ЛОКАЛЬНЫЙ ПОИСК В КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ:
ДОСТИЖЕНИЯ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Ю. А. Кочетов, Н. Младенович, П. Хансен

Методы локального поиска являются, по-видимому, наиболее естественными и наглядными для решения задач комбинаторной оптимизации. Первые шаги их реализации относятся к концу 50-х, началу 60-х годов двадцатого столетия. В настоящее время они являются одним из наиболее мощных средств решения сложных комбинаторных задач. Анализ этих методов интенсивно ведется в двух направлениях: эмпирическом и теоретическом. Эти направления дают существенно разные оценки их возможностям.

Эмпирические результаты. Для многих NP-трудных задач локальный поиск позволяет находить приближенные решения, близкие по целевой функции к глобальному оптимуму. Трудоемкость алгоритмов часто оказывается полиномиальной, причем степень полинома достаточно мала. Так для задачи о разбиении множества вершин графа на две равные части разработаны алгоритмы локального поиска со средней трудоемкостью $O(n \log n)$, n — число вершин, которые дают всего несколько процентов погрешности [7]. Для задачи коммивояжера алгоритмы локального поиска являются наилучшими с практической точки зрения. Один из таких алгоритмов с окрестностью Лина-Кернигхана в среднем имеет погрешность около 2% и максимальная размерность решаемых задач достигает 10^6 [6]. Методы локального поиска успешно используются для построения кодов [1], проведения экспериментальных исследований в теории графов: доказательства и опровержения гипотез, поиска оптимальных или близких к ним значений инвариантов, поиска графов, обладающих заданными свойствами [3] и др.

Теоретические результаты. Исследование локального поиска с точки зрения гарантированных оценок качества показывают границы его возможностей в худшем случае. Построены трудные примеры, из которых следует [1], что

1) число шагов до локального оптимума может оказаться экспоненциальным;

2) значение локального оптимума может сколь угодно сильно отличаться от глобального оптимума;

3) локальный спуск по любой полиномиально вычислимой окрестности не может гарантировать нахождение глобального оптимума.

Полученные теоретические результаты дают весьма пессимистическую картину, что объясняется, по-видимому, самим подходом — оценкой худшего случая. В среднем, однако, картина выглядит совсем иначе [11]. Эти результаты стимулируют дальнейшие исследования задачи поиска локальных оптимумов, ее трудоемкости в худшем и среднем случае.

Кочетов Юрий Андреевич, Институт математики им С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: jkochet@math.nsc.ru
Mladenović Nenad, Mathematical Institute, Serbian Academy of Science,
Kneza Mihajla 35, 11000, Belgrade, Yugoslavia, email: nenad@mi.sanu.ac.yu
Hansen Pierre, GERAD and École des Hautes Études Commerciales
3000, chemin de la Côte–Sainte–Catherine, Montréal, H3T 2A7, Canada
email: pierreh@crt.umontreal.ca

1. Сложность поиска локального оптимума

Пусть пара $(\mathcal{I}, f)$ задает индивидуальную задачу дискретной оптимизации с конечным множеством допустимых решений $\mathcal{I}$ и целевой функцией $f : \mathcal{I} \to R$. Для определенности будем считать, что требуется найти минимум фунции f на множестве $\mathcal{I}$. Для каждого $x \in \mathcal{I}$ определим функцию окрестности $N : \mathcal{I} \to 2^{\mathcal{I}}$, которая для каждого допустимого решения задает множество *соседних* решений, в некотором смысле близких к данному. Множество $N(x)$ будем называть окрестностью решения x в множестве $\mathcal{I}$. Функция окрестности может быть достаточно сложной и отношение соседства не всегда симметрично. Функцию окрестности будем называть точной, если любой локальный минимум относительно этой окрестности является глобальным.

Задача L поиска локального оптимума задается множеством ее индивидуальных примеров, каждый из которых однозначно определяет целевую функцию, функцию окрестности и множество допустимых решений.

Определение 1. Задача L принадлежит к классу PLS (polynomial-time local search), если за полиномиальное время от длины записи исходных данных можно выполнить следующие три операции:

1. Для произвольного примера l проверить принадлежность l к L, и если $l \in L$, то найти допустимое решение x_0 задачи l.
2. Для любого решения x проверить его допустимость и вычислить для него значение целевой функции.
3. Узнать, является ли данное допустимое решение x локальным оптимумом для l, и если нет, то найти в окрестности решение с лучшим значением целевой функции.

В классе PLS содержатся задачи, для которых проверка локальной оптимальности может быть осуществлена за полиномиальное время. В этом классе есть полиномиально разрешимые задачи, т.е. задачи, в которых за полиномиальное время можно найти локальный оптимум. Многие *невзвешенные* задачи относятся к таковым: задачи о клике, о покрытии, о независимом множестве с любой полиномиальной по мощности окрестностью и др. Однако в общем случае вопрос о полиномиальной разрешимости остается открытым. Надежду на его положительное решение дает следующее утверждение.

