Лекция № 14

Задачи оптимального управления:

1. Доказательство принципа максимума для линейной задачи быстродействия

2. Достаточность принципа максимума

Принцип максимума для линейной задачи быстродействия:

Пусть $H(x,u,P) = (P, f(x,u))$ – ***функция Понтрягина***, а

$$\dot{P}_k = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_k}(x(t),u(t))P_i,\ k = 1,\ldots,n, \qquad (3)$$

сопряженная система уравнений для соответствующей пары $(x(t),u(t))$.

Из линейности и однородности системы → (при любых начальных условиях для P_k, $k = 1,\ldots,n$,)

$\exists$ единственное решение этой системы (определенное на всем отрезке, на котором определены управление $u(t)$ и траектория $x(t)$). Функции $P_1(t),\ldots,P_n(t)$ непрерывны и имеют всюду, кроме конечного числа точек разрыва управления $u(t)$, непрерывные производные по t.

Теорема 1 (принцип максимума).

Пусть $((x_*(t), u_*(t)),\ t \in [t_0, t_1]$ – оптимальный управляемый процесс. Тогда существует ненулевая непрерывная вектор-функция $P(t) = (P_1(t), \ldots, P_n(t))$ такая, что справедливы следующие утверждения:

а) $\dot{P}_k = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_k}(x_*(t), u_*(t))P_i,\ k = 1, \ldots, n;$

б) $H(x_*(t), u_*(t), P(t)) = \max_{u \in U} H(x_*(t), u, P(t)),\ t \in [t_0, t_1];$

в) $H(x_*(t_1), u_*(t_1), P(t_1)) \geq 0.$

Соглашения:

Пусть f линейна $\longrightarrow$ система (1) записывается:

$$\text{в виде } \dot{x} = Ax + Bu \quad \text{или} \quad \dot{x}^i = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{\alpha}^{i} x_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^{r} b_{\beta}^{i} u_{\beta}.$$

В дальнейшем предполагается, что U – выпуклый многогранник в R^r,

$0 \in U$, и 0 не является вершиной U.

Теорема 2 (принцип максимума для линейной задачи быстродействия).

Пусть $(x_*(t), u_*(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ – оптимальный управляемый процесс. Тогда существует такое непрерывное нетривиальное решение $P(t)$ сопряженной системы $\dot{P} = -PA$, что справедливо

$$P(\tau)Bu_*(\tau) = \max_{u \in U} P(\tau)Bu, \; \tau \in [t_0, t_1]. \tag{4}$$

Управление $u_*(t)$ удовлетворяет принципу максимума, если существует нетривиальное решение сопряженной системы (3) и выполняется равенство (4).

Доказательство принципа максимума для линейной задачи быстродействия

Пусть $T > 0$ – верхняя граница на длины интервалов, на которых будут рассматриваться управления. Будем говорить, что точка $\bar{x}$ принадлежит ***сфере достижимости*** (см. рис. 6), если на интервале $[t_0, t_1]$ существует допустимое управление $u(t)$ и соответствующая ему траектория $x(t)$ такие, что $x(t_0) = \bar{x}$, $x(t_1) = 0$, $t_1 - t_0 \leq T$.

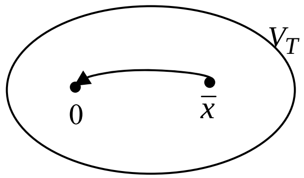

Рис. 6

Доказательство принципа максимума для линейной задачи быстродействия

Лемма 1. Сфера достижимости V_T является выпуклым множеством.

Доказательство.

Пусть $\bar{x}_0, \tilde{x}_0 \in V_T$, т.е. существует допустимое управление $\bar{u}(t)$, $t \in [t_0, \bar{t}_1]$, где $\bar{t}_1 \le t_0 + T$, которое переводит фазовую точку x из положения $\bar{x}_0$ в точку 0.

