ЛЕКЦИЯ № 11
Обзор

Экономическая интерпретация теории двойственности, функции Лагранжа и условий Куна–Таккера

Задачи классического вариационного исчисления

Экономика "Робинзона Крузо":

– Только одно лицо принимающее решение (ЛПР).

– Одна целевая функция.

Экономика "общественного обмена":

– Несколько ЛПР принимающих решение (ЛПР).

– У каждого ЛПР может быть своя целевая функция.

– Вынуждены взаимодействовать для достижения результата.

Промышленность – рынок: конкурентное взаимодействие

– Промышленность управляет уровнем производства $x = (x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n)$ продукции (n – количество видов продукции, x_j – уровень производства j-го вида продукции).

– $f(x_1, \ldots, x_n)$ – издержки производства при заданном его уровне x.

– Пусть $\varphi_i^1(x)$ – расход ресурса i при уровне производства x, b_i объём i-го ресурса, $i = 1, \cdots, m$. $\varphi_i(x) = \varphi_i^1(x) - b_i$.

Промышленность – рынок: конкурентное взаимодействие

– $\varphi_i(x) \leq 0 \equiv$ остаются излишки сырья, $\varphi_i(x) > 0 \equiv$ первоначального количества сырья b_i недостаточно для достижения уровня производства, равного x.

– Промышленность стремится минимизировать свои издержки, возникающие при производстве продукции для рынка, а также при покупке сырья, недостающего для производства. Частично промышленность может уменьшить свои издержки за счёт продажи тех ресурсов, которые в избытке.

Промышленность – рынок: конкурентное взаимодействие

– Рынок управляет ценами на ресурсы, которые промышленность приобретает или продаёт на рынке. Пусть $\lambda_i \geq 0$ – цена, по которой единица сырья вида i покупается или продаётся на рынке, $i = 1, \cdots, m$.

– Рынок стремится максимизировать свою прибыль, которая складывается из дохода, который он получает, при продаже ресурсов производству и затрат, которые он несёт при покупке избыточных для промышленности ресурсов.

Игра:

Игрок – промышленность выбирает уровень производства продукции $x = (x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n)$.

Игрок – рынок выбирает цены на ресурсы $\lambda_i \geq 0, i = 1, \cdots, m$.

Итог игры

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x)$$

Итак:

1. Итог игры (значение функции Лагранжа) не может быть однозначно определён ни промышленностью, ни рынком.

2. С точки зрения первого игрока – промышленности, значение функции Лагранжа представляет собой суммарные издержки производства. Они складываются из издержек на производство конечной продукции $\boldsymbol{f(x)}$, затрат на покупку недостающего для производства сырья и дохода от продажи излишков сырья.

Промышленность – рынок: конкурентное взаимодействие

3. С точки зрения второго игрока – рынка, значение функции Лагранжа представляет собой прибыль рынка, которая складывается из доходов за продажу сырья производству и продажу промышленной продукции, которые не могут быть ниже издержек производства (доход промышленности от продажи излишков сырья для рынка затраты).

Проблема:

1. Интересы игроков сосредоточены на одном и том же объекте: на функции $\boldsymbol{L(x, \lambda)}$.

2. Но цели прямо противоположны: первый хочет минимизировать, второй максимизировать.

3. Основная проблема в том, что ни один не контролирует значение величины $\boldsymbol{L(x, \lambda)}$. Т.е. необходимо сделать два выбора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ для того, чтобы значение функции Лагранжа определилось. И вдобавок их выборы независимы.

Промышленность – рынок: конкурентное взаимодействие

Выход: Рассмотреть игры, связанные с данной, но в которых не возникает неопределёности.

