ЛЕКЦИЯ № 1

от 01.09.09

Лектор: Плясунов Александр Владимирович
http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/mo.html

1. Понятие экстремальной задачи

2. Элементы алгоритмической теории экстремальных задач

3. Классификация задач

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Алексеева Е. В., Кутненко О. А., Плясунов А. В. Численные методы оптимизации. Новосибирск: НГУ, 2008.*

[2] Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М.:Наука, 1969.

[3] Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.

[4] *Глебов Н. И., Кочетов Ю. А., Плясунов А. В. Методы оптимизаци Новосибирск: НГУ, 2000.*

[5] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

[6] *Ларин Р. М., Плясунов А. В., Пяткин А. В. Методы оптимизации. Примеры и задачи. Новосибирск: НГУ, 2003, 2009.*

[7] Мину М. Математическое программирование. М.: Наука, 1990.

ЛИТЕРАТУРА

[8] Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. М.: Наука, 1978.

[9] Понтрягин Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.

[10] Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Физматлит, 2005.

[11] Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир, 1991.

[12] Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974.

[13] Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. М.:Наука, 1969.

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ (ОПТИМИЗАЦИОННАЯ) ЗАДАЧА (Р)

Найти:

$$\min f(x) \tag{1}$$

при условии, что

$$\varphi_i(x) \le 0, i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

$$x \in S \subseteq R^n \text{ или } Z^n \text{ или } B^n. \tag{3}$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$– вектор переменных;

f – целевая функция задачи;

$\varphi_i(x) \le 0, i = \overline{1, m}, x \in S$ – ограничения задачи.

Методы оптимизации $\equiv$ Теория оптимизации $\equiv$ Теория экстремальных задач $\equiv$ Математическое программирование

1. Теоретическое исследование вопросов существования оптимальных решений экстремальных задач.

2. Необходимые и/или достаточные условия экстремума.

3. Разработка численных методов решения.

4. Исследование сложности задач (классы PO, FPTAS, PTAS, APX, poly-APX, exp-APX, NPO).

Источник экстремальных задач: – экономика, техника и т.д. (см. слайды).

Цели лекционного курса:

– Изучение ряда базовых алгоритмов, которые используются для решения **конечномерных задач оптимизации**.

– Получение теоретических и концептуальных представлений, достаточных для понимания, оценки этих алгоритмов и, если необходимо, создания новых.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Вектор $\boldsymbol{x}$ – допустимое решение задачи $\boldsymbol{P}$, если выполняются ограничения (2),(3).

$\boldsymbol{Q(P) = \{x \in R^n | \varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}, x \in S\}}$ – множество допустимых решений задачи $\boldsymbol{P}$.

Оптимальное решение (глобальный минимум): любое допустимое решение задачи, на котором достигается минимум целевой функции $\boldsymbol{f}$ на множестве $\boldsymbol{Q(P)}$.

1. $\boldsymbol{g(x) = 0 \equiv g(x) \leq 0, -g(x) \leq 0}$.

$\boldsymbol{g(x) \leq 0 \equiv g(x) + y = 0}$, где $\boldsymbol{y \geq 0}$.

2. $\boldsymbol{\max_{x \in Q} g(x) \equiv \min_{x \in Q} -g(x)}$

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Задача оптимизации решена, если
– либо найдено её оптимальное решение,
– либо найден конечный инфинум целевой функции на множестве $\boldsymbol{Q(P)}$, в случае, когда оптимального решения не существует,
– либо доказано, что целевая функция неограничена снизу на множестве допустимых решений,
– либо установлено, что множество допустимых решений задачи $\boldsymbol{P}$ пусто.

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ

В зависимости от природы множества $\boldsymbol{S}$ задачи оптимизации классифицируются как:

– **дискретные (комбинаторные)** — $\boldsymbol{S}$ конечно или счетно,

– **целочисленные** — $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{Z}^n$,

– **булевы** — $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{B}^n$,

– **вещественные (непрерывные)** — $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{R}^n$,

– **бесконечномерные** — $\boldsymbol{S}$ подмножество гильбертова пространства.

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ

Если $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R}^n$ или $\boldsymbol{Z}^n$ или $\boldsymbol{B}^n$, $(\boldsymbol{m} = \mathbf{0})$, то задача $\boldsymbol{P}$ – **задача безусловной оптимизации**. В противном случае говорят о **задаче условной оптимизации**.

Подробности в пособии (изучить самостоятельно) **Алексеева Е. В., Кутненко О. А., Плясунов А. В. Численные методы оптимизации. Новосибирск: НГУ, 2008.**

ОСНОВЫ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Вычислимость $\equiv$ Тип вычислительных устройств $\equiv$ Программы $\equiv$ Конечные наборы инструкций

Пример невычислимого вещественного числа

Идея: использовать 10 проблему Гильберта $\equiv$ разрешимы или нет диофантовы уравнения в целых числах?

$\boldsymbol{d = \sum_{n \in D} 4^{-n}}$, где $\boldsymbol{D}$ – гёделевские номера разрешимых диофантовых уравнений.

Иерархия сложностных классов экстремальных задач.

ВЫЧИСЛИМОСТЬ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Алгебраическая вычислимость:

Данные представляются (аргумент x) точно и любая операция (+, -, *, /) выполняется точно за один шаг при вычислении $\boldsymbol{f(x)}$

Битовая вычислимость:

По заданному "хорошему"рациональному приближению $\boldsymbol{x}$ можно получить "хорошее"рациональное приближение $\boldsymbol{f(x)}$

ВЫЧИСЛИМОСТЬ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ: ПРОБЛЕМЫ

Алгебраическая вычислимость:

Функции константы вычислимы (сравнить с примером)

Невычислимы трансцендентные функции. Например: e^x и $\sqrt{x}$.

Битовая вычислимость:

Все вычислимые функции должны быть непрерывны

БИТОВАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ: УТОЧНЕНИЕ

Функция $\varphi(n) \in \{\frac{m}{2^k} \mid m \in Z, k \in N\}$ такая, что

$$\|\varphi(l) - x\| < 2^{-l}$$

называется представлением числа $x \in R$

Число x вычислимо тогда и только тогда, когда вычислимо его представление

Пиксель – шар радиуса $\varepsilon > 0$

Пиксель вычислим, если вычислимы координаты его центра и радиус. Например, $B(\frac{m}{2^k}, 2^{-l})$

Образ – набор пикселей заданного размера (разрешение)

Соответственно, образ вычислим, если он состоит из вычислимых пикселей

БИТОВАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ: УТОЧНЕНИЕ

Ограниченное множество $\boldsymbol{S \subseteq R^n}$ вычислимо, если вычислима следующая функция

$\boldsymbol{f(d,k) = 1}$, если $\boldsymbol{B(d, 2^{-l}) \bigcap S \neq \emptyset}$

$\boldsymbol{f(d,k) = 0}$, если $\boldsymbol{B(d, 2 * 2^{-l}) \bigcap S = \emptyset}$

$\boldsymbol{f(d,k) = 0}$ или $\boldsymbol{1}$, иначе

$\boldsymbol{d \in \{\frac{m}{2^k} \mid m \in Z, k \in N\}}$

Ограниченная функция определённая на ограниченном множестве вычислима, если вычислим её график