ЛОКАЛЬНЫЙ ПОИСК ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ

Ю.А. Кочетов

При решении дискретных задач размещения производства, как впрочем и для многих других комбинаторных задач, методы локального поиска показывают высокую эффективность [8, 12]. Поиск с чередующимися окрестностями [2], разновидности генетических алгоритмов [11, 12], GRASP–стратегии [8, 12] и др. концентрируют наше внимание на локальных оптимумах относительно полиномиально проверяемых окрестностей. Высокая эффективность этих методов подталкивает к мысли о том, что локальные оптимумы являются важным объектом исследования. Их свойства могут позволить нам лучше понять природу NP-трудных задач, по новому взглянуть на старые задачи и, быть может, разработать новые более эффективные методы решения практических задач. В настоящем докладе будет приведено три фундаментальных факта касающихся свойств локальных оптимумов:

- существование так называемых PLS-полных задач, то есть самых трудных задач в данном классе, аналога класса NP-полных задач для локального поиска;
- наличие вполне полиномиальной локальной ε–оптимизационной схемы для нахождения локальных оптимумов любой задачи 0–1 линейного программирования из класса PLS;
- тесная связь между классом APX [7] и задачами локального поиска, в которых каждый локальный оптимум отличается по целевой функции не более чем в k раз (k — константа) от оптимального решения.

Цель настоящего доклада состоит в том, чтобы привлечь внимание к этому интересному объекту — множеству локальных оптимумов, представить уже известные результаты и наметить пути дальнейших исследований.

1. Класс PLS и PLS-полные задачи

Задачу дискретной оптимизации принято задавать четверкой $P = (I_P, Sol_P, f_P, goal)$, где I_P — множество исходных данных задачи; для конкретного примера $x \in I_P$ множество $Sol_P(x)$ задает все допустимые решения задачи, целевая функция $f_P(s, x)$ является полиномиально вычислимой от длины входа x и определяет отображение из $Sol_P(x)$ в множество рациональных чисел и, наконец, $goal \in \{\min, \max\}$ указывает на класс задач минимизации или максимизации. Далее без ограничения общности будем рассматривать только задачи на минимум. Для каждого $x \in I_P$ определим функцию окрестности $N : Sol_P \to 2^{Sol_P}$. Эта функция задает множество соседних решений для каждого допустимого решения $s \in Sol_P(x)$. Множество $N(s)$ называют окрестностью решения s в множестве $Sol_P(x)$. Задача локального поиска $L = (P, N)$ состоит в нахождении локального минимума, то есть решения $s \in Sol_P(x)$ такого, что $f_P(s, x) \le f_P(s', x)$ для всех $s' \in N(s)$. В дальнейшем будем рассматривать только такие задачи локального поиска, для которых существует такой полином q, что для любого $x \in I_P$ длина каждого допустимого решения $s \in Sol_P(x)$ ограничена сверху значением полинома q от длины записи исходных данных, то есть $|s| \leq q(|x|)$.

Определение 1 [16]. Задача $L = (P, N)$ принадлежит классу PLS, если существует три полиномиальных алгоритма A, B и C таких, что:

1. Алгоритм A определяет для любого слова x является ли оно входом задачи. Если $x \in I_P$, то алгоритм находит допустимое решение задачи P.
2. Алгоритм B определяет для любого входа $x \in I_P$ и любого слова s является ли s допустимым решением. Если $s \in Sol_P(x)$, то алгоритм за полиномиальное время находит значение целевой функции $f_P(s, x)$.
3. Алгоритм C определяет для любого входа $x \in I$ и любого решения $s \in Sol_P(x)$ является ли s локальным оптимумом. Если нет, то алгоритм находит соседа $s' \in N(s)$ с меньшим значением целевой функции.

