ЛЕКЦИЯ № 6

Симплекс-метод, теория двойственности ЛП, необходимые условия экстремума

1. Двухфазный симплекс-метод или метод искусственного базиса

2. Теоремы двойственности ЛП. Теоремы Фаркаша – Минковского и Гордана

3. Возможные направления

Метод искусственного базиса

Пусть $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m)$.
Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \boldsymbol{u}_m \longrightarrow \min$$

$$\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Eu} = \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$$

$$(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{b}_i \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{m}})$$

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{0}} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}}$ – б.д.р.

Метод искусственного базиса

Вспомогательная задача разрешима и $\min \xi \geq 0$.

Пусть $z^* = (x^*, u^*)$ – оптимальное решение

A. $\min \xi > 0 \Longleftrightarrow Q = \emptyset$

B. $\min \xi = 0 \Longrightarrow u_i^* = 0$, $i = \overline{1, m}$, $\Longrightarrow$ вектор x^* – доп. реш. задачи (5)-(7) $\Longrightarrow x^*$ – б.д.р. задачи (5)-(7).

$\{A_j | j \in S\} \cup \{E_i | i \in I'\}$ – базис z^*, где $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $I' \subseteq \{1, \ldots, m\}$ и

Метод искусственного базиса

$|S| + |I'| = m$. Тогда

$$A_k = \sum_{j \in S} z_{jk} A_j + \sum_{i \in I'} \mu_{ik} E_i$$

Возможны случаи:

B1. $I' = \emptyset$.

B2. $I' \neq \emptyset$ и $\exists r \in I', \exists s \notin S \ \mu_{rs} \neq 0$.

B3. $I' \neq \emptyset$ и $\forall r \in I', \forall s = \overline{1, n} \ \mu_{rs} = 0$.

Метод искусственного базиса

В1. $\boldsymbol{I' = \emptyset \Longrightarrow |S| = m \Longrightarrow}$ множество $\boldsymbol{\{A_j | j \in S\}}$ – базис б.д.р. $\boldsymbol{x^*.}$

Преобразовать оптимальную с.-т.:

1. Вычеркнуть столбцы для переменных:

$\boldsymbol{u_1, \ldots, u_m}$.

2. Пересчитать 0-строку: $\boldsymbol{z_{00} = -(c, x^*),}$

$\boldsymbol{z_{0k} = 0, k \in S, z_{0k} = c_k - \sum_{j \in I} c_j z_{jk}, k \notin S.}$

Метод искусственного базиса

В2. $\boldsymbol{I'} \neq \emptyset$ и $\exists \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{I'}$, $\exists \boldsymbol{s} \notin \boldsymbol{S}$ $\boldsymbol{\mu_{rs}} \neq \mathbf{0}$ $\Longrightarrow$ Выполнить элементарное преобразование с.-т. с ведущим элементом $\boldsymbol{\mu_{rs}} \neq \mathbf{0}$. Новая с.-т. соответствует базису

$$\{\boldsymbol{A_j} | \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{S} \cup \{\boldsymbol{s}\}\} \cup \{\boldsymbol{E_i} | \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I'} \setminus \{\boldsymbol{r}\}\}.$$

Метод искусственного базиса

В3. $\boldsymbol{I' \neq \emptyset}$ и $\boldsymbol{\forall r \in I', \forall s = \overline{1, n} : \mu_{rs} = 0.}$

Ограничения $\boldsymbol{a_i x = b_i}$ системы (6) с номерами $\boldsymbol{i \in I'}$ являются избыточными.

Первая теорема двойственности

Теорема 5 (Первая теорема двойственности). Прямая и двойственная к ней задачи либо одновременно разрешимы, либо одновременно неразрешимы.

При этом в первом случае оптимальные значения целевых функций этих задач совпадают, а во втором случае по крайней мере одна из задач неразрешима в силу несовместности ее ограничений.

