Двухуровневые задачи размещения *

Ю. А. Кочетов †

1 Введение

Задачи размещения составляют широкий пласт математических моделей исследования операций, интересный как с практической точки зрения, так и с точки зрения теории комбинаторной оптимизации. Своими корнями это направление уходит к П. Ферма (1601-1665) и Е. Торричелли (1608-1647) [6], но как самостоятельное направление оно сформировалось в 70-80 годы прошлого столетия. На сегодняшний день имеется ряд монографий в этой области [1, 2, 5, 7, 10]. Ежегодно проводятся специализированные конференции, организуемые европейской рабочей группой EWGLA (http://www.vub.ac.be/EWGLA/) и американской рабочей группой SOLA (http://www.ent.ohiou.edu/~thale/sola/sola.html).

В СССР пионерами этого направления были В. Черенин, В. Хачатуров, В. Трубин, С. Лебедев, а в Сибирском отделении Академии наук В. Береснев, Э. Гимади, В. Дементьев. Столь большой интерес к данной проблематике связан в первую очередь с приложениями, которые возникают не только при размещении предприятий, складов и магазинов, но и при планировании метро, размещении узлов сетей связи, станций обслуживания и др. Многочисленные приложения возникают, в частности, при решении задач унификации и стандартизации, когда выбирается состав системы технических средств, предназначенных для выполнения заданного списка работ [1]. В качестве целевой функции используются либо величина суммарных затрат на создание и функционирование системы технических средств, либо суммарная эффективность системы (объем выполняемых работ).

2 Простейшая задача размещения

В подавляющем большинстве рассматриваемых моделей авторы исходят из предположения, что имеется одно лицо, принимающее решение (ЛПР), например, руководитель фирмы, размещающий свои предприятия. Для заданного множества клиентов $J = \{1, \ldots, n\}$ он знает производственно–транспортные расходы $c_{ij} \geq 0$, связанные с производством и доставкой

*Работа поддержана грантами РФФИ 04–07–90096, 06–01–00075.

†Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383)333-20-86, jkochet@math.nsc.ru

продукции j-му клиенту из i-го пункта производства, если оно будет там открыто. Множество возможных пунктов производства $I = \{1, \ldots, m\}$ предполагается конечным, и для каждого пункта $i \in I$ известна стоимость $f_i \geq 0$ открытия предприятия в этом пункте. Задача состоит в выборе подмножества $S \subseteq I$ пунктов размещения производства, которое позволяет обслужить всех клиентов с минимальными суммарными затратами, т.е. найти

$$\min_{S \subseteq I} \Big\{ \sum_{i \in S} f_i + \sum_{j \in J} \min_{i \in S} c_{ij} \Big\}.$$

Первое слагаемое в целевой функции задает затраты на открытие предприятий, второе слагаемое определяет производственно–транспортные расходы. Снабжение клиентов производится из предприятий, которые обеспечивают минимальные производственно–транспортные расходы.

Сформулированная задача известна в литературе как простейшая задача размещения производства. Она является NP–трудной в сильном смысле даже в случае, когда матрица (c_{ij}) удовлетворяет неравенству треугольника [9]. Для построения приближенных алгоритмов эта задача также является сложной. Так как задача о покрытии является частным случаем простейшей задачи размещения [1], то существование полиномиального приближенного алгоритма с относительной погрешностью не более некоторой константы влечет (при сколь угодно большой константе) совпадение классов P и NP. Для частного случая, когда матрица (c_{ij}) удовлетворяет неравенству треугольника, лучший на сегодняшний день приближенный полиномиальный алгоритм имеет оценку относительной погрешности 0.52, но и в этом случае существование приближенного полиномиального алгоритма с оценкой меньше 0.463 влечет P=NP. Если же предприятия и клиенты задаются точками в k-мерном евклидовом пространстве, а матрица c_{ij} определяет расстояния между ними, то для любого $\varepsilon > 0$ существует приближенный алгоритм с относительной погрешностью не более ε и трудоемкостью, полиномиально зависящей от n и m и экспоненциально зависящей от k и $1/\varepsilon$. Кроме того, существует тесная связь между простейшей задачей размещения и задачей минимизации псевдо-булевых функций [1]. Таким образом, сформулированная задача является интересным математическим объектом и разработка методов ее решения безусловно представляет как теоретический так и практический интерес. Обзор результатов в данной области можно найти, например, в [1, 2, 9, 10].