Класс PLS содержит задачи, в которых проверка локальной оптимальности может осуществляться за полиномиальное время. В этом классе есть полиномиально разрешимые задачи, например, задача линейного программирования. Для нее можно найти глобальный оптимум за полиномиальное время, а глобальный оптимум является и локальным для любой полиномиально проверяемой окрестности. Простейшая задача размещения, задача о p-медиане и многие другие задачи размещения с полиномиально проверяемыми окрестностями принадлежат классу PLS.

Определение 2 [16]. Задача L_1 *PLS — сводится* к задаче L_2, если существуют две полиномиально вычислимые функции h и g такие, что:

1. Функция h по произвольному входу x задачи L_1 выдаёт некоторый вход $h(x)$ задачи L_2.
2. Функция g по произвольному решению s входа $h(x)$ вычисляет некоторое решение $g(s, x)$ для входа x.
3. Для любого входа x задачи L_1, если s — локальный оптимум для входа $h(x)$, то $g(s, x)$ — некоторый локальный оптимум для входа x.

Задачу L из класса PLS называют PLS-полной [3, 16], если все задачи из этого класса сводятся к L. PLS-полные задачи — это самые трудные задачи в данном классе. Из полиномиальной разрешимости одной из них следует полиномиальная разрешимость всех задач из этого класса. Первая PLS-полная задача была найдена Д. Джонсоном, К. Пападимитриу и М. Янакакисом [16]. Простейшая задача размещения производства, задача о p-медиане с рядом окрестностей являются PLS-полными [3, 10]. Более того, установлено, что стандартный алгоритм локального спуска в худшем случае может требовать экспоненциального числа шагов для достижения локального оптимума. Тем не менее, многочисленные экспериментальные исследования показывают, что в среднем алгоритмы локального спуска быстро находят локальные оптимумы [11,8]. Получены полиномиальные оценки для математического ожидания числа шагов локального спуска на гиперкубе для случайных функций и "естественных" полиномиально ограниченных окрестностей [15]. Тем не менее, для дискретных задач размещения аналогичные оценки в среднем хотя и кажутся правдоподобными, но до сих пор не установлены.

2. Приближенные локальные оптимумы

Для $x \in I_P$ допустимое решение s называют ε– локальным минимумом, если $f_P(s, x) \leq (1+\varepsilon) f_P(s', x)$ для всех $s' \in N(s)$. Семейство алгоритмов $(A_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ для задачи $L \in$ PLS называют локальной ε–оптимизационной схемой, если алгоритм A_ε позволяет находить ε–локальный минимум. Семейство $(A_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ называют вполне полиномиальной локальной ε–оптимизационной схемой, если время работы алгоритма A_ε ограничено полиномом от длины записи исходных данных и $1/\varepsilon$.

Теорема 1 [13]. Для каждой задачи 0–1 линейного программирования из класса PLS существует вполне полиномиальная локальная ε–оптимизационная схема.

Таким образом, с точки зрения аппроксимации при поиске локальных оптимумов нет такого расслоения задач по классам как при поиске глобального оптимума. Например, для простейшей задачи размещения нахождение приближенного решения s с константной точностью $f(s, x) \leq k f(s', x)$ для всех $s' \in Sol_p(x)$, влечет P=NP. Если же матрица транспортных затрат удовлетворяет неравенству треугольника, то такая константа существует, но она не может опуститься ниже порога 1.463, если P $\neq$ NP [9, 14]. Существование PTAS установлено только для частного случая, когда предприятия и потребители расположены на плоскости и матрица транспортных затрат соответствует Евклидовым расстояниям между ними [5]. Если же мы ищем локальный оптимум, то аналог FPTAS всегда существует [4].

Теорема 2 [13]. Если для задачи $L \in$ PLS с линейной целевой функцией $f_P(s, x)$ существует $\varepsilon > 0$ и полиномиальный алгоритм нахождения допустимого решения s_ε такого, что $f_P(s, x) \leq f_P(s', x) + \varepsilon$ для всех $s' \in N(s_\varepsilon)$, то все задачи из класса PLS полиномиально разрешимы.