Аналогично, существует допустимое управление $\tilde{u}(t)$, $t \in [t_0, \tilde{t}\,]$, где $\tilde{t}_1 \le t_0 + T$, которое переводит фазовую точку x из положения $\tilde{x}_0$ в точку 0.

Можно считать, что $\bar{t}_1 = t_0 + T$. В противном случае решим систему (2) с начальным условием $\bar{x}(\bar{t}_1) = 0$, доопределив управление $\bar{u}(t)$, как показано на рис. 7:

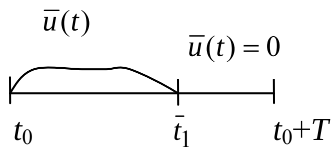

Рис. 7

Получим, что $\overline{x}(t)=0$ на интервале $[\bar{t}_1, t_0+T]$.

Аналогично, для $\widetilde{u}(\cdot)$ и $\widetilde{x}(\cdot)$можно считать, что $\widetilde{t}_1 = t_0+T$.

Пусть $y_0 = \lambda \overline{x}_0 + (1-\lambda)\widetilde{x}_0$, $0 \le \lambda \le 1$. Тогда управление $u^*(t) = \lambda \overline{u}(t) + (1-\lambda)\widetilde{u}(t)$, определенное на интервале $[t_0, t_0+T]$, является допустимым управлением.

Ему соответствует траектория $x^*(t) = \lambda \overline{x}(t) + (1-\lambda)\widetilde{x}(t)$, по которой фазовая точка переходит из начального положения $x^*(t_0) = \lambda \overline{x}_0 + (1-\lambda)\widetilde{x}_0 = y_0$ в конечное положение $x^*(t_0+T) = 0$.■

Доказательство принципа максимума для линейной задачи быстродействия

Лемма 2. Если x_0 – внутренняя точка V_T, то из x_0 можно перейти в точку 0 за время строго меньше T.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in Int V_T$. Так как $Int \overline{V_T} \subseteq V_T$, то найдутся точки y_j из V_T, такие, что симплекс, образованный этими точками из сферы достижимости, как показано на рис. 8, содержит x_0. Из леммы Каратеодори следует, что их не более чем *n+1* точка.

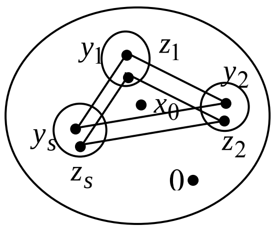

Рис. 8

Доказательство принципа максимума для линейной задачи быстродействия

Тогда по определению множества V_T существуют допустимые управления $u_s(t)$ на интервале $[t_0, t_0 + T]$ такие, что $x_s(t_0) = y_s$, $x_s(t_0 + T) = 0$, $s = 1, \dots, n+1$.

Так как функции $x_s(t)$ непрерывны, то существует $\varepsilon > 0$, для которого $x_0 \in Int\, Co\{x_1(t_0 + \varepsilon), \dots, x_{n+1}(t_0 + \varepsilon)\}$.

Но все точки $x_s(t_0 + \varepsilon)$, $s = 1, \dots, n+1$, лежат в сфере достижимости $V_{T-\varepsilon}$. Это означает, что $x_0 \in V_{T-\varepsilon}$. ■

Доказательство принципа максимума для линейной задачи быстродействия

Лемма 3. Пусть $u(t)$ – допустимое управление на интервале $[t_0, t_1]$, $x(t)$ – соответствующее решение, $P(t)$ – произвольное решение сопряженной системы $\dot{P} = -PA$ на данном интервале. Тогда во всех точках непрерывности управления $u(t)$ справедливы следующие равенства:

$$\frac{d}{dt}(P(t)x(t)) = P(t)Bu(t),$$

$$P(t_1)x(t_1) - P(t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} P(t)Bu(t)dt.$$

Доказательство принципа максимума для линейной задачи быстродействия

Доказательство.