3 Задачи с предпочтениями клиентов

Как уже отмечалось выше при построении математической модели предполагалось, что имеется одно лицо принимающее решения. Такое предположение естественно при централизованном планировании. В рыночных условиях клиент имеет возможность сам выбирать поставщика продукции, исходя из собственных предпочтений. В этом случае математическая модель может быть представлена как игра двух лиц: ЛПР1 — руководитель фирмы, ЛПР2 — лицо, представляющие интересы клиентов. В этой игре сначала ЛПР1 выбирает подмножество предприятий, затем ЛПР2 выбирает поставщиков для каждого клиента. Игроки неравноправны. Сначала делает ход ЛПР1. Затем, зная это решение, делает ход ЛПР2. Такие игры известны под названием игр Штакельберга [4].

Пусть матрица (d_{ij}) задает предпочтения клиентов на множестве предприятий. Если $d_{i_1 j} < d_{i_2 j}, i_1 \neq i_2$, то j-й клиент предпочитает предприятие i_1. Для упрощения модели будем предполагать, что в каждом столбце матрицы d_{ij} все элементы различные. В противном случае придется рассматривать оптимистические и пессимистические стратегии и вводить понятия кооперативной и некооперативной игры [3]. Итак, цель ЛПР1 по прежнему состоит в выборе подмножества $S \subseteq I$, которое позволяет обслужить всех клиентов с минимальными суммарными затратами, но теперь ЛПР1 вынужден учитывать решение ЛПР2 по выбору поставщиков. Введем две группы переменных:

ЛПР1:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в пункте } i \text{ открывается предприятие,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

ЛПР2:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если клиент } j \text{ снабжается из предприятия } i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теперь математическая модель может быть представлена в виде следующей задачи двухуровневого программирования [1, 3, 8]. Найти

$$\min_{x_i} \Big\{ \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} c_{ij} x^*_{ij}(x_i) \Big\}$$

при условиях

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I,$$

где $x^*_{ij}(x_i)$ — оптимальное решение задачи ЛПР2:

$$\min_{x_{ij}} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} d_{ij} x_{ij}$$

при условиях

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \qquad j \in J;$$

$$x_{ij} \leq x_i, \qquad i \in I, j \in J;$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J.$$

В этой задаче целевая функция по прежнему задает суммарные затраты ЛПР1 на открытие предприятий и обслуживание клиентов. Отличие состоит в том, что теперь множество допустимых решений задается как требованием целочисленности переменных $x_i, i \in I$ (что соответствует условию

$S \subseteq I$), так и вспомогательной оптимизационной задачей (задача ЛПР2). При решении этой задачи вектор x_i считается известным.

Существуют различные способы сведения данной двухуровневой задачи к задаче целочисленного линейного программирования [3, 8]. Известно, что поиск оптимального решения сводится к минимизации псевдо-булевой функции общего вида или выбору оптимального набора строк пары матриц [3]. В отличие от простейшей задачи размещения, двухуровневая задача остается NP–трудной в сильном смысле даже при $f_i = 0, i \in I$. Известны ее полиномиально разрешимые случаи [3], а при условии $c_{ij} = d_{ij}, i \in I, j \in J$ двухуровневая задача совпадает с простейшей задачей размещения.

4 Антагонистические размещения

Рассмотрим теперь ситуацию, когда две фирмы последовательно принимают решения о размещении предприятий. Сначала на рынок выходит первая фирма и открывает свое подмножество предприятий $S_1 \subseteq I$. Затем, зная это решение, вторая фирма открывает собственные предприятия, подмножество $S_2 \subset I, S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. Каждый клиент выбирает из множества открытых предприятий $S_1 \cup S_2$ одно предприятие, согласно собственным предпочтениям. Если обслуживание j-го клиента приносит доход $g_j > 0$, первая фирма открывает p^1 предприятий, а вторая — p^2 предприятий, то в зависимости от размещения этих предприятий рынок (множество клиентов) будет как-то разделен между двумя фирмами. Каждая фирма будет стремиться максимизировать свою долю рынка. Получаем игру двух лиц с противоположными интересами. Снова игроки неравноправны. Сначала делает ход первый игрок. Он может размещать предприятия в любом месте и это дает ему преимущество. Затем делает ход второй игрок, уже зная ход первого игрока. Опять получаем игру Штакельберга, в которой требуется максимизировать долю рынка (суммарный доход) первого игрока. Введем переменные задачи:

ЛПР1:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если ЛПР1 в пункте } i \text{ открывает предприятие,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

ЛПР2:

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{если ЛПР2 в пункте } i \text{ открывает предприятие,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается из предприятия ЛПР1,} \\ 0, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается из предприятия ЛПР2.} \end{cases}$$

При заданном векторе $x_i \in \{0, 1\}, i \in I$ определим множество

$$I_j(x) = \{i \in I |\, d_{ij} < \min_{k \in I}(d_{kj} |\, x_k = 1)\}, \quad j \in J.$$