Другими словами задачи поиска приближенных локальных оптимумов с относительной и абсолютной погрешностью также сильно отличаются друг от друга как и соответствующие задачи аппроксимации глобального оптимума [1].

В завершении этой темы приведем еще один факт, который свидетельствует о трудности построения локальных ε–оптимизационных схем с полиномиальной трудоемкостью от $|x|$ и $\log(1/\varepsilon)$. В некотором смысле нижеследующая теорема показывает неулучшаемость утверждения теоремы 1.

Теорема 3 [13]. Если для задачи $L \in$ PLS с линейной целевой функцией $f_P(s, x)$ существует локальная ε–оптимизационная схема, время работы которой ограничено полиномом от длины записи исходных данных и величины $\log(1/\varepsilon)$, то все задачи из класса PLS полиномиально разрешимы.

3. Класс GLO

Оптимизационную задачу P называют полиномиально ограниченной, если существует такой полином r, что для любых $x \in I_P$ и $s \in Sol_P(x)$ значение целевой функции $f_P(s, x)$ ограничено сверху полиномом r от длины записи исходных данных, то есть $f_P(s, x) \leq r(|x|)$. Такие задачи обладают тем свойством, что для любой полиномиально проверяемой окрестности и любого правила выбора направления спуска стандартный алгоритм локального улучшения является полиномиальным. Для таких задач выделяют класс задач локального поиска, обладающих следующим свойством: для задачи $L = (P, N)$ из класса PLS существует такая константа $\varepsilon > 0$, что каждый локальный оптимум имеет относительную погрешность не более ε. Класс этих задач называют GLO (Guaranteed Local Optima). Этот класс не пуст. В нем, например, содержится задача коммивояжера, у которой веса ребер принимают значения 1 или 2. Задача выполнимости на максимум, задача о максимальном разрезе с единичными весами также принадлежат этому классу. Определим замыкание класса GLO с помощью сведения, сохраняющего аппроксимируемость. Пусть $(0, 1)_Q$ — множество рациональных чисел из отрезка $(0, 1)$.

Определение 3 [6, 7]. Оптимизационная задача P_1 PTAS-сводится к оптимизационной задаче P_2 ($P_1 \leq_{PTAS} P_2$), если существуют три функции φ, ψ и μ такие, что:

1. Для любого $x \in I_{P_1}$ и любого $\varepsilon \in (0, 1)_Q$ функция $\varphi(x, \varepsilon)$ вычислима за полиномиальное время от $|x|$ и $\varphi(x, \varepsilon) \in I_{P_2}$.

2. Для любых $x \in I_{P_1}$, $s \in Sol_{P_2}(\varphi(x, \varepsilon))$ и любого $\varepsilon \in (0, 1)_Q$ функция $\psi(x, s, \varepsilon)$ вычислима за полиномиальное время от $|x|, |s|$ и $\psi(x, s, \varepsilon) \in Sol_{P_1}$.

3. Функция $\mu : (0, 1)_Q \to (0, 1)_Q$ вычислима и сюрьективна.

4. Для любых $x \in I_{P_1}, \varepsilon \in (0, 1)_Q$ и $s \in Sol_{P_2}(\varphi(x, \varepsilon))$ из ограниченности относительной погрешности в задаче P_2

$$(f_{P_2}(\varphi(x, \varepsilon), s) - Opt_{P_2})/f_{P_2}(\varphi(x, \varepsilon), s) \leq \mu(\varepsilon)$$

   следует аналогичное неравенство для задачи P_1

$$(f_{P_1}(x, \psi(x, s, \varepsilon)) - Opt_{P_1})/f_{P_1}(x, \psi(x, s, \varepsilon)) \leq \varepsilon.$$

Это сведение обладает следующими свойствами. Если $P_1 \leq_{PTAS} P_2$ и $P_2 \in$ APX ($P_2 \in$ PTAS), то $P_1 \in$ APX ($P_1 \in$ PTAS). Кроме того, данное сведение рефлексивно и транзитивно. Его можно использовать для определения замыкания класса GLO. Задача P_1 принадлежит замыканию класса GLO ($\overline{\text{GLO}}$), если существует задача $P_2 \in$ GLO такая, что $P_1 \leq_{PTAS} P_2$.

