Лекция № 12

Задачи классического вариационного исчисления

5 мая 2014

Постановка задачи

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) \to \inf(\sup), \qquad (1)$$

$$G_1(t,x(t),\dot{x}(t),u(t)) = 0,\ G_2(t,x(t),\dot{x}(t),u(t)) \le 0, \qquad (2)$$

$$u(t) \in U(t) \in R^r, \qquad (3)$$

$$(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)) \in \Gamma, \qquad (4)$$

Граничные условия (4)

– *закрепленные*, когда значения траектории закреплены на обоих концах отрезка $[t_0,t_1]$, при этом сам отрезок предполагается фиксированным: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$;

– *периодические*, когда отрезок $[t_0,t_1]$ фиксирован и фазовая траектория принимает равные значения на концах.

Задача Лагранжа с ограничениями в разрешенной форме и фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств называют следующую задачу:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\,dt \to \inf, \qquad (5)$$

$$\dot{x} = \varphi(t, x(t), u(t)), \qquad (6)$$

$$g_1(t, x(t)) = 0,\; g_2(t, x(t)) \le 0, \qquad (7)$$

$$h_0(t_0, x(t_0)) = 0,\; h_1(t_1, x(t_1)) = 0, \qquad (8)$$

$$u(t) \in U. \qquad (9)$$

Пара называется допустимой в задаче, если она удовлетворяет ограничениям (6) и (7) и граничным условиям (8).

Соглашения и определения:

В задаче Лагранжа (5) – (9) время фиксировано; $(x(t),u(t)) \in C_1^n([t_0,t_1]) \times C^r([t_0,t_1])$. Исследование простейших задач проводится в банаховых пространствах $C_1^n([t_0,t_1])$.

Локальный минимум в пространстве $C_1^n \times C^r$ в случае задачи Лагранжа, или в пространстве C_1^n в случае простейших задач, называется слабым:

Пара $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ доставляет слабый локальный минимум функционалу $J(x(\cdot),u(\cdot))$ в задаче (5) – (9), если найдется такое число $\varepsilon > 0$, что для любой допустимой пары $(x(\cdot),u(\cdot)) \in C_1^n \times C^r$ такой, что

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_1 < \varepsilon, \; \|u(\cdot) - u_*(\cdot)\|_0 < \varepsilon,$$

выполняется неравенство

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) \ge J(x_*(\cdot),u_*(\cdot)).$$

Соглашения и определения:

Локальный экстремум по x в топологии пространства C_1^n называется сильным:

допустимая пара $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ дает сильный локальный минимум функционалу J в задаче (6) – (9), если найдется такое число $\varepsilon > 0$, что для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$, для которой

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_0 < \varepsilon,$$

выполняется неравенство

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \geq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)).$$

Аналогичным образом определяется сильный минимум для простейшей векторной задачи (5).

Элементарный вывод необходимых условий экстремума для простейших задач классического вариационного исчисления: необходимые условия Эйлера

$$\left.\begin{aligned} &J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) \to \inf, \\ &(x(t_0), x(t_1)) \in \Gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

$L(t, x, y)$ непрерывно дифференцируема в некоторой области U пространства R^3. Задачу (10) будем исследовать на слабый экстремум, то есть в пространстве $C_1([t_0, t_1])$.

Первый этап: доказать, что функционал J обладает первой вариацией в любой точке $x_*(\cdot)$ такой, что точки $(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, принадлежат области U, и получить необходимое условие в терминах первой вариации.

Рассмотрим функцию одной переменной

$$\varphi(\lambda) = J(x_*(\cdot) + \lambda x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \psi(t,\lambda)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x_*(t) + \lambda x(t), \dot{x}_*(t) + \lambda \dot{x}(t))\, dt, \tag{11}$$

порожденную вариацией $x(t,\lambda) = x_*(t) + \lambda x(t)$ точки $x_*(\cdot)$ по направлению точки $x(\cdot)$. Функция $\psi(t,\lambda)$ является дифференцируемой по λ при достаточно малых λ, и при этом производная $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$ непрерывна, так как $\frac{\partial \psi(t,\lambda)}{\partial \lambda} = L_x(t, x_*(t) + \lambda x(t),$ $\dot{x}_*(t) + \lambda \dot{x}(t))x(t) + L_{\dot{x}}(t, x_*(t) + \lambda x(t), \dot{x}_*(t) + \lambda \dot{x}(t))\dot{x}(t).$

Следовательно, можно дифференцировать под знаком интеграла в (11) и получим

$$\varphi'(0) = \delta J(x_*(\cdot), x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (q(t)x(t) + p(t)\dot{x}(t))\, dt,$$

где

$$q(t) = L_x(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)),\ p(t) = L_{\dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)).$$

Фун. $x_*(t)$ допустима →

для любой функции $x(t)$, принадлежащей подпространству

$$L_0 = \{x(t) \in C_1([t_0, t_1]) \mid x(t_0) = x(t_1) = 0\},$$

функция $x_*(t) + \lambda x(t)$ будет проходить через те же граничные точки, что и функция $x_*(t)$ →

если $x_*(t)$ есть решение задачи (10), то при условии, $x(t) \in L_0$, функция (11), должна иметь минимум в точке нуль. В итоге получаем необходимое условие экстремума

$$\varphi'(0) = \delta J(x_*(\cdot), x(\cdot)) = 0, \text{ для всех } x(\cdot) \in L_0. \qquad (12)$$

Первый этап вывода закончен.

