ЛЕКЦИЯ № 13

Метод ветвей и границ (стратегия решения)

1. Описание метода

2. Конечность метода

3. МВиГ для задачи минимизации липшицевой функции на гиперкубе

Метод ветвей и границ

Простой перебор: наилучшее текущее решение (рекорд) сравнивается с очередным допустимым решением (относительно целевой функции).

Метод ветвей и границ (МВГ): рекорд сравнивается с оценками подмножеств допустимых решений.

МВГ — метод, который сводит поиск оптимального решения посредством последовательного разбиения множества допустимых решений на все более мелкие подмножества и последующего сравнения этих подмножеств с рекордом.

Метод ветвей и границ

Рассмотрим задачу:

$$\min\{f(x)|x \in Q\}.$$

Атомарное множество это подмножество Q, на котором исходная задача "легко решается"(точно или приближенно). Предполагается, что любое разбиение множества Q на атомарные подмножества является конечным.

Пусть $x(d)$ — решение (точное или приближенное) задачи на атомарном множестве d.

Метод ветвей и границ

Пусть Q - конечно. Тогда одноточечные множества играют роль атомарных. Если Q – гиперкуб, а целевая функция непрерывна, то в качестве атомарных можно выбрать достаточно маленькие гиперкубики.

При описании алгоритма МВГ рассматриваем лишь такие подмножества $\boldsymbol{Q}$, которые есть объединение конечного числа атомарных множеств (разложимые подмножества).

Метод ветвей и границ

Функцию $\boldsymbol{b(d)}$, определенную на разложимых подмножествах множества $\boldsymbol{Q}$ и ставящую в соответствие множеству $\boldsymbol{d}$ определенное разбиение его на несобственные разложимые подмножества, будем называть функцией ветвления.

Метод ветвей и границ

Вещественную функцию $H(d)$, определенную на разложимых подмножествах множества Q и такую, что

$$0 < H(d) \leq \min_{x \in d} f(x)$$

назовем нижней границей.

Функция $H(d)$ — невозрастающая, то есть такая, что $H(d_1) \geq H(d_2)$, если $d_1 \subseteq d_2$.

Метод ветвей и границ

Алгоритм, реализующий метод ветвей и границ, состоит из конечной последовательности однотипных шагов. На каждом шаге рассматривается некоторое разбиение множества еще неотброшенных допустимых решений и некоторый рекорд $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$.

На первом шаге имеем $\boldsymbol{t}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$ – произвольный элемент множества $\boldsymbol{Q}$.

Пусть к очередному шагу имеется разбиение $\boldsymbol{t}_{\mathbf{1}}, \ldots, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{L}}$ и рекорд $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$.

Метод ветвей и границ

Шаг начинается с проверки элементов разбиения (не обязательно всех) на предмет выяснения, во-первых, содержит ли оно решение лучше рекорда и, во-вторых, какое решение в подмножестве является наилучшим. Предположим, что проверяется множество t_l. Это множество считается проверенным и отбрасывается, если выполняется одно из двух условий:

$$1)\ H(t_l) \geq f(x^0),$$

Метод ветвей и границ

2) функция $\boldsymbol{x(d)}$ определена на множестве $\boldsymbol{t_l}$.

При этом, если реализуется второй случай и

$$\boldsymbol{f(x(t_l)) < f(x^0),}$$

то устанавливается новое значение рекорда $\boldsymbol{x^0 = x(t_l)}$.

Если отброшенными оказываются все элементы разбиения, то алгоритм заканчивает работу и $\boldsymbol{x^0}$ – решение, найденное в результате его работы.

Метод ветвей и границ

Пусть $t'_1, \ldots, t'_{L'}$, $0 < L' \leq L$ – множества, не отброшенные в результате проверок. Выберем среди них некоторое "перспективное"подмножество t'_{l_0}.

Применим к нему функцию ветвления $b(d)$, в результате чего получим его разбиение $d_1, \ldots, d_N$ и в целом новое разбиение

$$t'_1, \ldots, t'_{l_0-1}, d_1, \ldots, d_N, t'_{l_0+1}, \ldots, t'_{L'}$$

множества неотброшенных решений.

После этого начинается следующий шаг.

Конечность алгоритма следствие следующих фактов:

1. На любом шаге множество непросмотренных решений – обьединение конечного числа разложимых подмножеств.

2. На каждом шаге алгоритма хотя бы один элемент разбиения либо отбрасывается, либо разбивается на подмножества, каждое из которых состоит из меньшего числа атомарных множеств.

3. Атомарные множества всегда отбрасываются.

