допустимой, т.е. $z_{i0} \geq 0, i = \overline{1, m}$).

1) Если симплекс–таблица двойственно допустима, т.е. $z_{0j} \geq 0, \ j = \overline{1, n}$, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение)

2) Иначе, выбрать ведущий столбец $s : z_{0s} < 0, \ s \geq 1$.

Симплекс-метод

3) Если $\{i \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min\{\frac{z_{i0}}{z_{is}} \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима из-за неограничен целевой функции).

4) Преобразовать симплекс–таблицу, положить $\sigma(r) := s$ и перейти на шаг 1.

Метод искусственного базиса

Пусть $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1, \ldots, x_n})$, $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u_1, \ldots, u_m})$.
Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\boldsymbol{\xi = u_1 + \cdots + u_m \longrightarrow \min}$$

$$\boldsymbol{Ax + Eu = b \geq 0}$$

$$\boldsymbol{(a_i x + u_i = b_i \geq 0, i = \overline{1, m})}$$

$$\boldsymbol{x, u \geq 0}$$

$\boldsymbol{z^0 = (0, b) \in R^{n+m}}$ – б.д.р.

Метод искусственного базиса

Вспомогательная задача разрешима и $\min \xi \geq 0$.
Пусть $z^* = (x^*, u^*)$ – оптимальное решение

A. $\min \xi > 0 \iff Q = \emptyset$

B. $\min \xi = 0 \Longrightarrow u_i^* = 0$, $i = \overline{1, m}$, $\Longrightarrow$ вектор x^* – доп. реш. задачи (1)-(3) $\Longrightarrow$ x^* – б.д.р. задачи (1)-(3).

Метод искусственного базиса

$\{A_j | j \in S\} \cup \{E_i | i \in I^{'}\}$ – базис z^*, где $S \subseteq \{1, \ldots, n\}, I^{'} \subseteq \{1, \ldots, m\}$ и $|S| + |I^{'}| = m$. Тогда

$$A_k = \sum_{j \in S} z_{jk} A_j + \sum_{i \in I'} \mu_{ik} E_i$$

Возможны следующие случаи:

Метод искусственного базиса

В1. $\boldsymbol{I'} = \emptyset \Longrightarrow |\boldsymbol{S}| = \boldsymbol{m} \Longrightarrow$ множество $\{\boldsymbol{A_j} | \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{S}\}$ – базис б.д.р. $\boldsymbol{x^*}$.

Преобразовать оптимальную с.-т.:

1. Вычеркнуть столбцы для переменных:

$\boldsymbol{u_1, \ldots, u_m}$.

2. Пересчитать 0-строку: $\boldsymbol{z_{00} = -(c, x^*)}$,

$\boldsymbol{z_{0k} = 0, k \in S}$, $\boldsymbol{z_{0k} = c_k - \sum_{j \in I} c_j z_{jk}, k \notin S}$.

Метод искусственного базиса

В2. $\boldsymbol{I'} \neq \boldsymbol{\emptyset}$ и $\exists \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{I'}$, $\exists \boldsymbol{s} \notin \boldsymbol{S}$ $\boldsymbol{\mu_{rs}} \neq \mathbf{0}$ $\Longrightarrow$ Выполнить элементарное преобразование с.-т. с ведущим элементом $\boldsymbol{\mu_{rs}} \neq \mathbf{0}$. Новая с.-т. соответствует базису

$$\{\boldsymbol{A_j} | \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{S} \cup \{\boldsymbol{s}\}\} \cup \{\boldsymbol{E_i} | \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I'} \setminus \{\boldsymbol{r}\}\}.$$

Метод искусственного базиса

В3. $\boldsymbol{I'} \neq \emptyset$ и $\forall \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{I'}, \forall \boldsymbol{s} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{n}} : \boldsymbol{\mu_{rs}} = \mathbf{0}.$

Ограничения $\boldsymbol{a_i x} = \boldsymbol{b_i}$ системы (2) с номерами $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I'}$ являются избыточными.

Лексикографический с. - м.

Пусть $\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}'' \in \boldsymbol{R}^{n+1}$.

Вектор $\boldsymbol{\alpha}'$ лексикографически больше вектора $\boldsymbol{\alpha}''$ $(\boldsymbol{\alpha}' \succ \boldsymbol{\alpha}'') \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}' - \boldsymbol{\alpha}'' \succ \mathbf{0}$.

Симплекс-таблица *нормальна*, если каждая ее строка $\boldsymbol{\alpha}_i,\ i = 1, \ldots, m$ лексикографически больше нуля.

