ЛЕКЦИЯ № 8

1. Критерии оптимальности Куна–Таккера

2. Методы разработки алгоритмов решения конечномерных задач оптимизации

2.1. Преобразования и стратегии решения

2.2. Синтез методов решения

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

Лемма 9. Если

$$\boldsymbol{Q = \{x|\varphi_i(x) = (a_i, x) - b_i \leq 0, i = \overline{1, m}\},}$$

то условия

$$\boldsymbol{(a_i, s) \leq 0, i \in I(x^*)}$$

необходимы и достаточны для того, чтобы направление $\boldsymbol{s}$ было возможным в точке $\boldsymbol{x^* \in Q}$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{\beta > 0}$. Рассмотрим

$$\boldsymbol{\varphi_i(x^* + \beta s) = (a_i, x^* + \beta s) - b_i = (a_i, x^*) - b_i + \beta(a_i, s).}$$

$$\boldsymbol{\forall i \notin I(x^*)\ (a_i, x^*) - b_i < 0 \Rightarrow \forall i \notin I(x^*)\ \varphi_i(x^* + \beta s) \leq 0,}$$

для достаточно малых $\boldsymbol{\beta}$.

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

$$\forall i \in I(x^*)\ \varphi_i(x^* + \beta s) = (a_i, x^* + \beta s) - b_i = \beta(a_i, s) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^* + \beta s \in Q\ \forall \beta > 0 \Leftrightarrow (a_i, s) \leq 0\ \forall i \in I(x^*). \blacksquare$$

Другими словами в лемме утверждается, что $K_f(x) = K_{\leq}(x)$

Эта лемма позволяет элиминировать условие Слейтера в задаче выпуклого программиро
в случае линейных ограничений.

Помним: функции f, φ_i — выпуклые, непрерывно-дифференцируемые. Множество допустимых решений Q удовлетворяет условию Слейтера.

Критерий оптимальности: выпуклый случай

Теорема 12 (Теорема Куна-Таккера в локальной форме). Точка $x^* \in Q$ — оптимальное решение задачи выпуклого программирования в том и только в том случае, когда существуют такие числа $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1,m}$, что

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i'(x^*),$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1,m}.$$

Доказательство. Из леммы 8 и условия Слейтера следует, что для любого $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}^*)$

$$\mathbf{0} > \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{i}}(\widetilde{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{i}}(\widetilde{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{x}^*) \geq (\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{i}}'(\boldsymbol{x}^*), \widetilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^*).$$

Таким образом вектор $\boldsymbol{s} = (\widetilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^*) \in \boldsymbol{K}_{<}(\boldsymbol{x}^*)$. Следовательно, по теореме о замыкании конуса возможных направлений имеем $\overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{K}_{\leq}(\boldsymbol{x}^*)$. Повторяем соответствующие рассуждения второго доказательства теоремы 10.

Критерий оптимальности: линейный случай

Теорема 13 (Теорема Куна-Таккера в локальной форме). Точка $x^* \in Q$ — оптимальное решение задачи выпуклого программирования с линейными ограничениями в том и только в том случае, когда существуют такие числа $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, что

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i,$$

$$\lambda_i\big((a_i, x) - b_i\big) = 0, i = \overline{1, m}.$$

Критерии оптимальности

Функцию

$$\boldsymbol{L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x),}$$

определенную при всех $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{\lambda}$, назовем функцией Лагранжа для задачи (1), (2).

Пара $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ называется седловой точкой функции Лагранжа, если

$$\boldsymbol{L(x^*,\lambda) \overset{(3)}{\leq} L(x^*,\lambda^*) \overset{(4)}{\leq} L(x,\lambda^*)\ \forall x \in R^n, \forall \lambda \geq 0.}$$

Критерии оптимальности

Теорема 14 (Теорема Куна-Таккера в нелокальной форме). **Вектор $x^* \in Q$ является оптимальным решением задачи выпуклого программирования тогда и только тогда, когда существует такой вектор λ^*, что пара (x^*, λ^*) является седловой точкой функции Лагранжа.**

Доказательство. Необходимость. Пусть $x^* \in Q$ — оптимальное решение. Тогда из теоремы 12 имеем

$$\exists \lambda^* \geq 0 : \left.\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x}\right|_{(x^*, \lambda^*)} = f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \varphi_i'(x^*) = 0 \text{ и}$$

$$\lambda_i^* \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}.$$

Достаточность. Как в теореме 1. ■