Это множество задает пункты размещения предприятий, позволяющие ЛПР2 *захватить* j-го клиента. С использованием введенных переменных соответствующая задача двухуровневого программирования записывается следующим образом. Найти

$$\max_{x_i} \sum_{j \in J} g_j y_j^*(x_i)$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I} x_i = p^1;$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I,$$

где $y_j^*(x_i)$ — оптимальное решение задачи ЛПР2:

$$\max_{y_j, z_i} \sum_{j \in J} g_j (1 - y_j)$$

при ограничениях

$$1 - y_j \le z_i, \quad i \in I_j(x), j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} z_i = p^2;$$

$$z_i + x_i \le 1, \quad i \in I;$$

$$z_i, y_j \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J.$$

Целевая функция задачи задает суммарный доход ЛПР1. Множество допустимых решений описывается с помощью вспомогательной оптимизационной задачи. При решении задачи ЛПР2, вектор $x_i, i \in I$ и множества $I_j(x), j \in J$ считаются известными. На сегодняшний день эффективные методы решения данной задачи неизвестны. Первые шаги в этом направлении сделаны в [12], где предлагается схема неявного перебора. В [11] исследуется частный случай задачи, когда ЛПР2 размещает только одно предприятие.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда оба ЛПР наряду с доходами (g_j) учитывают и расходы на открытие предприятий (f_i), производство продукции и доставку ее потребителям (c_{ij}). В этом случае получаем следующую модель двухуровневого программирования. Найти

$$\max_{x_i, x_{ij}} \Big\{ \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} (g_j - c_{ij}^1) x_{ij} - \sum_{i \in I} f_i^1 x_i \Big\}$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I} x_i = p^1;$$

$$x_{ij} \le x_i, \quad i \in I, j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = y_j^*(x_i), \quad j \in J;$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J,$$

где $y_j^*(x_i)$ — оптимальное решение задачи ЛПР2:

$$\max_{y_j, z_i, z_{ij}} \left\{ \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} (g_j - c_{ij}^2) z_{ij} - \sum_{i \in I} f_i^2 z_i \right\}$$

при ограничениях

$$1 - y_j \leq z_i, \quad i \in I_j(x_i), j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} z_i = p^2;$$

$$z_{ij} \leq z_i, \quad i \in I, j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} z_{ij} = 1 - y_j, \quad j \in J;$$

$$z_i + x_i \leq 1, \quad i \in I;$$

$$y_j, z_i, z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J.$$

В этой модели переменные x_{ij} и z_{ij} задают распределение клиентов по предприятиям ЛПР1 и ЛПР2 соответственно. Заметим, что клиенты выбирают предприятия, согласно собственным предпочтениям, но ЛПР, получив заказ, может поставлять продукцию клиенту из любого открытого им предприятия. Если же ЛПР лишен такой возможности, то следует рассматривать трехуровневые модели, которые уже выходят за рамки нашей темы. Изучение двухуровневых задач размещения представляется интересным и перспективным.

Список литературы

[1] Береснев В. Л. Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. – Новосибирск. Изд-во Инст. математики. – 2005.

[2] Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т. Экстремальные задачи стандартизации. – Новосибирск: Наука. – 1978.

[3] Горбачевская Л. Е. Полиномиально разрешимые и NP-трудные задачи стандартизации. Канд. дисс. Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН. – Новосибирск. – 1998.

[4] Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир. – 1985.

[5] Drezner Z. (Ed.) Facility Location. A Survey of Applications and Methods Springer. – 1995.

[6] Drezner Z., Klamroth K., Schobel A., Wesolowsky G. The Weber Problem. In: Z. Drezner, H. Hamacher (Eds.) Facility Location. Applications and Theory. Springer. – 2004.

[7] Eiselt H. A., Sandblom C. -L. Decision Analysis, Location Models, and Scheduling Problems. Springer. – 2004.

[8] Hansen P., Kochetov Yu., Mladenovic N. Lower bounds for the uncapacitated facility // Proceedings of Discrete Optimization Methods in Production and Logistics (DOM'2004) 2^{nd} International Workshop, Omsk. – 2004. – P. 50–55.

[9] Korte B., Vygen J. Combinatorial Optimization. Theory and Algorithms. Third Edition, Springer. – 2005.

[10] Mirchandani P. B., Francis R. L.(Eds.) Discrete Location Theory. Wiley. – 1990.

[11] Plastria F., Vanhaverbeke L. Discrete models for competitive location with foresight // Computers and Operations Research. – 2006. (to appear).

[12] Rodriguez C. M. C., Perez J. A. M. Multiple voting location problems // European J. Oper. Res. – 2006. (to appear).