Теорема 1 [1]. *Если задача L поиска локального оптимума принадлежит классу PLS и является NP-трудной, то NP=co-NP.*

Определение 2. Пусть L_1 и L_2 — две задачи локального поиска. PLS-сведение задачи L_1 к задаче L_2 состоит в построении двух полиномиально вычислимых функций h и g таких, что

1. h переводит индивидуальную задачу $l \in L_1$ в индивидуальную задачу $h(l) \in L_2$;
2. g переводит пару (решение задачи $h(l), l$) в решение задачи l;
3. если $l \in L_1$ и x — локальный оптимум для $h(l) \in L_2$, то $g(x, l)$ — локальный оптимум для задачи l.

Если такие функции h и g удается построить, то говорят, что задача L_1 PLS-сводится к задаче L_2. Задачу $L \in$ PLS называют PLS-полной, если любая задача в

PLS может быть PLS-сведена к ней. Другими словами, PLS-полные задачи являются наиболее трудными в этом классе, и если хотя бы одна из них может быть решена за полиномиальное время, то и остальные задачи могут быть решены за полиномиальное время. PLS-полнота установлена для следующих задач [1].

- Задача о максимальном разрезе. Задан взвешенный неориентированный граф $G = (V, E)$, $w_e \geq 0, e \in E$. Допустимым решением является любое разбиение вершин на две части. Целевая функция — суммарный вес ребер, соединяющих две части разбиения. Окрестность $Flip$ содержит в себе все решения, полученные из данного переносом вершины из одной части разбиения в другую.

- Задача о выполнимости на максимум с окрестностью $Flip$ в двух постановках.
1. Задана булева функция в конъюнктивной нормальной форме. Каждая конъюнкция имеет неотрицательный вес и содержит не более двух переменных или их отрицаний. Требуется найти значения переменных, при которых суммарный вес выполненных конъюнкций максимален.
2. Заданы наборы, состоящие не более чем из трех литералов. Литерал есть булева переменная без отрицания или константа 0, 1. Набор принимает значение "истина", если не все значения его литералов совпадают. Каждому набору приписан неотрицательный вес. Требуется найти значение булевых переменных, при которых суммарный вес выполненных наборов максимален.

- Задача о разбиении графа на две равные части с окрестностями *1-замена*, Лина-Кернигхана и их модификациями.

Для этих задач установлено, что в худшем случае стандартный алгоритм локального спуска требует экспоненциального числа шагов при любом выборе направления спуска. Таким образом, если локальный оптимум может быть найден с полиномиальной трудоемкостью, то какими-то другими методами. Есть надежда, что в среднем число шагов алгоритма локального спуска будет полиномиальным [1,11]. Для задачи о p-медиане и простейшей задачи размещения численные эксперименты показывают линейный рост числа шагов, что дает основание для следующей гипотезы.

Гипотеза. Для PLS-полных задач в среднем число шагов стандартного алгоритма локального спуска растет полиномиально с ростом размерности задачи.

Приведем еще два результата о точной окрестности [1]. Пусть оптимизационная задача P и функция окрестности N таковы, что соответствующая задача поиска локального минимума лежит в классе PLS. Обозначим через DP задачу распознавания, в которой для произвольного числа v требуется определить, существует ли в задаче P решение со значением целевой функции не более v. Тогда справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Если задача DP является NP-трудной, то функция окрестности N не может быть точной, если NP$\neq$ co-NP.*

Теорема 3. *Если задача DP является NP-трудной в сильном смысле, то функция окрестности N не может быть точной, если P$\neq$ NP.*

2. Адаптивные окрестности

При выборе окрестности хочется иметь множество $N(x)$ как можно меньшей мощности, чтобы сократить трудоемкость одного шага. С другой стороны, более широкая окрестность, вообще говоря, приводит к лучшему локальному оптимуму. Приходится искать оптимальный баланс между этими противоречивыми факторами. Один из путей разрешения этого противоречия состоит в разработке сложных окрестностей, размер которых можно варьировать в ходе локального поиска.

Приведем один из удачных примеров такой окрестности для задачи о разбиении графа на две равные части. Задан граф $G = (V, E)$ с четным числом вершин $|V| = 2n$, и неотрицательными весами на ребрах $w_e \geq 0, e \in E$. Требуется найти разбиение множества V на две равные части V_1, V_2 с минимальной суммой весов ребер, соединяющих их. Для $a \in V_1$ и $b \in V_2$ обозначим через $g(a, b)$ изменение целевой функции при замене a на b:

$$g(a,b) = \sum_{\substack{(a,v)\in E \\ v\in V_2\setminus\{b\}}} w(a,v) - \sum_{\substack{(a,u)\in E \\ u\in V_1}} w(a,u) + \sum_{\substack{(b,u)\in E \\ u\in V_1\setminus\{a\}}} w(b,u) - \sum_{\substack{(b,v)\in E \\ v\in V_2}} w(b,v).$$

Окрестность *1-замена* включает в себя n^2 разбиений по всем парным заменам. Более широкая окрестность *k-замена* определяется аналогично для всех k-парных замен. Понятно, что поиск в окрестности "k-замена"для больших k хотя и полиномиален, но вряд ли оправдан с вычислительной точки зрения. Окрестность Лина-Кернигхана включает в себя k разбиений, $k \leq n$. Она определяется следующей последовательностью шагов.

