КРИТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ[1]

Е.В. Алексеева, Ю.А. Кочетов, Н.А. Кочетова

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
e-mail: ekaterina2@math.nsc.ru, jkochet@math.nsc.ru, nkochet@math.nsc.ru

Аннотация. Для простейшей задачи размещения производства проведен анализ вычислительной сложности в зависимости от плотности матрицы производственно-транспортных затрат и разброса в затратах на открытие предприятий. Показано, что трудные в вычислительном отношении примеры появляются только при малой плотности и равных затратах на открытие предприятий.

Ключевые слова: простейшая задача размещения, метод ветвей и границ, локальный поиск, разрыв двойственности.

Введение

В области целочисленной и комбинаторной оптимизации наблюдается быстрый рост числа работ, посвященных методам локального поиска. Все более и более сложные модели удается анализировать этими методами в различных разделах исследования операций. Однако авторы часто предлагают метод решения задачи и результаты численных экспериментов, но не объясняют, почему этот метод хорошо работает, всегда ли он будет давать хорошие результаты, каковы границы его применения и как следует менять управляющие параметры при переходе от одного класса исходных данных к другому. Как правило, в задаче имеется один или несколько критических параметров, изменение которых сильно влияет на поведение численных методов. Например, в задаче MAX-2SAT [6] таким критическим параметром является отношение числа конъюнкций к числу переменных. Увеличение этого параметра приводит сначала к росту трудоемкости получения точного решения, а затем к его падению. Максимум достигается при значении 4,5. При бо́льших и меньших значениях параметра задача становится значительно проще. Таким образом, имеется возможность еще до решения задачи предсказать ее трудоемкость.

В настоящей работе с этих позиций исследуется простейшая задача размещения производства. Показано, что плотность матрицы транспортных затрат и разброс в стоимостях открытия предприятий являются критическими параметрами задачи. Малая плотность и отсутствие разброса приводят к наиболее трудным примерам. Огромная трудоемкость при плотности 5% объясняется большим разрывом двойственности, малыми областями обслуживания предприятий и случайной структурой матрицы производственно-транспортных затрат. Методы локального поиска, например, поиск с запретами, часто ошибаются в этом случае, и для повышения их эффективности требуются специальные приемы: рандомизация окрестности, процедуры интенсификации и диверсификации и др. Визуализация процесса поиска помогает понять слабые стороны локальных методов и добиться их большей эффективности даже для трудных в вычислительном отношении примеров.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 04-07-90096)

1. Постановка задачи

В простейшей задаче размещения производства (ПЗРП) задано множество клиентов $J = \{1, \ldots, n\}$ и множество предприятий $I = \{1, \ldots, m\}$. Для каждого предприятия $i \in I$ известны стоимость его открытия $f_i \geq 0$ и производственно-транспортные затраты g_{ij} на обслуживание клиентов $j \in J$. Требуется найти непустое подмножество предприятий $S \subseteq I$, которое позволит обслужить всех клиентов с минимальными суммарными затратами. Исследованию этой комбинаторной задачи посвящены десятки статей. Подкупающая простота постановки задачи не мешает ей, как впрочем и многим другим классическим комбинаторным задачам, принадлежать классу задач NP-трудных в сильном смысле. Задача о p-медиане, задача о покрытии множествами, задача минимизации псевдобулевых полиномов тесно связаны с ПЗРП. Установлено, что существование приближенных полиномиальных алгоритмов с гарантированной оценкой точности меньше чем $0,5 \ln n$ влечет $NP \subset TIME(n^{\log \log n})$, что скорее всего не верно. Таким образом, относительная погрешность в худшем случае любого полиномиального алгоритма для ПЗРП растет не медленнее логарифма от n.

Исключением является метрический частный случай, когда матрица производственно-транспортных затрат является неотрицательной, симметричной и удовлетворяет неравенству треугольника. В этом случае задача остается NP-трудной, но погрешность приближенных полиномиальных алгоритмов может быть ограничена константой. Наилучшие результаты в этой области связаны с применением жадных алгоритмов и округлением оптимального решения линейной релаксации [7]. Значение 1,52 является рекордным на сегодняшний день. Заметим, что величина 1,463 является порогом, ниже которого эта оценка опуститься не может. Складывается впечатление, что даже в метрическом случае решить задачу с относительной погрешностью менее 50 % представляется почти невозможным. К счастью, это не так. Оценки поведения алгоритма в худшем случае дают излишне пессимистическую картину. Например, в [3] приводятся результаты численных экспериментов для метрических задач большой размерности. Предлагаемые авторами полиномиальные алгоритмы дают в среднем около 0,5 % относительной погрешности. Более того, точное решение задачи можно получать модифицированным методом ветвей и границ [4] при $n = m \approx 3000 - 5000$, что покрывает бóльшую часть приложений.

