МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ СОСТАВА СИСТЕМЫ ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ[1]

В.С. Ишутенко, Ю.А. Кочетов

Секция прикладных проблем при Президиуме СО РАН, Новосибирск
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
e-mail: grigor@ad-sbras.nsc.ru, jkochet@math.nsc.ru

Аннотация. В работе приводится математическая постановка задачи выбора оптимального состава системы в случае, когда сценарий выполнения работ области применения заранее не известен. В качестве критерия оптимизации выступают суммарные затраты на пополнение системы новыми техническими средствами и затраты на выполнение работ. Обсуждаются пути развития модели для случая двух лиц, принимающих решения.

Ключевые слова: система технических средств, линейное программирование, двухуровневое программирование.

Введение

Задачи выбора оптимального состава систем технических средств давно привлекают к себе внимание исследователей [1]. Интерес к ним объясняется не только широкими приложениями, но и необходимостью разрабатывать специализированные методы решения, учитывающие специфику данного класса задач и, как правило, их большую размерность.

В настоящей работе рассматривается математическая модель, в которой состав системы уже известен. Требуется оценить необходимость пополнения системы для того, чтобы выполнить определенный круг работ. Сценарий их выполнения предполагает, что часть работ выполняется на первом этапе, часть на втором и т.д. [2]. К сожалению, задание сценария в значительной степени предопределяет оптимальный состав системы. Какой именно сценарий будет реализован на практике, заранее неизвестно. Новый сценарий, вообще говоря, приводит к новому составу системы, а перебор сценариев не дает ответа на вопрос об оптимальном составе системы, способным выполнить все работы при любом сценарии. В данной работе предлагается новая математическая модель, учитывающая одновременно несколько сценариев. Она не выводит за рамки задач линейного программирования, что позволяет использовать стандартное программное обеспечение [6]. Обсуждаются пути дальнейшего развития этой модели, в том числе и в рамках задач двухуровневого линейного программирования.

1. Основные понятия

Под системой технических средств принято понимать [1] совокупность технических средств (ТС), объединенных общностью функционального назначения и общей сферой применения. В качестве ТС чаще всего рассматривается массовая продукция различных отраслей машиностроения: машины, механизмы, приборы и т.п. Сферу применения исследуемой системы ТС характеризует совокупность видов работ, выполняемых с их ис-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 03-01-00455)

пользованием. Множество видов работ, выполнение которых должно быть обеспечено исследуемой системой, называют областью применения. Будем предполагать, что процесс выполнения работ области применения представляется как многоэтапный, когда часть работ выполняется на первом этапе, часть на втором и т.д. При этом конкретные ТС, используемые на данном этапе и не вышедшие из строя, могут быть использованы на последующих этапах. Виды работ на каждом этапе количественно будем характеризовать средним числом одновременно выполняемых единичных работ. Состав системы называют допустимым, если система способна обеспечить в требуемых объемах выполнение всех работ области применения. Критерий выполнения каждой единичной работы предполагается известным.

Под суммарными затратами на пополнение и функционирование системы будем понимать сумму затрат на покупку и транспортировку необходимых ТС, а также затрат на выполнение работ области применения, включая затраты на восстановление ТС, вышедших из строя в ходе выполнения работ. Задача выбора оптимального состава системы ТС состоит в следующем. Требуется найти допустимый состав системы и назначить исполнителей каждой работы области применения так, чтобы суммарные затраты были минимальными.

Предположим теперь, что имеется несколько сценариев выполнения работ. Состав системы будем называть допустимым, если он обеспечивает выполнение всех работ в требуемых объемах в каждом отдельно взятом сценарии. Теперь содержательная постановка задачи формулируется следующим образом. Требуется найти допустимый состав системы и назначить исполнителей в каждом сценарии так, чтобы суммарные затраты на пополнение и функционирование системы были минимальными.

2. Математическая модель

Обозначим через I множество образцов технических средств, которые входят или могут входить в состав рассматриваемой системы ТС. Через $v_i^0, i \in I$ обозначим количество ТС i-го образца в составе системы, а через $V_i, i \in I$ предельные возможности пополнения системы изделиями i-го образца. Если $V_i = 0$ для некоторого $i \in I$, то возможность пополнить систему ТС данного образца отсутствует. Затраты на пополнение системы изделиями i-го ТС обозначим через $c_i, i \in I$.

Область применения технических средств зададим множеством работ J. Будем считать, что известно множество сценариев K выполнения работ и для каждого сценария $k \in K$ задано разбиение множества J на непересекающиеся множества $J = \bigcup(J_{lk}, l \in L_k)$, определяющие поэтапный порядок выполнения работ в данном сценарии. Упорядоченное множество L_k задает последовательность этапов k-го сценария. Через φ_{jlk} обозначим число работ j-го вида, подлежащее выполнению на l-м этапе k-го сценария.

