ЛЕКЦИЯ № 5

Симплекс-метод и теория двойственности ЛП

1. Симплекс-таблица (с.-т.)

2. Элементарное преобразование б.д.р., базиса и с.-т.

3. Симплекс-метод

4. Теоремы двойственности ЛП

Симплекс-таблица (с.-т.)

$\boldsymbol{x}$ – допустимое решение задачи (5–7) со значением целевой функции $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w} \Leftrightarrow$ пара $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x})$ – решение системы уравнений $(\mathbf{5}')$, $(\mathbf{6}')$, $(\mathbf{7})$ или системы

$$-\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}_N = -\boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \qquad (\mathbf{5}')$$

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \qquad (\mathbf{6}')$$

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

$$-w + \sum_{j \in S'} z_{0j} x_j = z_{00}, \qquad (5'')$$

$$x_{\sigma(i)} + \sum_{j \in S'} z_{ij} x_j = z_{i0}, \; i = \overline{1, m}, \qquad (6'')$$

где

$$z_{00} = -c_B B^{-1} b = -w(\overline{x}),$$

$$z_{0j} = c_j - c_B B^{-1} A_j, \; j = 1, \ldots, n,$$

$$(z_{10}, \ldots, z_{m0})^\top = B^{-1} b,$$

$$(z_{1j}, \ldots, z_{mj})^\top = B^{-1} A_j, \;\; j = 1, \ldots, n.$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

$$
\begin{array}{r|c|cccccc|}
 & & x_1 & \dots & x_j & \dots & x_n \\
\hline
-w & z_{00} & z_{01} & \dots & z_{0j} & \dots & z_{0n} \\
\hline
x_{\sigma(1)} & z_{10} & z_{11} & \dots & z_{1j} & \dots & z_{1n} \\
\cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{\sigma(i)} & z_{i0} & z_{i1} & \dots & z_{ij} & \dots & z_{in} \\
\cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{\sigma(m)} & z_{m0} & z_{m1} & \dots & z_{mj} & \dots & z_{mn} \\
\hline
\end{array}
$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

		x_1	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_m	x_{m+1}	$\ldots$	x_n
$-w$	z_{00}	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	z_{0m+1}	$\ldots$	z_{0n}
x_1	z_{10}	1	$\ldots$	0	$\ldots$	0	z_{1m+1}	$\ldots$	z_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_i	z_{i0}	0	$\ldots$	1	$\ldots$	0	z_{im+1}	$\ldots$	z_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_m	z_{m0}	0	$\ldots$	0	$\ldots$	1	z_{mm+1}	$\ldots$	z_{mn}

Симплекс-таблица (с.-т.)

Определение 6. Симплекс–таблица прямо допустима, если $z_{i0} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m.$

Базис B, соответствующий ей, также называется прямо допустимым.

Определение 7. Симплекс–таблица двойственно допустима, если $z_{0j} \geq 0,\ j = 1, \ldots, n.$

Базис B, соответствующий этой таблице, также называется двойственно допустимым.

Элементарное преобразование б.д.р.

$$\boldsymbol{x(t), t \geq 0:}$$

$$\begin{aligned} x_{\sigma(i)}(t) &= \overline{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t, \\ x_s(t) &= t, \\ x_j(t) &= 0, j \in S' \backslash s \end{aligned} \tag{10}$$

$$\overline{t} = \frac{\overline{x}_{\sigma(r)}}{z_{rs}} = \frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min_{z_{is}>0,\ i\geq 1} \frac{z_{i0}}{z_{is}}.$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

$\boldsymbol{\alpha'_i = (z'_{i0}, z'_{i1}, \ldots, z'_{in})\ (i = \overline{0,m})}$ строки новой симплекс– таблицы:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha'_i} = \boldsymbol{\alpha_i - \dfrac{z_{is}}{z_{rs}}\alpha_r,\ i \neq r,} \\ \boldsymbol{\alpha'_r} = \boldsymbol{\dfrac{1}{z_{rs}}\alpha_r.} \end{cases} \qquad (11)$$

$\boldsymbol{r}$-я строка, $\boldsymbol{s}$-й столбец и элемент $\boldsymbol{z_{rs}}$ называются ведущими.

