

ЛЕКЦИЯ № 3

Линейное программирование

1. Базисно допустимые решения
2. Критерий разрешимости
3. Теория двойственности линейного программирования

ЛП: понятие базисного допустимого решения (б.д.р.).

Базис — любой набор $A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}$ из m линейно независимых столбцов матрицы системы ограничений A .

Матрица $B = [A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}]$ называется базисной.

Обозначения:

$$S = \{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\}, S' = \{1, \dots, n\} \setminus S, A = [B, N],$$

где $N = [A_j]_{j \in S'}$, $x = (x_B, x_N)$, $x_B = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})$ — базисные, а $x_N = (x_j)_{j \in S'}$ — небазисные переменные.

$$E x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \quad (6')$$

Определение 3. Решение $(x_B, x_N) = (B^{-1}b, 0)$ системы уравнений (6) назовем **базисным** (соответствующим базису B).

ЛП: понятие б.д.р.

Лемма 3. Вектор x — базисное решение системы (6) тогда и только тогда, когда множество столбцов с индексами из множества $S(x) = \{j | x_j \neq 0\}$ — линейно независимо.

Определение 3. Базисным допустимым решением (б.д.р.) называется любой элемент множества Q , являющийся базисным решением системы уравнений (6).

Замечание 2. Решение соответствующее базису B — б.д.р. $\iff B^{-1}b \geq 0$.

ЛП: понятие б.д.р.

Определение 4. Вектор $x \in Q$ — крайняя точка или вершина множества Q , если не существует допустимых решений $x^1 \neq x^2$ из Q таких, что $x = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2$, где $0 < \alpha < 1$.

Теорема 3. Вектор x — б.д.р. тогда и только тогда, когда x — крайняя точка множества Q .

Доказательство. Пусть x — крайняя точка, но не б.д.р. Из леммы 3 \implies

$$\exists y \neq 0 : Ay = 0. \quad (*)$$

ЛП: понятие б.д.р.

При этом можем считать, что $(x_j = 0 \implies y_j = 0) \implies$

$$\{j | y_j \neq 0\} \subseteq \{j | x_j > 0\}. \quad (**)$$

Т.к. $x \in Q$, то из (*) \implies

$$\forall t \in R : z(t) = x + t y - \text{решение (6),}$$

тогда из (**) \implies

$$\forall \text{малого } t \in R : z(t) \in Q.$$

\implies

$$\exists \varepsilon > 0 : x^1 = x + \varepsilon y \in Q, x^2 = x - \varepsilon y \in Q,$$

\implies

$$x^1 \neq x^2 \text{ и } x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2 \implies \rightarrow \leftarrow \implies x - \text{б.д.р..}$$

ЛП: понятие б.д.р.

Пусть x — б.д.р., но

$$\exists 0 < \alpha < 1, \exists x^1 \neq x^2, x^1, x^2 \in Q : x = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2.$$

По условию $Ax^1 = Ax^2 (= b) \implies A(x^1 - x^2) = 0$, но

$$A(x^1 - x^2) = 0 \iff \{A_j | x_j^1 \neq x_j^2\} \text{ — линейно зависимо} \implies$$

$$\{A_j | \alpha x_j^1 + (1 - \alpha)x_j^2 > 0\} \text{ — линейно зависимо} \implies$$

$$\{A_j | x_j > 0\} \text{ — линейно зависимо} \implies \rightarrow \leftarrow,$$

т.е. если x — б.д.р., то x — крайняя точка множества Q . ■

ЛП: Критерий разрешимости

Теорема 4 (Критерий разрешимости). Задача линейного программирования (5)-(7) разрешима тогда и только тогда, когда множество допустимых решений не пусто и целевая функция ограничена на нем.

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности покажем, что

$$\forall x^0 \in Q \exists \text{ б.д.р. } \bar{x} : w(\bar{x}) \leq w(x^0).$$

Пусть

$$\bar{x} \in Q^0 = \{x \in Q \mid w(x) \leq w(x^0)\} \neq \emptyset$$

и имеет минимальное число ненулевых компонент ($\text{supp}(\bar{x})$).