Второй этап: преобразовать выражение для первой вариации на подпространстве L_0 интегрированием по частям. Существует два подхода: по Лагранжу, когда интегрируют по частям второе слагаемое, и, по Дюбуа-Раймону, когда интегрируют первое слагаемое.

Преобразование по Лагранжу предполагает дополнительное условие гладкости: $p(t) = L_{\dot{x}}\Big|_{x_*(t)}$ является непрерывно дифференцируемой. Теперь проинтегрируем по частям второе слагаемое в выражении для первой вариации при условии, что $x(\cdot) \in L_0$. Получим:

$$\delta J(x_*(\cdot), x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} a(t)x(t)\,dt, \tag{13}$$

где

$$a(t) = q(t) - \dot{p}(t) = \left(-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x \right) \Big|_{x_*(t)} .$$

Преобразование первой вариации по Дюбуа-Раймону:

Для этого проинтегрируем по частям первое слагаемое на пространстве L_0:

$$\int_{t_0}^{t_1} q(t)x(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} - d\left(\int_{t}^{t_1} q(\tau)\, d\tau \right) x(t) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{t}^{t_1} q(\tau)\, d\tau \right) \dot{x}(t)\, dt$$

и получим, что выражение для первой вариации имеет следующий вид:

$$\delta J(x_*(\cdot), x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} b(t)\dot{x}(t)\, dt, \qquad (14)$$

где

$$b(t) = \int_t^{t_1} q(\tau)\, d\tau + p(t) = \int_t^{t_1} L_x \Big|_{x_*(\tau)}\, d\tau + L_{\dot{x}} \Big|_{x_*(t)}.$$

Третий этап:

Лемма 13 (Лагранжа). Пусть функция $a(t)$ непрерывна на отрезке $[t_0, t_1]$.

Предположим, что для любой непрерывно дифференцируемой функции $x(t)$,

обращающейся в нуль на концах отрезка $[t_0, t_1]$, выполнено равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)x(t)\, dt = 0,$$

тогда $a(t) \equiv 0$.

Доказательство. В силу непрерывности функции $a(t)$ достаточно проверить, что $a(t) \equiv 0$ во внутренних точках отрезка $[t_0, t_1]$.

Пусть существует внутренняя точка отрезка τ такая, что $a(\tau) \neq 0$ (без ограничения общности можно считать, что $a(\tau) > 0$).

Выберем $\varepsilon > 0$ такое, чтобы отрезок $\Delta_0 = [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$ целиком лежал внутри отрезка $[t_0, t_1]$, а с другой стороны, чтобы на этом отрезке функция $a(t)$ была больше некоторого положительного числа α.

Возьмем теперь любую неотрицательную, но не тождественно равную нулю финитную функцию из $C_1([t_0, t_1])$ с носителем в Δ_0. Например, в качестве такой функции можно взять

$$\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}(t, \tau, \varepsilon) = \begin{cases} (t - \tau + \varepsilon)^2 (t - \tau - \varepsilon)^2, & t \in \Delta_0, \\ 0, & t \notin \Delta_0. \end{cases}$$

Применив теорему о среднем из интегрального исчисления, получим:

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)\widetilde{x}(t)\,dt = \int_{\Delta_0} a(t)\widetilde{x}(t)\,dt \geq \alpha \int_{\Delta_0} \widetilde{x}(t)\,dt > 0,$$

что противоречит условиям леммы. ■

Итак, из леммы и соотношений (12) и (13) получим:

если $x_*(t)$ есть решение задачи (10), то должно выполняться соотношение

$$\left(-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x\right)\Bigg|_{x_*(t)} = -\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) + L_x(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) = 0,$$

называемое **уравнением Эйлера задачи (10) в форме Лагранжа**.

Лемма 14 (Дюбуа-Раймона). Пусть функция $b(t)$ непрерывна на отрезке $[t_0, t_1]$. Предположим, что для любой непрерывной функции $v(t)$, в среднем равной нулю, выполнено равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} b(t)v(t)\,dt = 0.$$

Тогда $b(t) = b_0 = const$.

Доказательство. Напомним, что функция $v(t)$ называется в среднем равной нулю, если

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt = 0.$$

Допустим, что заключение леммы неверно.