$$\frac{d}{dt}(P(t)x(t)) = \dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x}(t) = -P(t)Ax(t) + P(t)(Ax(t) + Bu(t)) =$$

$$= P(t)Bu(t). \blacksquare$$

Доказательство принципа максимума для линейной задачи быстродействия

Докажем, что оптимальное управление удовлетворяет (4), т.е.

$$P(\tau)Bu_*(\tau) = \max_{u \in U} P(\tau)Bu, \tau \in [t_0, t_1].$$

Пусть $u(t)$ – оптимальное управление на интервале $[t_0, t_1]$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = 0$. Положим $T = t_1 - t_0$. Из леммы 2 следует, что x_0 – граничная точка сферы достижимости V_T. Следовательно, по теореме отделимости существует вектор $d \neq 0$ такой, что для всех векторов x из множества V_T выполняется неравенство $d(x - x_0) \geq 0$. Рис. 9 иллюстрирует сказанное выше.

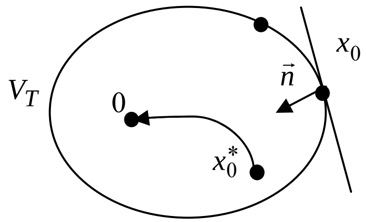

Рис. 9

Доказательство принципа максимума для линейной задачи быстродействия

Пусть P – решение $\dot{P} = -PA$ с начальным условием $P(t_0) = \vec{n}$. Нужно доказать равенство $P(t)Bu(t) = \max\limits_{u \in U} P(t)Bu$ для всех t из интервала $[t_0, t_1]$.

Действительно, допустим противное: пусть существует $\bar{\tau} \in [t_0, t_1]$ такое, что $P(\bar{\tau})Bu(\bar{\tau}) < \max\limits_{u \in U} P(\bar{\tau})Bu$.

Т.е. существует такое $v \in U$, что $P(\bar{\tau})Bu(\bar{\tau}) < P(\bar{\tau})Bv$.

Из непрерывности управления следует, что существует интервал $[\tau_0, \tau_1] \subset [t_0, t_1]$ такой, что $P(\tau)Bu(\tau) < P(\tau)Bv$ для всех $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$.

Определим управление на интервале $[t_0, t_1]$

$$u^*(t) = \begin{cases} v, & t \in (\tau_0, \tau_1], \\ u(t), & [t_0, t_1] \setminus (\tau_0, \tau_1]. \end{cases}$$

Очевидно, что u^* – допустимое управление. Выберем траекторию $x^*(t)$ соответствующую u^* такую, что $x^*(t_1) = 0$. Пусть $x_0^* = x^*(t_0)$. Тогда $x_0^* \in V_T$ и, следовательно, $d(x_0^* - x_0) \geq 0$.

Имеем следующие наборы функций: $u(t), x(t), P(t)$ и $u^*(t), x^*(t), P(t)$.

Из леммы 3 имеем:

$$d(x_0^* - x_0) = P(t_0)(x^*(t_0) - x(t_0)) = (P(t_1)x(t_1) - P(t_0)x(t_0)) -$$

$$-(P(t_1)x^*(t_1) - P(t_0)x^*(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} [P(t_1)Bu(t) - P(t)Bu^*(t)]\, dt =$$

$= \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} [P(\tau)Bu(\tau) - P(\tau)Bv]\, d\tau < 0.$ Противоречие с неравенством, которое следует из теоремы отделимости. ■

Достаточность принципа максимума

Пусть X – конечномерное пространство, $Y \subseteq X$ – подпространство, $A: X \to X$ – линейное преобразование. Будем говорить, что Y – подпространство инвариантное относительно A, если $A(Y) \subseteq Y$. Когда $Y \neq X$, то Y – собственное подпространство.

Пусть $a \in X$. Элемент a принадлежит собственному инвариантному подпространству Y тогда и только тогда, когда вектора $\{a, Aa, \ldots, A^{k-1}a\}$ линейно зависимы.