Метод ветвей и границ

Что можно сказать о полученном в результате работы алгоритма рекорде x^0?

Пусть Q_1 – объединение подмножеств, отброшенных по первому правилу, а Q_2 – объединение подмножеств, отброшенных по второму правилу.

Тогда $Q = Q_1 \cup Q_2$.

Если $Q^* \cap Q_1 \neq \emptyset$, то x^0 – оптимальное решение вне зависимости от способа задания $x(d)$.

Метод ветвей и границ

Если $Q^* \cap Q_1 = \emptyset$, то $Q^* \subseteq Q_2$, т.е. найдутся d_i такие, что $Q^* \cap d_i \neq \emptyset$, $d_i \subseteq Q_2$ и $Q^* \subseteq \cup_i d_i$

Случай 1. $f(x(d)) = \inf\limits_{x \in d} f(x)$. Отсюда и определения Q_2 имеем, что $x(d_i)$ – оптимальное решение для любого i. Пусть d_1 – первое подмножество отброшенное по условию 2. Тогда $f(x^0) \leq f(x(d_1))$.

Метод ветвей и границ

Случай 2. $\boldsymbol{f(x(d)) \leq (1+\varepsilon)f(x^*(d))}$. Отсюда и определения $\boldsymbol{Q_2}$ имеем, что $\boldsymbol{x(d_i)}$ – $\boldsymbol{\varepsilon}$-оптимальное решение для любого $\boldsymbol{i}$. Пусть $\boldsymbol{d_1}$ – первое подмножество отброшенное по условию 2. Тогда $\boldsymbol{f(x^0) \leq f(x(d_1)) \leq (1+\varepsilon)f(x^*(d_1))}$.

Метод ветвей и границ

При разработке алгоритма МВиГ необходимо конкрети
следующие элементы общей схемы:

– атомарные множества решений;

– способ задания подмножеств решений;

– функцию ветвления;

– способ вычисления нижней границы;

– функцию выбора наилучшего решения;

– правило выбора перспективного элемента разбиения.

Метод ветвей и границ

Рассмотрим задачу, в которой целевая функция удовлетворяет условию Липшица.

Ограничимся задачей минимизации на гиперкубе: $f(x) \longrightarrow \inf_{x \in Q}$, где $Q = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : 0 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, \ldots, n\}$

Соглашения:

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|_\infty \text{ для всех } x, y \in Q, \tag{21}$$

где $L = const > 0$ – константа Липшица,

Метод ветвей и границ

$$\|x - y\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|.$$

Из (21) $\Longrightarrow$ функция f – непрерывна и, следовательно достигает минимального значения f^* на гиперкубе.

Выберем на отрезке $[0, 1]$ (оси j) следующие точки

$$x_j^1 = \frac{h}{2}, x_j^2 = x_j^1 + h, \ldots, x_j^{i+1} = x_j^i + h, \ldots,$$

Метод ветвей и границ

$$\ldots, x_j^m = \max\{x_j^1 + (m-1)h, 1\},$$

где $h = \frac{2\varepsilon}{L}$ – шаг сетки, а m – подходящее натуральное число.

На гиперкубе Q введем сетку

$$Q_h = \{x^{i_1 \ldots i_n} = (x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \ldots, x_j^{i_j}, \ldots, x_n^{i_n})\},$$

где j-ая координата $x_j^{i_j}$ принимает одно из следующих значений

$$x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^m.$$

Метод ветвей и границ

Пусть

$$F_h = \min_{Q_h} f(x^{i_1 \dots i_n}).$$

Теорема 16. Для любой функции $f(x)$, удовлетворя
условию Липшица (21), справедлива оценка

$$f^* \le F_h \le f^* + \varepsilon. \qquad (22)$$

Доказательство. Множество

$$Q_{i_1 \dots i_n} = \left\{ x \in R^n : \|x - x^{i_1 \dots i_n}\|_\infty \le \frac{h}{2} \right\}$$

Метод ветвей и границ

– гиперкуб с центром в точке $x^{i_1\dots i_n}$ (грани параллель осям координат, длина рёбер – h).