ЛП: двойственная задача

Прямая задача		Двойственная задача
$w(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$		$z(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$
$a_i x \geq b_i$	$i \in I_1$	$y_i \geq 0$
$a_i x = b_i$	$i \in I_2$	y_i — своб.
$x_j \geq 0$	$j \in J_1$	$yA_j \leq c_j$
x_j — своб.	$j \in J_2$	$yA_j = c_j.$

Упражнение.

Техника получения этой схемы: либо повторить выкладки, приведшие к задаче (8), (9), либо воспользоваться сводимостью общей задачи ЛП к задаче ЛП в канонической форме и применить готовый рецепт (задача (8), (9)).

Вторая теорема двойственности

Теорема 6 (Вторая теорема двойственности или теорема о дополняющей нежесткости). Допустимые решения $\overline{x}$ и $\overline{y}$ соответственно прямой и двойственной задачи оптимальны тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$y_i(a_i x - b_i) = 0 \ (i \in I),$$

$$(c_j - yA_j)x_j = 0 \ (j \in J).$$

Теорема 7 (теорема Фаркаша–Минковского). Система уравнений $\boldsymbol{Ax = b, x \geq 0}$ разрешима в том и только в том случае когда неравенство $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{0}$ выполняется для всех решений системы уравнений $\boldsymbol{yA \leq 0}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\exists \boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{Ax = b, x \geq 0}$ и пусть $\boldsymbol{y}$ — произвольное решение системы $\boldsymbol{yA \leq 0}$. Тогда

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{yA}) \leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}.$$

Достаточность. Пусть неравенство $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \leq \mathbf{0}$ выполняется для всех решений системы неравенств $\boldsymbol{y}\boldsymbol{A} \leq \mathbf{0}$.

Следствие 5. Система уравнений $\boldsymbol{Ax \le b}$ разрешима в том и только в том случае когда неравенство $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \ge \mathbf{0}$ выполняется для всех решений системы уравнений $\boldsymbol{yA} = \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \ge \mathbf{0}$.

$\boldsymbol{Ax \le b}$ разрешима $\Longleftrightarrow$ разрешима система $\boldsymbol{Ax_1 - Ax_2 + Eu = b, x_1, x_2, u \ge 0} \Longleftrightarrow$ когда неравенство $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \le \mathbf{0}$ выполняется для всех решений системы уравнений $\boldsymbol{yA \le 0, -yA \le 0, Ey \le 0} \Longleftrightarrow$ неравенство $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \ge \mathbf{0}$ выполняется для всех решений системы уравнений $\boldsymbol{yA} = \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \ge \mathbf{0}$. ■

Следствие 6 (теорема Гордана). Имеет место одно и только одно из следующих двух условий:

1. Разрешима система уравнений $\boldsymbol{Ax} < \mathbf{0}$;

2. существует такой $\neq \mathbf{0}$ вектор $\boldsymbol{y}$, что $\boldsymbol{yA} = \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$.

Действительно, система уравнений $\boldsymbol{Ax} < \mathbf{0}$ разрешима $\Longleftrightarrow$ разрешима система уравнений $\boldsymbol{Ax} \leq (\mathbf{-1}, \mathbf{-1}, \ldots, \mathbf{-1})^\top$. По теореме Ф.–М. разрешимость последней системы эквивалентна выполнению условия:

если вектор $\boldsymbol{y}$ решение системы $\boldsymbol{yA} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$, то выполняется неравенство $-\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$. Т.е. не существует ненулевого вектора $\boldsymbol{y}$ такого, что $\boldsymbol{yA} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$.

Теперь пусть существует ненулевой вектор $\boldsymbol{y}$ такой, что $\boldsymbol{yA} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$. Но тогда не выполняется неравенство $-\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \implies$ не выполнено условие теоремы Ф.–М. $\implies$ система $\boldsymbol{Ax} \leq (-\boldsymbol{1}, -\boldsymbol{1}, \ldots, -\boldsymbol{1})^\top$ неразрешима $\implies$ неразрешима система $\boldsymbol{Ax} < \boldsymbol{0}$.$\blacksquare$