Лексикографический с. - м.

0) Начать с нормальной симплекс–таблицы.

3) Если $\{i \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{1}{z_{rs}}\alpha_r = lex\min\{\frac{1}{z_{is}}\alpha_i \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима).

Сохранение нормальности с.-т. на шаге 4:

1. $\boldsymbol{\alpha_r \succ 0}$, $\boldsymbol{z_{rs} > 0 \Rightarrow \frac{1}{z_{rs}}\alpha_r \succ 0}$
2. $\boldsymbol{z_{is} \leq 0 \Rightarrow \alpha_i - \frac{z_{is}}{z_{rs}}\alpha_i \succeq \alpha_i \succ 0}$
3. $\boldsymbol{z_{is} > 0 \Rightarrow z_{is}[\frac{1}{z_{is}}\alpha_i - \frac{1}{z_{rs}}\alpha_r] \succ 0}$.

Лексикографическое возрастание 0-й строки:

$\boldsymbol{z_{0s} < 0}$, $\boldsymbol{z_{rs} > 0}$ и $\boldsymbol{\alpha_r \succ 0}$, то

$$\boldsymbol{\alpha_0 - \frac{z_{0s}}{z_{rs}}\alpha_r \succ \alpha_0.}$$

Итак базисы не могут повторятся, следовательно, метод конечен.

ЛП: двойственная задача

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q} \Rightarrow (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{y}\boldsymbol{A}, \boldsymbol{x})$.

Если $\boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{y}\boldsymbol{A}$, то для любого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}$: $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) \geq (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b})$

Поиск наилучшей нижней оценки

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \longrightarrow \max \tag{6}$$

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{c}. \tag{7}$$

Задача (6)-(7) называется задачей двойственной к прямой задаче (1)-(3).

Теорема 2. Задача двойственная к задаче (6)-(7) совпадает, с точностью до обозначений, с исходной задачей (1)-(3).

Доказательство. Задача (6)-(7) эквивалентна задаче

$$-(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \longrightarrow \min$$

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{z} \geq 0$$

ЛП: двойственная задача

После замены переменных $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^1 - \boldsymbol{y}^2$, где $\boldsymbol{y}^1 \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{y}^2 \geq \mathbf{0}$ получим

$$-(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}^1) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}^2) + (\mathbf{0}, \boldsymbol{z}) \longrightarrow \min$$

$$\boldsymbol{y}^1 \boldsymbol{A} - \boldsymbol{y}^2 \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{y}^1 \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{y}^2 \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{z} \geq \mathbf{0}$$

Двойственная задача:

$$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{u}) \longrightarrow \max$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{A}^T, -\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{E})^T \leq (-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}, \mathbf{0})^T$$

$$(\boldsymbol{c}, -\boldsymbol{u}) \longrightarrow \min$$

$$\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{u}) \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}(-\boldsymbol{u}) \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{E}(-\boldsymbol{u}) \geq \mathbf{0}$$

Делаем замену $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{u}$ и получаем исходную задачу (1)-(3).

ЛП: двойственная задача

Прямая задача		Двойственная задача
$w(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$		$z(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$
$a_i x \geq b_i$	$i \in I_1$	$y_i \geq 0$
$a_i x = b_i$	$i \in I_2$	y_i — своб.
$x_j \geq 0$	$j \in J_1$	$yA_j \leq c_j$
x_j — своб.	$j \in J_2$	$yA_j = c_j.$

Упражнение.

Воспользоваться сводимостью общей задачи ЛП к задаче ЛП в канонической форме и применить готовый рецепт (доказательство т. 3).

Первая теорема двойственности

Теорема 3 (Первая теорема двойственности). Прямая и двойственная к ней задачи либо одновременно разрешимы, либо одновременно неразрешимы.

При этом в первом случае оптимальные значения целевых функций этих задач совпадают, а во втором случае по крайней мере одна из задач неразрешима в силу несовместности ее ограничений.

Вторая теорема двойственности

Теорема 4 (Вторая теорема двойственности или теорема о дополняющей нежесткости). Допустимые решения $\overline{\boldsymbol{x}}$ и $\overline{\boldsymbol{y}}$ соответственно прямой и двойственной задачи оптимальны тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\boldsymbol{y_i(a_i x - b_i) = 0 \ (i \in I),}$$
$$\boldsymbol{(c_j - yA_j)x_j = 0 \ (j \in J).}$$