Докажем, что \bar{x} — б.д.р. Допустим противное. \implies

ЛП: Критерий разрешимости

МНОЖЕСТВО

$\{A_j | \bar{x}_j > 0\}$ линейно зависимо \implies

$\exists \mathbf{y} \neq \mathbf{0} : \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ и если $\bar{x}_j = 0$, то $y_j = 0$.

Пусть $w(\mathbf{y}) \leq 0$ (если необходимо, то возьмем $-\mathbf{y}$). Положим $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{y}$. Выполняется следующее свойство

\forall малого $t \in \mathbf{R} : \mathbf{x}(t) \in Q$.

1). Пусть $\forall j : y_j \geq 0 \implies \forall t \geq 0 \mathbf{x}(t) \geq 0 \implies \forall t \geq 0 \mathbf{x}(t) \in Q$

отсюда и неравенства $w(\mathbf{x}(t)) = w(\bar{\mathbf{x}}) + tw(\mathbf{y}) \geq \text{const}$ (по условию)

учитывая, что $w(\mathbf{y}) \leq 0$ и $t \geq 0$ — произвольно,

имеем: $w(\mathbf{y}) = 0$ и, следовательно, $w(\mathbf{x}(t)) = w(\bar{\mathbf{x}}) \forall t$.

ЛП: Критерий разрешимости

Т.к. из условия $y_j > 0 \Rightarrow \bar{x}_j > 0$, то

\forall малого по абсолютной величине $t < 0 : x(t) \in Q$.

Найдем такое \bar{t} наибольшее по абсолютной величине из условия:

$$\forall j (y_j > 0 \Rightarrow \bar{x}_j + \bar{t}y_j \geq 0)$$

которое эквивалентно условию:

$$\forall j (y_j > 0 \Rightarrow \bar{x}_j \geq (-\bar{t})y_j) \iff$$

$$(-\bar{t}) = \min_{y_j > 0} \frac{\bar{x}_j}{y_j} \iff \bar{t} = - \min_{y_j > 0} \frac{\bar{x}_j}{y_j}.$$

Итак $x(\bar{t}) \in Q$ и $w(x(\bar{t})) = w(\bar{x}) \leq w(x^0) \Rightarrow x(\bar{t}) \in Q^0$.

Получили противоречие. Т.к. $\text{supp}(x(\bar{t})) = \text{supp}(\bar{x}) - 1$.

ЛП: Критерий разрешимости

2). Пусть $\exists j : y_j < 0$. Тогда

\forall достаточно малых $t \geq 0 : x(t) \in Q$.

Найдем наибольшее такое \bar{t} из условия:

$$\forall j (y_j < 0 \Rightarrow \bar{x}_j + \bar{t}y_j \geq 0)$$

которое эквивалентно условию:

$$\forall j (y_j < 0 \Rightarrow \bar{x}_j \geq \bar{t}(-y_j)) \iff$$

$$\iff \bar{t} = \min_{y_j < 0} \frac{\bar{x}_j}{-y_j}.$$

Итак $x(\bar{t}) \in Q$ и т.к. $\bar{t} > 0, d \leq 0$, то $w(x(\bar{t})) = w(\bar{x}) + d\bar{t} \leq w(x^0) \Rightarrow x(\bar{t}) \in Q^0$.

Получили противоречие. Т.к. $\text{supp}(x(\bar{t})) = \text{supp}(\bar{x}) - 1$.

ЛП: Критерий разрешимости

Т.к. по условию $Q \neq \emptyset$, то множество базисных допустимых решений задачи не пусто. Т.к. оно конечно, то

$$\exists x^* \text{ — б.д.р.: } w(x^*) \leq w(x) \forall \text{ б.д.р. } x.$$

Из ранее доказанного следует, что x^* — оптимальное решение. ■

Следствие 3. Если множество допустимых решений задачи ЛП не пусто, то существуют базисные допустимые решения.

Следует из доказательства теоремы 4 (взять $w(x) \equiv 0$).

Следствие 4. Если задача ЛП разрешима, то существует оптимальное базисное решение.