Лекция № 9
27. 10. 2009.

Рассмотрим задачу:

$$\max_{x,y} f(x,y) \quad (1)$$

$$G(x,y) \geq 0,\ x \in X,\ y \in Y \quad (2)$$

Проекцией задачи (1)-(2) на пространство переменных x, по определению, является следующая оптимизационная задача

$$\max_{x \in X \cap V} \beta(x), \quad (20)$$

где $\beta(x) = \sup_y \{ f(x,y) \mid G(x,y) \geq 0,\ y \in Y \}$, $V = \{ x \mid \exists y \in Y : G(x,y) \geq 0 \}$.

Функция $\beta(x)$ называется функцией возмущения. Множество V является проекцией множества допустимых решений задачи (1)-(2) на пространство переменных X.

Лемма 10 Задача (1)-(2) недопустима или неограничена сверху тогда и только тогда, когда тоже самое выполняется для задачи (20).

Если (x^*, y^*) - оптимальное решение задачи (1)-(2), то x^*-оптимальное решение задачи (20). Если x^* - оптимальное решение (20) и супремум в $P(x^*)$ достигается на y^*, то (x^*, y^*)-опт-ое решение задачи (1)-(2).

- Док-во: Очевидно.

Чтобы работать эффективно с задачей (20) необходимо более ~~[illegible]~~ конструктивное её описание (представление). Чтобы получить такое представление, необходимо наложить на функции f, g и множества X, Y дополнительные ограничения. Например, если $Y \neq \emptyset$ и выпуклое множество, множество $Z_x = \{z \in R^m : g(x,y) \geq z$ для некоторого $y \in Y\}$ - замкнуто для каждого фиксированного $x \in X$, функции f и g вогнуты на Y для каждого фиксированного $x \in X$, функция f конечна на множестве $X \cap V$ и для каждого фиксированного $\bar{x} \in X \cap V$ задача:

$$f(\bar{x}, y) \to \max_{y \in Y}$$

$$g(\bar{x}, y) \geq 0$$

имеет седловую точку, то

$\bar{x} \in X \cap V \Leftrightarrow \bar{x}$ удовлетворяет системе неравенств (вообще говоря, бесконечной):

$$\sup_{y \in Y} \left(G(\bar{x}, y), \mu \right) \geq 0, \ \forall \mu : \mu \geq 0,$$

$$\sum_k \mu_k = 1,$$

$$\rho(x) = \inf_{u \geq 0} \sup_{y \in Y} \left\{ f(x,y) + (u, G(x,y)) \right\}$$

– для любого $x \in X \cap V$.

Таким образом применяя проекцию к задаче (1), (2) и используя известные результаты из теории двойственности получим эквивалентную координирующую задачу:

$$\max_{x \in X} \inf_{u \geq 0} \sup_{y \in Y} \left\{ f(x,y) + (u, G(x,y)) \right\}$$

$$\sup_{y \in Y} \left(\mu, G(x,y) \right) \geq 0 \ \forall \mu \geq 0,$$

$$\sum_k \mu_k = 1.$$

Декомпозиция для максиминной задачи:

$$z = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} R(x, y)$$

Пусть $\overline{Y} \subseteq Y$.

Шаг 1.

Решить релаксированную задачу:

$$\overline{z} = \max_{x \in X} \min_{y \in \overline{Y}} R(x, y).$$

Пусть x^* - оптимальное решение.

Шаг 2.

Решить подзадачу:

$$\underline{z} = \min_{y \in Y} R(x^*, y).$$

Пусть y^* - оптимальное решение.

Шаг 3.

Если $\overline{z} = \underline{z}$, то стоп. Тогда $z = \overline{z} = \underline{z}$ - искомое оптимальное значение.

Если $\bar{z} > \underline{z}$, то положим:
$\bar{Y} = \bar{Y} \cup \{y^*\}$ и перейти на шаг 1.

Лемма 11.

1. Если на шагах 1 и 2 существуют оптимальные решения x^* и y^*, то $\underline{z} \le z \le \bar{z}$.

2. Метод декомпозиции конечен, если на шагах 1 или 2 повторяются оптимальные решения.

Док-во:

$\bar{Y} \subseteq Y \Rightarrow \forall x \in X$

$$\inf_{y \in \bar{Y}} R(x,y) \ge \inf_{y \in Y} R(x,y) \Rightarrow$$

$$\bar{z} \ge z$$

$$\forall x^* \ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} R(x,y) \ge \inf_{y \in Y} R(x^*,y) \Rightarrow$$

$$\underline{z} \le z$$

2. Пусть на шаге 2 ми-

нимум в подзадаче достигается на множестве $\bar{Y}$. Тогда получим:

$$\underline{z} = R(x^*, y^*) = \min_{y \in Y} R(x^*, y) =$$

$$= \min_{y \in \bar{Y}} R(x^*, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in \bar{Y}} R(x, y) =$$

$= \bar{z}$. Следовательно на шаге 3 алгоритм остановится.