Примем следующие предположения относительно правил использования ТС.

1. Каждое ТС на каждом этапе любого сценария может быть использовано только для выполнения одной работы.

2. Единичная работа каждого вида выполняется нарядом ТС одного образца. В соответствии с этим для $i \in I, j \in J$ считаем известным величину $p_{ij} > 0$ равную количеству изделий i-го образца, требующихся для выполнения работы j-го вида и величину $c_{ij} \geq 0$ равную необходимым при этом затратам.

3. При выполнении каждой работы часть изделий выходит из строя. Вышедшие из строя изделия могут быть частично восстановлены во время последующих этапов. Для

$i \in I, j \in J$, считаем известной величину $p_{ij}^1 \in [0, p_{ij}]$, равную количеству ТС i-го образца, вышедших из строя при выполнении j-й работы. Для $i \in I, l, l' \in L_k,\ l' > l$, предполагаем также известной величину $\gamma_{ill'} \in [0,1]$ — долю ТС i-го образца, вышедших из строя на l-м этапе и восстановленных в течение $l+1, \ldots, l'$ этапов. Затраты на ремонт изделий i-го образца обозначим через $c_i^1, i \in I$.

Введем следующие переменные:
$v_i \geq 0,\ i \in I$ — число изделий i-го образца, которыми необходимо пополнить состав системы.
$x_{ijk} \geq 0,\ i \in I, j \in J_{lk}, l \in L_k, k \in K$ — доля работ j-го вида, выполняемая нарядами ТС i-го образца в k-м сценарии.

С использованием введенных обозначений математическая модель оценки состава системы ТС может быть записана следующим образом. Найти

$$\min_{v_i, x_{ijk}} \sum_{i \in I} (c_i v_i + \max_{k \in K} \sum_{l \in L_k} \sum_{j \in J_{lk}} \varphi_{jlk} x_{ijk} (c_{ij} + c_i^1 p_{ij}^1))$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I} x_{ijk} = 1,\ j \in J_{lk}, l \in L_k, k \in K;$$

$$0 \leq v_i \leq V_i,\ i \in I;$$

$$\sum_{j \in J_{lk}} \varphi_{jlk} p_{ij} x_{ijk} \leq v_i^0 + v_i - \sum_{l'=1}^{l-1} \sum_{j \in J_{l'k}} \varphi_{jl'k} p_{ij}^1 x_{ijk} (1 - \gamma_{il'l}),\ i \in I, l \in L_k, k \in K;$$

$$x_{ijk} \geq 0,\ i \in I, j \in J_{lk}, l \in L_k, k \in K.$$

Целевая функция задает суммарные затраты на пополнение системы новыми ТС, затраты на выполнение работ и ремонт вышедших из строя ТС при реализации одного из рассматриваемых сценариев. Первое ограничение требует выполнения всех работ, какой бы из сценариев не был реализован. Второе ограничение устанавливает верхнюю границу на возможные объемы пополнения системы. Третье ограничение задает связь между требуемым количеством ТС на каждом этапе выполнения работ и имеющимся количеством ТС к этому этапу с учетом потерь и скорости восстановления изделий.

Сформулированная задача в отличие от [2] не содержит целочисленных переменных и может быть решена стандартными средствами линейного программирования [6].

3. Пути развития модели

Рассмотрим несколько вариантов уточнения модели с целью более детального описания ее компонентов.

3.1. Учет ремонтопригодности. В целевой функции последнее слагаемое задает стоимость ремонта вышедших из строя изделий. Возможно, что не все изделия подлежат восстановлению и часть из них следует заменить новыми. Это обстоятельство можно учесть, если ввести в рассмотрение величину $p_{ij}^2 \in [0, p_{ij}^1]$, равную количеству ТС i-го образца, вышедших из строя при выполнении j-й работы и не подлежащих восстановлению. При новых предположениях о ремонтопригодности ТС, последнее слагаемое в целевой функции принимает вид

$$c_i^1 (p_{ij}^1 - p_{ij}^2) + c_i p_{ij}^2.$$

Ограничения задачи не меняются, но задание матрицы $\gamma_{ill'}$ должно быть согласованным с величинами p^2_{ij}, т.е. $p^1_{ij}(1-\gamma_{il'l}) \geq p^2_{ij}$, для всех $i \in I, j \in J, l, l' \in L_k,\ l > l'$.