Мажорантная игра: Первый игрок фиксирует уровень производства $\boldsymbol{x}$, а рынок максимизирует свой доход: $\sup\limits_{\lambda\geq 0} L(x,\lambda)$. Т.е. рынок формирует целевую функцию $g(x)$ прямой задачи. Зная это Производитель стремится выбрать такой план игры, чтобы найти

$$\nu_1 = \inf_{x}\sup_{\lambda\geq 0} L(x,\lambda).$$

Минорантная игра: Второй игрок выбирает цены $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$, а производство ищет минимум издержек: $\inf_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$. Т.е. промышленность формирует целевую функцию $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ двойственной задачи. Зная это рынок стремится выбрать такие цены, чтобы найти

$$\boldsymbol{\nu}_2 = \sup_{\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}} \inf_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}).$$

Промышленность – рынок: конкурентное взаимодействие

Таким образом, в мажорантной игре решается прямая задача, а в минорантной игре двойственная задача.

Т.к. $\boldsymbol{\nu_2 \leq \nu_1}$, то промышленности более интересна 2 игра, а рынку 1 игра. Поэтому, если неравенство строгое,то ситуация неустойчивая, неравновесная. Каждый из игроков стремится отдать инициативу и сыграть в "свою"игру.

Промышленность – рынок: конкурентное взаимодействие

Если у функции Лагранжа имеется седловая точка $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$, то это означает, что в рассматриваемой модели существует экономическое конкурентное равновесие, при котором

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) = \min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)$$

с уровнем производства $\boldsymbol{x}^*$ и ценами на сырьё $\boldsymbol{\lambda}^*$.

Промышленность – рынок: конкурентное взаимодействие

Это означает, что никакое изменение уровня производства $\boldsymbol{x}$ промышленностью не может уменьшить издержки производства. А с другой стороны это означает, что никакая игра с ценами на сырьё не может увеличить эти издержки.

Промышленность – рынок: конкурентное взаимодействие

На эту ситуацию можно взглянуть и с позиций рынка. То есть, никакое изменение уровня производства $\boldsymbol{x}$ промышленностью не может уменьшить доходы рынка, а с другой стороны никакие манипуляции с ценами на сырьё не могут увеличить эти доходы. Таким образом, состояние равновесия приводит к устойчивому рынку.

Теорема 10 (Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера). Пусть x^* — локальный экстремум задачи (1), (2), $f \in C^1$, $\varphi_i \in C^1, i = \overline{1, m}$, вектора $\varphi_i'(x^*), i \in I(x^*)$, линейно независимы. Тогда найдутся такие множители

$$\lambda_i^* \geq 0, i = \overline{1, m}, \tag{1}$$

что

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \varphi_i'(x^*), \tag{2}$$

$$\lambda_i^* \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}. \tag{3}$$

Экономическая интерпретация условий (1) –(3) в рамках концепции устойчивого рынка.

1. Условия (1) тривиальны, т.к. величины $\boldsymbol{\lambda}_i^*$ играют роль цен.
2. Из определения седловой точки имеем:

$$\boldsymbol{L(x^*, \lambda^*) = \min_x L(x^*, \lambda^*).}$$

Т.е. вектор $\boldsymbol{x^*}$ экстремум функции $\boldsymbol{L(x, \lambda^*)} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\left.\frac{\partial L(x, \lambda^*)}{\partial x}\right|_{x^*} = f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \varphi_i'(x^*) = 0.}$$

С экономической точки зрения величина $\boldsymbol{-f'(\lambda^*)}$ – маргинальные издержки от производства продукции, а $\boldsymbol{\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i'(x^*)}$ – маргинальные доходы от продажи сырья. Т.е. в точке оптимума маргинальные издержки совпадают с маргинальными доходами, в чём и заключается экономический смысл соотношений (2).

3. Очевидно, что в рамках устойчивого рынка не может быть недостатка какого-нибудь ресурса (смотрите доказательство теоремы 1 и определение минорантной игры). Таким образом при анализе соотношений (3) остаётся рассмотреть случай

$$\boldsymbol{\varphi_i'(x^*) < 0} \text{ и } \boldsymbol{\lambda^* > 0}$$

Тогда рынок может увеличить издержки производства уменьшая цену $\boldsymbol{i}$-го ресурса. Это противоречит равновесности рынка.