Замечание. Если X или/и Y конечны, то метод декомпозиции ~~[illegible]~~ конечен, если на шагах 1 и 2 всегда существуют оптимальные решения. Конечность метода можно гарантировать и в том случае, когда могут не сущ. опт-ое реш-я. Например, когда возможно опред-ть $\exists$ или нет опт-ое реш-ие. Если не сущ., то в качестве x^* или y^* необход. выбрать невстречавшееся ранее решение.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О (r, p)-ЦЕНТРОИДЕ

Рассмотрим ситуацию, когда две фирмы последовательно принимают решения о размещении предприятий. Пусть I – множество пунктов для размещения предприятий. Сначала на рынок выходит первая фирма — Лидер и открывает свое подмножество предприятий $S_0 \subset I$. Затем, зная это решение, конкурирующая фирма открывает собственные предприятия, подмножество $S_1 \subset I, S_0 \cap S_1 = \emptyset$. Каждый клиент выбирает из множества открытых предприятий $S_0 \cup S_1$ одно предприятие, согласно собственным предпочтениям. Если обслуживание j-го клиента приносит доход $d_j > 0$, Лидер открывает p предприятий, а Конкурент — r предприятий, то в зависимости от размещения этих предприятий рынок (множество клиентов) будет как-то разделен между двумя фирмами. Каждая фирма будет стремиться максимизировать свою долю рынка. Получаем игру двух лиц с противоположными интересами. Игроки неравноправны. Сначала делает ход Лидер. Он может размещать предприятия в любом месте. Затем делает ход Конкурент, зная выбор Лидера. Получаем игру Штаккельберга, в которой требуется максимизировать долю рынка (суммарный доход) первого игрока. Введем переменные задачи:
Лидер:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если Лидер в пункте } i \text{ открывает предприятие,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Конкурент:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если Конкурент в пункте } i \text{ открывает предприятие,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Клиенты:

$$u_j = \begin{cases} 1, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается из предприятия Лидера,} \\ 0, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается из предприятия Конкурента.} \end{cases}$$

При заданном векторе $x_i \in \{0, 1\}, i \in I$ определим множество

$$I_j(x) = \{i \in I | \, g_{ij} < \min_{l \in I}(g_{lj} | \, x_l = 1)\}, \quad j \in J.$$

Это множество задает пункты размещения предприятий, позволяющие Конкуренту *захватить* j-го клиента. С использованием введенных переменных соответствующая задача двухуровневого программирования записывается следующим образом:

Задача о (r, p)-центроиде:

$$\max_{x,y,u} \sum_{j\in J} d_j u_j : \sum_{i\in I} x_i = p, x_i \in \{0,1\}, i \in I,$$

$$(y,u) \in F^*(x),$$

где $F^*(x)$- множество оптимальных решений задачи:

$$max_{y,u} \sum_{j\in J} d_j(1-u_j)$$

$$\sum_{i\in I} y_i = r,$$

$$1-u_j \le \sum_{i\in I_j(x)} y_i\,, j \in J,$$

$$y_i + x_i \le 1, i \in I,$$

$$y_i, u_j \in \{0,1\}, i \in I, j \in J,$$

$$I_j(x) = \{i \in I | g_{ij} < min_{l\in I}(g_{lj}|x_l = 1)\}, j \in J.$$

Целевая функция задачи задает суммарный доход Лидера. Множество допустимых решений описывается с помощью задачи Конкурента. Вектор (x, y, u) – допустимое решение задачи, если (y, u) – оптимальное решение задачи Конкурента при фиксированном x, который удовлетворяет ограничениям задачи Лидера. На сегодняшний день эффективные методы решения данной задачи неизвестны.

В задаче Конкурента предполагалось, что нельзя открывать предприятия в тех местах, где уже есть предприятия Лидера, т.е. $S_0 \cap S_1 = \emptyset$. От этого условия можно отказаться. Удаление ограничения $y_i + x_i \leq 1$, $i \in I$ из задачи Конкурента не меняет его оптимального решения. Конкуренту невыгодно открывать предприятия в том месте, где уже есть предприятие Лидера. Это не дает ему дополнительных клиентов. Однако ситуация может измениться, если положить $I_j(x) = \{i \in I | g_{ij} \leq \min_{l \in I}(g_{lj} | x_l = 1)\}$, $j \in J$. В этом случае Лидер будет терять клиента даже в том случае, когда Конкурент открывает столь же предпочтительное предприятие, что и Лидер.

К решению данной задачи можно применить описанный выше метод декомпозиции:

Проектируем задачу на пространство переменных x:

$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}} \sum_{j\in J} \boldsymbol{d}_j \boldsymbol{u}_j : \ (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{x}),$$

Учитывая, что

$$\sum_{j\in J} \boldsymbol{d}_j \boldsymbol{u}_j + \sum_{j\in J} \boldsymbol{d}_j (\mathbf{1} - \boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{const},$$

получим

$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x}) = \min_{y:|y|=r} \min_{u} \sum_{j\in J} \boldsymbol{d}_j \boldsymbol{u}_j :$$

$$\mathbf{1} - \boldsymbol{u}_j \le \sum_{i\in I_j(x)} \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{J}, \ \ \boldsymbol{u}_j \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}, \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{J},$$

очевидно, что

$$\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{x}) \neq \emptyset\} = \boldsymbol{B}^n, \quad \boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x} : |\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{p}\}.$$

Таким образом, получили эквивалентную координирующую задачу:

$$\max_{x\in X\cap V} \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x}) = \max_{x:\,|x|=p} \min_{y:|y|=r} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$