3.2. Возможности пополнения системы. Ограничения задачи устанавливают верхнюю границу на объемы пополнения системы. Эта граница задается для каждого образца ТС отдельно. Альтернативным вариантом могло бы стать суммарное ограничение на дополнительно привлекаемые ТС:

$$\sum_{i \in I} \lambda_i v_i \leq V,$$

где коэффициенты λ_i задают важность (вес, приоритет, цену и т.п.) изделий i-го образца, а величина V определяет суммарные возможности по привлечению ТС в систему. Заметим, что в данном случае речь не идет о контроле за номенклатурой образцов. Попытки управлять качественным составом системы приводят к частично-целочисленным моделям [1] и выводят за рамки линейного программирования.

3.3. Модель двух лиц, принимающих решения. Следуя [3], рассмотрим ситуацию, когда для покрытия части расходов приходится привлекать средства инвестора. Обозначим через $B > 0$ величину кредита и будем предполагать, что инвестор хочет получить на эти средства часть изделий по специальным ценам $\beta_i > 0, i \in I$. Важность каждого образца для инвестора обозначим через $\alpha_i > 0, i \in I$. Если состав системы $v^0_i + v_i, i \in I$ уже известен, то инвестор стремится максимизировать свою выгоду, выбирая значения переменных $\omega_i \geq 0, i \in I$ — число изделий i-го образца, направляемых инвестору:

$$\max_{\omega_i}\{\sum_{i \in I} \alpha_i \omega_i \ \mid\ \sum_{i \in I} \beta_i \omega_i \leq B, \ \ \omega_i \leq v^0_i + v_i,\ i \in I\}.$$

Зная задачу инвестора, требуется выбрать допустимый состав системы, имеющий минимальные суммарные затраты, т.е. найти

$$\min_{v_i, x_{ijk}} \sum_{i \in I}(c_i v_i + \max_{k \in K} \sum_{l \in L_k} \sum_{j \in J_{lk}} \varphi_{jlk} x_{ijk}(c_{ij} + c^1_i(p^1_{ij} - p^2_{ij}) + c_i p^2_{ij}))$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I} x_{ijk} = 1,\ j \in J_{lk}, l \in L_k, k \in K;$$

$$0 \leq v_i \leq V_i,\ i \in I;$$

$$\sum_{i \in I} \lambda_i v_i \leq V;$$

$$\sum_{j \in J_{lk}} \varphi_{jlk} p_{ij} x_{ijk} \leq v^0_i + v_i - \omega^*_i - \sum_{l'=1}^{l-1} \sum_{j \in J_{l'k}} \varphi_{jl'k} p^1_{ij} x_{ijk}(1 - \gamma_{il'l}),\ i \in I, l \in L_k, k \in K;$$

$$x_{ijk} \geq 0,\ i \in I, j \in J_{lk}, l \in L_k, k \in K,$$

где ω^*_i — оптимальное решение задачи инвестора. Сформулированная задача относится к классу задач двухуровневого линейного программирования [5]. Для ее решения предложен точный алгоритм полиномиальной трудоемкости [4].

Список литературы

[1] В.Л. Береснев *Математические модели развития систем технических средств* - Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2001. т. 7, N1. с. 78–96.

[2] Ю.А. Кочетов, М.Г. Пащенко *Лагранжевы релаксации в задаче выбора оптимального состава системы технических средств* - Управляемые системы. Сб. науч. тр. Вып. 31. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1993. с. 26–39.

[3] Ю.А. Кочетов, А.В. Плясунов *Задача выбора ряда изделий с частичным внешним финансированием* - Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2002. т. 9, N2. с. 78–96.

[4] Ю.А. Кочетов, А.В. Плясунов *Полиномиально разрешимый класс задач двухуровневого линейного программирования* - Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1997. т. 4, N2. с. 23–33.

[5] O. Ben-Ayed *Bilevel linear programming* - Computers and Operations Research, 1993, т. 20. с. 485–501.

[6] J.T. Linderoth. T.K. Ralphsy *Noncommercial Software for Mixed-Integer Linear Programming*, http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2004/12/1028.html

MATHEMATICAL MODEL TO EVALUATE THE COMPOSITION OF A TECHNICAL TOOL SYSTEM

V. Ishutenko, Yu. Kochetov

Application Section at the Presidium of the Siberian Branch RAS, Novosibirsk
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
e-mail: grigor@ad-sbras.nsc.ru, jkochet@math.nsc.ru

Abstract. *In this paper we introduce mathematical model to evaluate the composition of a technical tool system for the case when scenario of the tasks fulfilment is not defined in advance. As a criterion optimization we use the total cost for additional tools and the cost to carry out the tasks. Further directions for improvement are discussed for the model with two decision makers.*

Key words: *technical tool system, linear programming, bilevel programming.*