Для любой точки $x \in Q$ найдется гиперкуб $Q_{i_1\dots i_n}$, содержащий эту точку $\Longrightarrow$

$$f(x) \geq f(x^{i_1\dots i_n}) - L\|x - x^{i_1\dots i_n}\|_\infty \geq$$

$$\geq F_h - L\frac{h}{2} = F_h - \varepsilon \Longrightarrow$$

Имеем $f^* \leq F_h \leq f^* + \varepsilon$. ■

Метод ветвей и границ

Рассмотрим произвольный гиперкуб $\mathbf{\Gamma}[\boldsymbol{x^c}, \boldsymbol{h}]$ с центро
$\boldsymbol{x^c}$ и длиной стороны $\boldsymbol{h}$:

$$\mathbf{\Gamma}[\boldsymbol{x^c}, \boldsymbol{h}] = \left\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R^n} : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x^c}\|_\infty \leq \frac{\boldsymbol{h}}{\mathbf{2}}\right\}.$$

Из доказательства теоремы 18 следует, что $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{\Gamma}[\boldsymbol{x^c}, \boldsymbol{h}]$:

$$\boldsymbol{f(x) = f(x) - f(x^c) + f(x^c) \geq -L|x - x^c| +}$$
$$\boldsymbol{+ f(x^c) \geq f(x^c) - Lh/2.}$$

Метод ветвей и границ

Естественно, тогда определить нижнюю границу на гиперкубе $\boldsymbol{\Gamma[x^c, h]}$ равенством $\boldsymbol{H(\Gamma[x^c, h]) = f(x^c) - Lh/2}$.

Функцию выбора наилучшего решения определим на г.-кубах со стороной $\boldsymbol{h}$ (играют роль атомарных множеств решений) не превосходящей $\boldsymbol{\frac{2\varepsilon}{L}}$, положив

$$\boldsymbol{x(\Gamma[x^c, h]) = x^c.}$$

Подмножества решений будем задавать в виде набора гиперкубов.

Метод ветвей и границ

На первом шаге имеем $t_1 = \Gamma[x^R, \Delta]$, где первый рекорд x^R – центр г.-куба со стороной $\Delta^R = \Delta$.

Пусть к очередному шагу имеется разбиение

$$t_1 = \Gamma[x^1, h_1], \ldots, t_L = \Gamma[x^L, h_L]$$

и рекорд x^R – центр г.-куба со стороной Δ^R.

Очередной шаг начинается с проверки гиперкуба с номером l. Он считается проверенным и отбрасывает если выполняется одно из следующих условий:

Метод ветвей и границ

1) $\boldsymbol{H(\Gamma[x^l, h_l]) \geq f(x^R)}$,

2) сторона г.-куба $\boldsymbol{h_l}$ не превосходит величины $\boldsymbol{\frac{2\varepsilon}{L}}$.

При этом, если реализуется второй случай и

$$\boldsymbol{f(x^l) < f(x^R)},$$

то устанавливается новое значение рекорда $\boldsymbol{x^R = x^l}$ и величины $\boldsymbol{\Delta^R = h_l}$.

Дополнительное правило:

Метод ветвей и границ

Случай 1. (Текущий рекорд хуже)

$$\text{Если } f(x^l) < f(x^R), \text{ то}$$

среди оставшихся гиперкубов разбиения отбрасываем те, которые содержаться в г.-кубе

$$\Gamma[x^R, \frac{2(f(x^R) - f(x^l))}{L}].$$

По определению нижней границы имеем $\forall x \in \Gamma[x^c, h]$ неравенство $f(x) \geq H(\Gamma[x^c, h]) = f(x^c) - Lh/2.$

Метод ветвей и границ

Поэтому для любой точки $\boldsymbol{x}$ из данного г.-куба имеем

$$\boldsymbol{f(x) \geq H(\Gamma[x^R, \frac{2(f(x^R) - f(x^l))}{L}]) =}$$

$$\boldsymbol{= f(x^R) - \frac{L}{2} \times \frac{2(f(x^R) - f(x^l))}{L} = f(x^l).}$$

Случай 2. (Текущий рекорд лучше)

Если $\boldsymbol{f(x^R) \leq f(x^l)}$, то среди оставшихся

Метод ветвей и границ

гиперкубов разбиения отбрасываем те, которые содерж
в г.-кубе

$$\mathbf{\Gamma}[\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{l}}, \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{l}}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{R}})}{\boldsymbol{L}}].$$

Т.к. для любой точки $\boldsymbol{x}$ из данного г.-куба имеем $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{R}})$.

Если отброшены все элементы разбиения, то алгоритм заканчивает работу и $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{R}}$ – требуемое решение.

Метод ветвей и границ

Если есть неотброшеные множества, то выбираем "перспективное"подмножество $\Gamma[x^l, h_l]$. Функция ветвления $b(\cdot)$ разбивает его на 2^n одинаковых подкубов со стороной $\frac{h_l}{2}$.

После этого начинается следующий шаг.

Метод ветвей и границ

Замечание. Если в процессе работы алгоритма не происходит смены рекорда по правилу 2, то полученный рекорд – оптимальное решение задачи. В противном случае ε прибли решение.