Тогда должны найтись две точки τ_1 и τ_2, лежащие внутри отрезка $[t_0, t_1]$, для которых $b(\tau_1) \neq b(\tau_2)$, скажем, $\tau_1 < \tau_2$ и $b(\tau_{1)} > b(\tau_2)$. Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы интервалы

$$\Delta_1 = [\tau_1 - \varepsilon, \tau_1 + \varepsilon] \text{ и } \Delta_2 = [\tau_2 - \varepsilon, \tau_2 + \varepsilon]$$

не пересекались друг с другом, лежали внутри отрезка $[t_0, t_1]$, и при этом

выполнялось неравенство:

$$\beta_1 = \min_{t \in \Delta_1} b(t) > \max_{t \in \Delta_2} b(t) = \beta_2.$$

Рассмотрим теперь любую непрерывную функцию $\widetilde{v}(t)$, которая вне

множества $\Delta_1 \bigcup \Delta_2$ равна нулю, на Δ_1 неотрицательна и не тождественно равна нулю, а на Δ_2 принимает значения противоположного знака. В качестве примера нужной функции можно взять

$$\widetilde{v}(t)=\widetilde{v}(t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)=\begin{cases} (t-\tau_1+\varepsilon)^2(-t+\tau_1+\varepsilon)^2, & t\in\Delta_1, \\ -(t-\tau_2+\varepsilon)^2(-t+\tau_2+\varepsilon)^2, & t\in\Delta_2, \\ 0, & t\in[t_0,t_1]\setminus(\Delta_1\bigcup\Delta_2). \end{cases}$$

Снова по теореме о среднем получим

$$\int_{t_0}^{t_1} b(t)\widetilde{v}(t)\,dt=\int_{\Delta_1} b(t)\widetilde{v}(t)\,dt+\int_{\Delta_2} b(t)\widetilde{v}(t)\,dt\geq(\beta_1-\beta_2)\int_{\Delta_1}\widetilde{v}(t)\,dt>0.$$

Противоречие с условием доказывает лемму. ■

Сопоставив соотношения (12) и (14) с леммой Дюбуа-Раймона, получаем, что если $x_*(t)$ является решением задачи (10), то должно выполняться соотношение

$$\int_t^{t_1} q(\tau)\, d\tau + p(t) \equiv c_0 \,,$$

или, подробнее,

$$\int_{t}^{t_1} L_x(\tau, x_*(\tau), \dot{x}_*(\tau))\, d\tau + L_{\dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) = c_0 .$$

Это соотношение называют **уравнением Эйлера в форме Дюбуа-Раймона.**

Первое слагаемое в последнем соотношении можно продифференцировать, откуда вытекает, что и второе слагаемое является непрерывно дифференцируемым. Итак, приходим к следующему утверждению.

Предложение 1.

Пусть в задаче (10) лагранжиан L непрерывно дифференцируем в некоторой области $U \subset R^3$ такой, что ей принадлежат точки $(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, где $x_*(\cdot) \in C_1([t_0, t_1])$. Для того чтобы функция $x_*(t)$ доставляла слабый локальный минимум в задаче (10), необходимо, чтобы было выполнено уравнение Эйлера в форме Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x_*(t),\dot{x}_*(t))+L_x(t,x_*(t),\dot{x}_*(t))=0. \qquad (15)$$

Функции $x_*(t)$, вдоль которых выполнено уравнение Эйлера, называются экстремалями.

Приведем несколько частных случаев, когда у уравнения Эйлера имеются интегралы.

Предложение 2.

Если функция L не зависит от $\dot{x}$, то для экстремальности $x_*(t)$ необходимо, чтобы было выполнено соотношение

$$L_x(t,x_*(t))=0,\ t\in[t_0,t_1].$$

Предложение 3. Если функция L не зависит от x, то уравнение Эйлера допускает интеграл импульса:

$$p(t) = L_{\dot{x}}(t, \dot{x}_*(t)) \equiv p_0 = const.$$

Предложение 4. Если функция L не зависит от t, то уравнение Эйлера допускает интеграл энергии:

$$H(t) = p(t)\dot{x}_*(t) - L(x_*(t), \dot{x}_*(t)) =$$
$$L_{\dot{x}}(x_*(t), \dot{x}_*(t))\dot{x}_*(t) - L(x_*(t), \dot{x}_*(t)) \equiv H_0 = const.$$

Предложения 1 и **2** непосредственно вытекают из (15). Для доказательства **Предложения 3** надо взять производную $\dfrac{dH}{dt}$ и, воспользовавшись (15), показать, что она равна нулю.

Уравнение Эйлера для задачи (10) является полным аналогом классики анализа − уравнения Ферма. Поэтому простейшая задача классического вариационного исчисления есть бесконечномерный аналог задач на отыскание безусловного экстремума функций нескольких переменных.

Но в задачах вариационного исчисления возникают дополнительные эффекты в сравнении с классическим анализом.