Симплекс-таблица (с.-т.)

Соотношения (11) эквивалентны следующим

$$\begin{cases} z'_{ij} = z_{ij} - \dfrac{z_{is}z_{rj}}{z_{rs}}, \; i \neq r, \\ z'_{rj} = \dfrac{z_{rj}}{z_{rs}}. \end{cases}$$

Замечание 3. Элементарные преобразования сохраняют прямо допустимость с.-т.

Симплекс-метод

0) Построить симплекс–таблицу, соответствующую заданному базисному допустимому решению (таблица, естественно, будет прямо допустимой, т.е. $z_{i0} \geq 0, i = \overline{1, m}$).

1) Если симплекс–таблица двойственно допустима, т.е. $z_{0j} \geq 0, \ j = \overline{1, n}$, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение)

2) Иначе, выбрать ведущий столбец $s : z_{0s} < 0, \ s \geq 1$.

Симплекс-метод

3) Если $\{i \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min\{\frac{z_{i0}}{z_{is}} \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима из-за неограничен
целевой функции).

4) Преобразовать симплекс–таблицу, положить $\sigma(r) := s$ и перейти на шаг 1.

Лексикографический с. - м.

Пусть $\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}'' \in \boldsymbol{R}^{n+1}$.

Вектор $\boldsymbol{\alpha}'$ лексикографически больше вектора $\boldsymbol{\alpha}''$ $(\boldsymbol{\alpha}' \succ \boldsymbol{\alpha}'') \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}' - \boldsymbol{\alpha}'' \succ \mathbf{0}$.

Симплекс-таблица *нормальна*, если каждая ее строка $\boldsymbol{\alpha}_i,\ i = 1, \ldots, m$ лексикографически больше нуля.

Лексикографический с. - м.

0) Начать с нормальной симплекс–таблицы.

3) Если $\{i \mid z_{is} < 0,\ i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{1}{z_{rs}}\alpha_r = lex\min\{\frac{1}{z_{is}}\alpha_i \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима).

Сохранение нормальности с.-т. на шаге 4:

1. $\boldsymbol{\alpha_r \succ 0}$, $\boldsymbol{z_{rs} > 0 \Rightarrow \frac{1}{z_{rs}}\alpha_r \succ 0}$
2. $\boldsymbol{z_{is} \leq 0 \Rightarrow \alpha_i - \frac{z_{is}}{z_{rs}}\alpha_i \succeq \alpha_i \succ 0}$
3. $\boldsymbol{z_{rs} > 0 \Rightarrow z_{is}[\frac{1}{z_{is}}\alpha_i - \frac{1}{z_{rs}}\alpha_r] \succ 0}$.

Лексографическое возрастание 0-й строки:

$\boldsymbol{z_{0s} < 0}$, $\boldsymbol{z_{rs} > 0}$ и $\boldsymbol{\alpha_r \succ 0}$, то

$$\boldsymbol{\alpha_0 - \frac{z_{0s}}{z_{rs}}\alpha_r \succ \alpha_0.}$$

Итак базисы не могут повторятся, следовательно, метод конечен.

Первая теорема двойственности

Теорема 5 (Первая теорема двойственности). Прямая и двойственная к ней задачи либо одновременно разрешимы, либо одновременно неразрешимы.

При этом в первом случае оптимальные значения целевых функций этих задач совпадают, а во втором случае по крайней мере одна из задач неразрешима в силу несовместности ее ограничений.

Вторая теорема двойственности

Теорема 6 (Вторая теорема двойственности или теорема о дополняющей нежесткости). Допустимые решения $\overline{\boldsymbol{x}}$ и $\overline{\boldsymbol{y}}$ соответственно прямой и двойственной задачи оптимальны тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\boldsymbol{y_i(a_i x - b_i) = 0 \ (i \in I),}$$

$$\boldsymbol{(c_j - yA_j)x_j = 0 \ (j \in J).}$$