Шаг 1. Найти пару $(a, b), a \in V_1, b \in V_2$ с максимальным значением $g(a, b)$.
Шаг 2. Временно поменять местами a и b.
Шаг 3. Повторять k раз шаги 1, 2, не трогая пары вершин, уже использованные на предыдущих шагах.

Полученная последовательность $\{(a^\tau, b^\tau)\}_{\tau \leq k}$ определяет k соседних решений для разбиения (V_1, V_2). Изменение целевой функции для соседа τ задается равенством

$$G_\tau = \sum_{i=1}^{\tau} g(a^\tau, b^\tau).$$

При $\tau = n$ множество V_1 перейдет в V_2 и $G_n = 0$.

Окрестность Лина-Кернигхана является частью окрестности *k-замена*. Ее основная идея состоит в том, чтобы не просматривать всю окрестность *k-замена*, а с помощью жадной процедуры постараться найти в ней наилучшую последовательность парных замен. Эта идея может быть использована для многих комбинаторных задач, включая задачи размещения, коммивояжера и др [2]. Ее развитие можно найти в [9].

3. Метаэвристики

Идеи локального поиска получили свое дальнейшее развитие в так называемых метаэвристиках [8]. К ним относятся: поиск с запретами [1,4,9], генетические алгоритмы

[1,5,9], имитация отжига [1,7,9], муравьиные колонии [9,10], поиск с чередующимися окрестностями [9,10] и др. Эти общие схемы применимы к решению комбинаторных задач в самой общей постановке. Они основываются на разных идеях, но неявно опираются на следующий тезис.

В среднем локальные оптимумы значительно ближе к глобальному оптимуму, чем случайно выбранная точка. Распределение локальных оптимумов не является равномерным. Существует определенная концентрация локальных оптимумов в малой части допустимой области, которую образно называют горным массивом для задач на максимум или большой долиной для задач на минимум.

Тезис о *большой долине* объясняет причину высокой продуктивности метаэвристик, помогает понять разрыв между теоретическими оценками худшего случая и экспериментальными исследованиями, дает вдохновение для разработки новых методов и гибридных схем. Он лежит в основе разных стратегий интенсификации поиска, операторов скрещивания, эволюционных стратегий и т.п. Кроме того, он подсказывает способ построения сложных примеров для метаэвристик. Для того, чтобы получить трудный класс тестовых примеров достаточно так подобрать исходные данные, чтобы локальных оптимумов было много, и они концентрировались в нескольких удаленных друг от друга местах. Если при этом переход от одного скопления к другому связан с преодолением больших значений целевой функции, то получить в такой задаче *хорошее* решение с помощью метаэвристик будет достаточно сложно. Один из таких примеров для многостадийной задачи размещения можно найти в [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. E. H. L. Aarts et al. (Eds.) *Local Search in Combinatorial Optimization.* Chichester: Wiley, 1997.
2. R. K. Ahuja, O. E. James, B. Orlin, A. P. Punnen, A survey of very large-scale neighborhood search techniques // Discrete Appl. Math., – 2002. – V.123, P.75–102.
3. G. Caporossi, P. Hansen, Variable neighborhood search for extremal graphs: 1 The AutoGraphiX system // Discrete Math. 2000. V. 212, N 1–2. P. 29–44.
4. F. Glover, M. Laguna, *Tabu Search.* Boston: Kluwer Acad. Publ. 1997.
5. D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning.* Reading, MA: Addison-Wesley. 1989.
6. D. S. Johnson, Local optimization and the traveling salesman problem // Automata, Languages, and Programming. Berlin: Springer Verlag, 1990. (Lecture Notes in Computer Science, V. 443) P. 446–461.
7. D. S. Johnson, C. R. Aragon, L. A. McGeoch, C. Schevon, Optimization by simulated annealing: an experimental evaluation; part I, graph partitioning // Oper. Res. 1989. V. 37, N 6. P. 865–892.
8. I. H. Osman, G. Laporte, Metaheuristics: a bibliography // Ann. Oper. Res. 1996. V. 63, P. 513–628.
9. C. J. Ribeiro, P. Hansen, (Eds.) *Essays and Surveys in Metaheuristics.* Kluwer Akademic Publishers, 2002.
10. S. Voss and al.(Eds.) Metaheuristics, Advances and Trends in Local Search Paradigms for Optimization, 1999, Kluwer, Dordrecht.
11. C. Tovey, Hill climbing with multiple local optima // SIAM J. Alg. Disc. Meth. 1985. V. 6, N 3, P. 384–393.
12. http://www.math.nsc.ru/AP/benchmarks/