Теорема 4 [6]. $\overline{\text{GLO}} =$ APX.

Таким образом, класс GLO дает новую комбинаторную характеризацию класса APX, одного из важнейших классов NP-трудных задач. Для любой задачи P из класса APX, найдется задача из класса GLO, к которой задача P сводится с сохранением свойства аппроксимируемости. Другими словами, аппроксимируемость локальных оптимумов является ключевым понятием в теории аппроксимации NP-трудных задач.

Работа поддержана грантами РФФИ 04-07-90096 и 06-01-00075.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. –М.: Мир, 1982.
2. Кочетов Ю., Младенович Н., Хансен П. Локальный поиск с чередующимися окрестностями // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. – 2003. – Т. 10, № 1. – С. 11–43.
3. Кочетов Ю.А., Пащенко М.Г., Плясунов А.В. О сложности локального поиска в задаче о p-медиане // Дискрет. анализ и исслед. операций Сер. 2. – 2005. – Т. 12, № 2. – С. 44–71.
4. Плясунов А.В. Приближенный локальный поиск в задаче о p-медиане // Труды XIII Байкальской международной школы–семинара "Методы оптимизации и их приложения" – 2005. – Т. 1. – С. 557–562.
5. Arora S., Raghavan P., Rao S. Approximation schemes for Euclidean k-medians and related problem // Proceedings of 30th Annual ACM Simposium on Theory of Computing. – 1998. – P. 106–113.
6. Ausiello G., Protasi M. Local search, reducibility and approximability of NP-optimization problem // Information Processing Letters – 1995. – Vol. 54. – P. 73–79.
7. Ausiello G. and et. Complexity and approximation. Combinatorial optimization problems and their approximability properties. Springer, 1999.
8. Dréo J., Pétrovski A., Siarry P., Taillard E. Metaheuristics for hard optimization. Methods and case studies. – Springer, 2006.
9. Guha S., Khuller S. Greedy strikes back: improved facility location algorithms // Journal of Algorithms. – 1999.– Vol. 31. – P. 228–248.
10. Kochetov Yu., Ivanenko D. Computationally difficult instances for the uncapacitated facility location problem // Ibaraki T. et al. (eds.) Metaheuristics: progress as real solvers. – Springer, 2005. – P. 351–367.
11. Merz P. Memetic algorithms for combinatorial optimization problems: Fitness landscape and effective search strategies – XII, 207 S.: Ill., graph. Darst. - Siegen, Univ., Diss. – 2000. – http://www.ub.uni-siegen.de/epub/diss/merz.htm
12. Mladenovic N., Brimberg J., Hansen P. Moreno-Perez J. The p-median problem: A survey of metaheuristic approaches // European Journal of Operational Res. (to appear).
13. Orlin J.B., Punnen A.P., Schulz A.S. Approximate local search in combinatorial optimization // SIAM J. Comput. – 2004. V. 33, N 5. – P. 1201–1214.
14. Sviridenko M. An improved approximation algorithm for the metric uncapacitated facility location problem // Proceeding of the 10th International IPCO Conference. – Berlin: Springer, 2002. – P. 240–257.
15. Tovey C. Local improvement on discrete structures // E. Aarts and J. K. Lenstra (eds.) Local Search in Combinatorial Optimization. Chichester: Wiley, 1997, P. 57–90.
16. Yannakakis M. Computational Complexity. // E. Aarts and J. K. Lenstra (eds.) Local Search in Combinatorial Optimization. Chichester: Wiley, 1997, P. 19–56.

Кочетов Юрий Андреевич
Институт математики им С.Л.Соболева СО РАН,
просп. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 333-20-86, факс (383) 333-25-98. E-mail: jkochet@math.nsc.ru