Метрический случай является узким подклассом ПЗРП. Во-первых, матрица (g_{ij}) кроме транспортной составляющей, которая может удовлетворять неравенству треугольника, имеет еще и производственную составляющую, связанную с затратами на выпуск продукции предприятия. Предполагать, что эти затраты удовлетворяют неравенству треугольника, было бы не логичным. Во-вторых, в метрическом случае неявно считается, что каждое предприятие может обслужить любого клиента. Это не всегда так. Например, в задачах стандартизации [1] каждое предприятие имеет свое подмножество потенциальных клиентов, что порождает запрещенные элементы в матрице (g_{ij}) и приводит к понятию плотности. Ниже будет показано, что этот параметр играет ключевую роль в исследовании трудоемкости решения ПЗРП.

2. Легкие и трудные примеры ПЗРП

Рассмотрим частный случай метрической задачи, когда элементы матрицы (g_{ij}) порождаются евклидовыми расстояниями на двумерной плоскости. На квадрате со стороной a выберем n точек случайным образом независимо друг от друга с равномерным распределением. Положим $I = J = \{1, \ldots, n\}$ и определим величину g_{ij} как евклидово расстояние между точками $i, j \in I$. Начальные затраты f_i на открытие предприятия будем выбирать из отрезка $[b, c]$ случайным образом независимо с равномерным распределением. Далее, для каждого предприятия упорядочим клиентов по неубыванию производственно-транспортных затрат и будем считать, что d процентов от общего числа клиентов, имеющих минимальные значения g_{ij}, составляют подмножество потенциальных клиентов данного предприятия. Остальные клиенты не могут обслуживаться этим предприятием. Для них положим $g_{ij} = +\infty$. Величину d будем называть плотностью матрицы (g_{ij}).

В [5] показано, что значение $d = 100\%$ соответствует простым примерам, которые легко решаются как точными, так и приближенными методами. Там же приводятся классы трудных примеров ПЗРП. Они имеют малую плотность, $d \approx 10\% - 16\%$. На рис. 1 показано изменение среднего числа шагов метода ветвей и границ как функции от d. Интервал от

