Лекция № 8 (часть 2)

20.10.09.

Переходим к главной цели курса:

будем учиться разрабатывать алгоритмы решения конечномерных задач оптимизации (т.е. всех оптимизационных задач: линейных, целочисленных, дискретных, нелинейных, кроме бесконечномерных).

Методы разработки алгоритмов решения конечномерных задач оптимизации = преобразование данных + + стратегия решения.

Преобразование – сведение исследуемой задачи к „координирующей" задаче.

Главное в преобразованим то, что координирующая задача в чём-то является более простой для решения (два примера простых приводятся ниже).

<u>Стратегия решения</u> - сведение „координирующей" задачи к последовательности связанных, но более простых задач.

Что такое метод решения? (Более формальное определение):

Метод решения = Набор преобразований + Стратегия решения

Преобразования: дуализация, проекция, внутренняя линеаризация, внешняя линеаризация, ...

Стратегии решения: декомпозиция, спуска (градиентный спуск, покоординатный спуск), разложение, сужение, релаксация, ветвей и границ, ветвей и отсечений, штрафных функций, ...

Примеры:

Рассмотрим задачу ЛП вида

$$(P') \quad \begin{array}{l} (c,x)\to\min \\ Ax\geq b \end{array}$$

Метод решения = Преобразование (вводим вспомогательные переменные) + Стратегия решения (симплекс-метод)

Преобразование: $x=x^1-x^2$, $x^1, x^2 \geq 0$ $\quad Ax\geq b \doteq Ax-Ez=b \Rightarrow$ $\quad z\geq 0$

получим координирующую задачу:

$$(c,-c)\begin{pmatrix}x^1\\x^2\end{pmatrix}\to min$$

$$Ax^1-Ax^2-Ez=b$$

$$x^1, x^2, z\geq 0,$$

которая является зад. ЛП в канонической форме. Решаем её симплексме методом.

Этот пример иллюстрирует ещё один аспект в трактовке понятия преобразования.

Преобразование - способ получения эквивалентной координирующей задачи, к которой применим один из известных методов решения.

В качестве примера рассмотрим как симплекс метод может быть получен с помощью ~~[illegible]~~ предлагаемого подхода.

Рассмотрим задачу:

$$(c, x) \to \min$$

$$(P) \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Симплекс-метод = тривиальное преобразование (задача уже в канонической форме) + Сужение (стратегия решения).

Сужение используется в задачах, в которых много неотрицательных переменных, как, например, в задаче P:

Занулить часть переменных, в данном случае небазисные переменные $x_j=0$, $j\in S'$. Если $z_{0j}\geq 0$, $j\in S'$ и $x_B=B^{-1}b\geq 0$, то текущее базисное решение оптимально. Иначе $\exists s\in S'$: $z_{0s}<0$. "Освобождаем" эту переменную от ограничения $x_s=0$ и решаем простую задачу:

$$-z_{0s}t+Cost=c_B B^{-1}b+Cost\to\max$$

при ограничениях

$$x_{i0}-z_{is}t\geq 0,\ i=\overline{1,m}$$

$$t\geq 0$$

Координирующая задача в данном случае совпадает с исходной задачей P. Наконец, задача P сводится с помощью стратегии решения сужение к семейству тривиальных задач ЛП от одной переменной.

Дуализация, как преобразование, - предмет теории двойственности. Неформально, применение дуализации означает замену исследуемой задачи её двойственной.

В качестве иллюстрации того как реализуется разработке (синтез) методов решения оптимизационных задач, рассмотрим следующие наборы (комбинации) преобразований и стратегий решения.

## Синтез методов решения

1. (проекция/ декомпозиция) – точный метод решения для задачи о (r, p)-центроиде
2. (проекция, внешняя линеаризация/релаксаци я) – декомпозиция Бендерса
3. (проекция / разложение) – алгоритмы разбиения Розена
4. (внутренняя линеаризация / сужение) – декомпозиция Данцига – Вулфа
5. (проекция / допустимые направления)

6. **(дуализация/ допустимые направления) – метод Такахаши**

7. **(внешняя линеаризация/ релаксация) – метод Келли**