Комментарии к лекции № 7

Комментарий к стр. 2

Напомню, что множество $\boldsymbol{K}$ называется конусом, если $\forall\ \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$ и $\forall\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}$ имеем $\boldsymbol{\lambda x} \in \boldsymbol{K}$.

Очевидно, что множество возможных направлений в точке $\boldsymbol{x}$ образует конус, который обозначим как $\boldsymbol{K_f(x)}$.

Комментарий к стр. 4

Множество

$$K_<(x) = \{s \neq 0 | (\varphi_i^{'}(x), s) < 0, \forall\, i \in I(x)\}$$

– конус. Лемма 7 утверждает, что конус $K_<(x)$ является подмножеством конуса $K_f(x)$, оправдывая название первого из них, как внутренней аппроксимации второго – конуса возможных направлений.

Конус $K_d(x) = \{s \neq 0 | (f_i^{'}(x), s) < 0\}$ называется конусом направлений убывания функции f.

Комментарий к стр. 5

Теорема 8 эквивалентна утверждению, что для локальной оптимальности точки $\boldsymbol{x}$ необходимо выполнение условия

$$\boldsymbol{K}_d(\boldsymbol{x}) \cap \boldsymbol{K}_<(\boldsymbol{x}) = \emptyset.$$

Название теоремы связано с тем, что в ней необходимые условия формулируются в виде требования пустоты пересечения двух геометрических объектов – двух конусов. Эту теорему можно сформулировать в более сильном варианте:

$$\boldsymbol{K}_d(\boldsymbol{x}) \cap \overline{\boldsymbol{K}}_f(\boldsymbol{x}) = \emptyset,$$

который, однако, неконструктивен, т.к. отсутствует аналитическое описание замыкания конуса возможных направлений. Впоследствии мы увидим, что наличие дополнительной информации о задаче приводит к нужному описанию этого конуса. Эта информация будет формулироваться в виде так называемых условий регулярности.

Комментарий к стр. 11

Теперь, основываясь на этой информации, можно дать интерпретацию условий регулярности теоремы 10. Линейная независимость градиентов активных ограничений $\varphi_i'(x^*), i \in I(x^*)$ означает, что не существует таких ненулевых коэффициентов λ_i, $i \in I(x^*)$, что

$$\sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \varphi_i'(x^*) = 0.$$

Отсюда при помощи теоремы Гордана (след-е теор. Ф.–М.) выводим, что найдется такой вектор s, что

$$(\varphi_i'(x^*), s) < 0, \forall\, i \in I(x^*).$$

Т.е. конус $K_<(x^*)$ является не пустым. Следовательно

$$\overline{K}_f(x^*) = \{s \neq 0 | (\varphi_i'(x^*), s) \leq 0, \forall\, i \in I(x^*)\}.$$