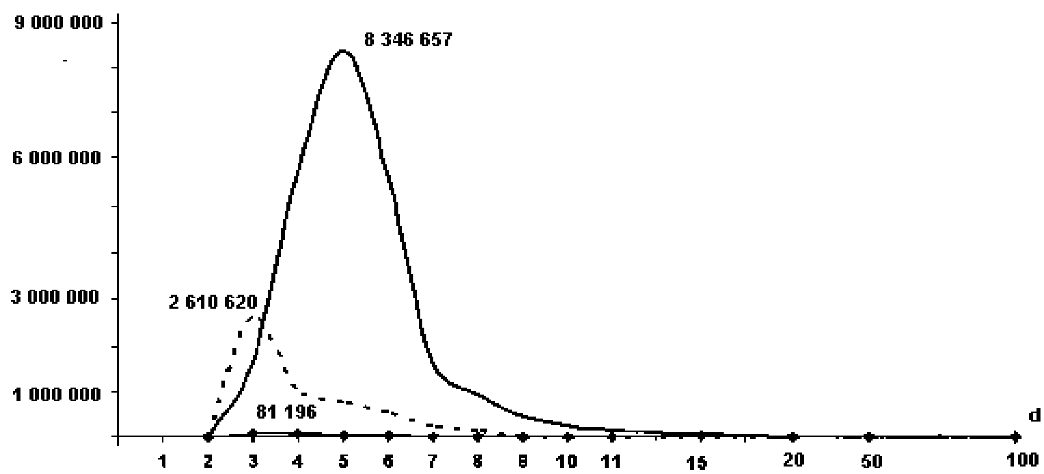

Рис. 1: Среднее число шагов метода ветвей и границ

4% до 6% соответствует наиболее трудным примерам при $a = 500, b = c = 1000, n = 100$. При $d > 20\%$ примеры оказываются легкими и не представляют проблем для численных методов. Пунктирная кривая на рис.1 также соответствует среднему числу шагов метода ветвей и границ но при другом способе порождения запретов в матрице (g_{ij}). Новый способ аналогичен предыдущему, но выставляет запреты не по строкам, а по столбцам матрицы. Для каждого клиента все предприятия упорядочиваются по неубыванию производственно-транспортных затрат, выделяется группа *ближайших* предприятий, составляющая d процентов от n, остальные предприятия запрещаются. Пунктирная кривая идет значительно ниже предыдущей и имеет максимум при меньшей плотности $d = 3\%$. Столь сильное различие имеет простое объяснение. Первый способ порождает предприятия с равными по мощности потенциальными областями обслуживания. Предприятия находятся в равных условиях и выбрать из них оптимальный набор достаточно сложно. Второй способ позволяет предприятиям иметь разные мощности областей обслуживания. При малых d предприятия с большими областями получают преимущества, что значительно упрощает задачу. Наконец, последняя кривая соответствует первому способу порождению запретов, но с выбором начальных затрат f_i из интервала [500, 1000]. Эта кривая лежит ниже предыдущих. Ее максимум достигается при $d = 3\%$. Разброс в начальных затратах заметно облегчает процесс решения задачи методом ветвей и границ. При $d = 5\%$ разрыв двойственности $\delta = 100\%(F^* - F^*_{LP})/F^*$, где F^* — оптимум, F^*_{LP} — оптимум линейной релаксации, составляет в среднем $\delta = 0,7\%$ против $\delta = 4,5\%$ для $b = c = 1000$. Таким образом, трудные примеры ПЗРП возникают только при малых плотностях и одинаковых начальных затратах.

3. Поведение методов локального поиска

Высокая плотность матрицы (g_{ij}) соответствует простым примерам как с точки зрения точных методов типа ветвей и границ, так и с точки зрения методов локального поиска. Интересно понять, что меняется в поведении алгоритмов при переходе в зону критических значений плотности. На рисунках 2а,б,в,г показаны парные замены, выполняемые методом поиска с запретами [2] за 5000 итераций. Они изображены линиями. Крестиками помечены выбранные на плоскости случайные точки. Каждая из них соответствует одновременно некоторому клиенту и месту возможного открытия предприятия. Большие крестики соответствуют оптимальному решению задачи. Кружками помечено начальное решение, выбранное рандомизированным жадным алгоритмом.

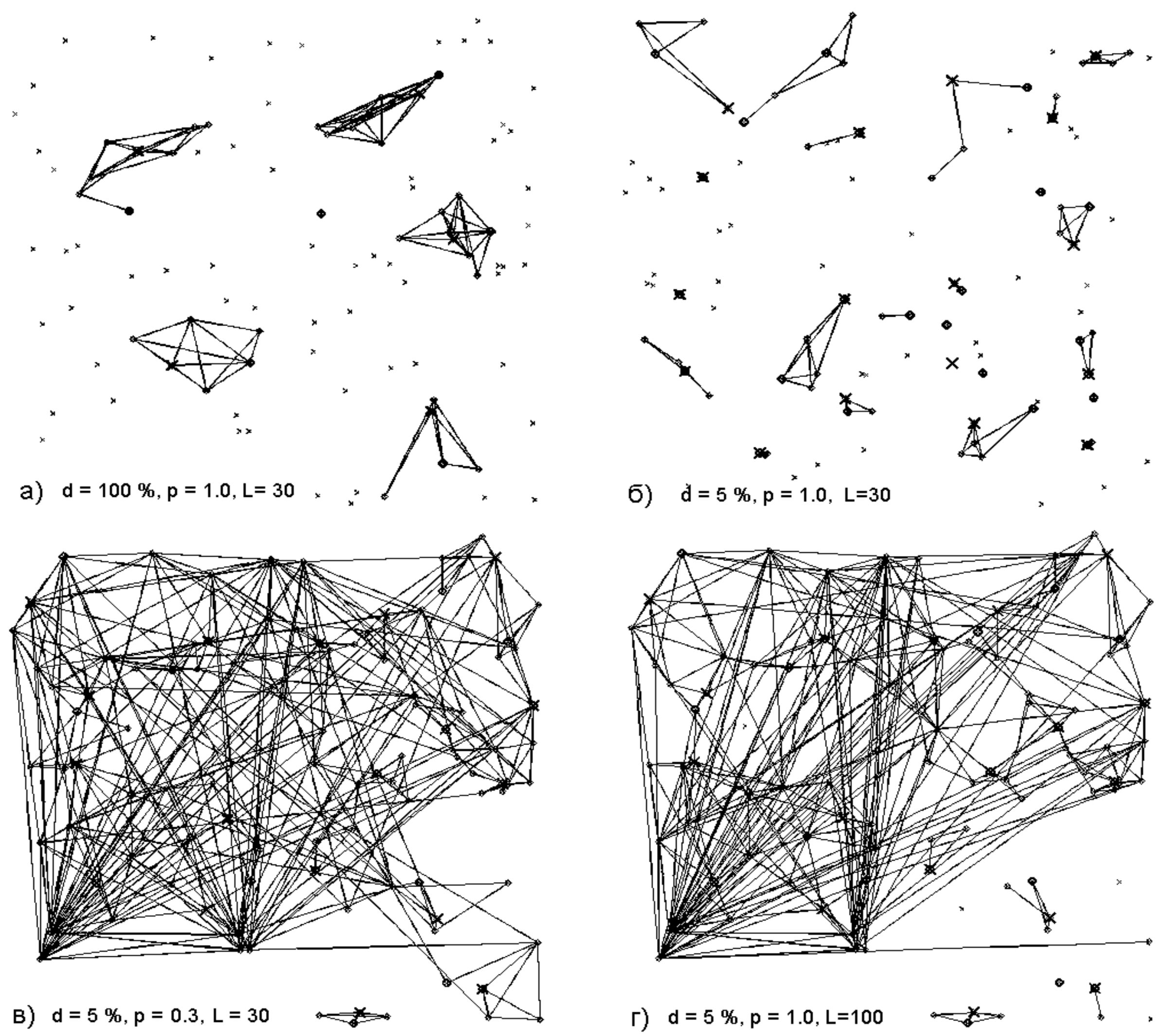

Рис. 2: Поведение алгоритма поиска с запретами

Малое число парных замен на рис. 2а свидетельствует о том, что при $d = 100\%$ алгоритм быстро нашел *хорошее* решение и фактически от него не уходит. При высокой плотности это решение как правило оказывается оптимальным. На рисунке 2б показано поведение алгоритма при $d = 5\%$. Оптимальное решение содержит теперь 18 предприятий против 5-ти в предыдущем случае. Алгоритм по-прежнему детально исследует район найденного им *хорошего* решения, но теперь это решение является только локальным оптимумом. Алгоритм не циклит, но рост числа итераций не приводит к снижению погрешности. Для повышения эффективности нужны специальные приемы, способные внести необходимое разнообразие. Рисунки 2в и 2г показывают влияние рандомизации окрестности и увеличения списка запретов на поведение алгоритма. Величина p задает вероятность включения соседних решений в рандомизированную окрестность. Параметр L задает длину списка запрещаемых парных замен [2]. Оба приема повышают эффективность поиска: растет число просмотренных локальных оптимумов, повышается вероятность найти оптимальное решение задачи. Таким образом, при решении практических задач следует особое внимание обращать на разреженные матрицы и тщательно исследовать области, близкие к критическим значениям плотности.

Список литературы

[1] В.Л. Береснев, Э.Х. Гимади, В.Т. Дементьев *Экстремальные задачи стандартизации.* Новосибирск: Наука, 1978.

[2] Е.Н. Гончаров, Ю.А. Кочетов *Вероятностный поиск с запретами для дискретных задач безусловной оптимизации* - Дискретный анализ и исследование операций, Серия 2, 2002. т. 9, N 2, с. 13-30.

[3] F. Barahona, F. Chudak *Solving large scale uncapacitated facility location problems* in: Approximation and complexity in numerical optimization. 2000, Kluwer Academic Publishers.

[4] P. Hansen, J. Brimberg, D. Urošević, N. Mladenović *Primal-dual variable neighborhood search for bounded heuristic and exact solution of the simple plant location problem* - Les Cahiers du GERAD, G-2003-64, 2003.

[5] Yu. Kochetov, D. Ivanenko *Computationally difficult instances for the uncapacitated facility location problem* in: Metaheuristics: Progress as Real Problem Solvers. Springer. 2005. p. 349–365.

[6] D. Mitchell, B. Selman, H.J. Levesque *Generating hard satisfiability problems* - Artificial Intelligence, 1996, v. 81, p. 17–29.

[7] M. Sviridenko *An improved approximation algorithm for the metric uncapacitated facility location problem* - Integer Programming and Combinatorial Optimization - IPCO 2002. Springer. 2002. p. 240-257 (Lecture Notes in Comput. Sci.; v. 2337).

CRUCIAL PARAMETERS FOR THE UNCAPACITATED FACILITY LOCATION PROBLEM

E. Alekseeva, Yu. Kochetov, N. Kochetova

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
e-mail: ekaterina2@math.nsc.ru, jkochet@math.nsc.ru, nkochet@math.nsc.ru

Abstract. For the uncapacitated facility location problem we analyse the computational efforts for exact solution with different values of density of the production and transportation matrices and the scattering of the fixed costs for opening facilities. It is shown that the most difficult instances can be generated by small density and identical fixed costs.

Key words: uncapacitated facility location problem, branch-and-bound method, local search, duality gap.