Достаточность принципа максимума

Будем говорить, что для задачи быстродействия выполнено ***условие общности положения***, если

для каждого вектора w параллельного некоторому ребру многогранника U, вектор Bw не принадлежит никакому собственному инвариантному подпространству A, то есть вектора $\{Bw, ABw, \ldots, A^{k-1}Bw\}$ образуют линейно независимую систему.

Замечание. Множество векторов, для которых $\det\{Bw, ABw, \ldots, A^{k-1}Bw\} = 0$, является нигде неплотным.

Следовательно, добиться выполнения условия общности положения можно всегда сколь угодно малым сдвигом.

(Множество называется нигде неплотным, если его дополнение всюду плотно).

Лемма 4. Пусть $\mathrm{P(t)}$ – нетривиальное решение сопряженной системы $\dot{\mathrm{P}} = -\mathrm{PA}$, $a \neq 0$ такое, что $P(\tau)a = 0$ для всех $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$. Тогда a принадлежит некоторому собственному инвариантному подпространству относительно преобразования A.

Доказательство. Пусть $\mathrm{y} \in \mathrm{Y}$, где $Y = \{y \in R^n : P(\tau)y = 0\,, \tau \in (\tau_0, \tau_1)\}$. Покажем, что Y – собственное подпространство инвариантное относительно A.

Действительно $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{P(t), y}) = 0$, что эквивалентно условию $\dot{\mathrm{P}}(\mathrm{t})\mathrm{y} = 0$. Т.е. $-\mathrm{P(t)Ay} = 0$.

Таким образом $\mathrm{Ay} \in \mathrm{Y}$ и $Y \neq R^n$, так как существует $\bar{\tau} \in (\tau_0, \tau_1)$ такое, что $P(\bar{\tau}) \neq 0$. Тогда $P(\bar{\tau}) \notin Y$, так как $P(\bar{\tau})P(\bar{\tau}) \neq 0$. ■

Достаточность принципа максимума

Теорема 3. Пусть $u(t)$ – допустимое управление, заданное на отрезке $[t_0, t_1]$, $x(t)$ – соответствующая траектория, удовлетворяющая начальным условиям $\mathrm{x}(\mathrm{t}_0) = \mathrm{x}_0$ и $\mathrm{x}(\mathrm{t}_1) = 0$. Тогда для оптимальности управления необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло принципу максимума.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 2 (принцип максимума).

Достаточность. Пусть существует $P(t) \neq 0$ такое, что $\dot{P} = -PA$ и $\max\limits_{u \in U} P(t)Bu = P(t)Bu(t)$. Докажем, что лучшего управления, чем $u(t)$ не существует, то есть не существует другого управления u^*, которое переводит фазовую точку x из положения x_0 в положение 0 за меньшее время, чем $(t_1 - t_0)$.

Предположим противное: пусть на интервале $[t_0, t^*]$ определен управляемый процесс $(u^*(t), x^*(t))$ такой, что $x^*(t_0) = x_0$, $x^*(t^*) = 0$ и $t^* < t_1$. Очевидны следующие неравенства:

1) $P(t)Bu(t) \geq 0,\ t \in [t_0, t_1]$, так как $0 \in U$;

2) $P(t)Bu(t) \geq P(t)Bu^*(t),\ t \in [t_0, t^*]$, поскольку $u^*(t)$ удовлетворяет принципу максимума.

Далее,

$$P(t^*)x(t^*) = [P(t^*)x(t^*) - P(t_0)x(t_0)] - [P(t^*)x^*(t^*) - P(t_0)x^*(t_0)] =$$

$$= \int_{t_0}^{t^*} [P(t)Bu(t) - P(t)Bu^*(t)]\,dt \ge 0,$$

$P(t^*)x(t^*) = -[P(t_1)x(t_1) - P(t^*)x(t^*)] = -\int_{t^*}^{t_1} P(t)Bu(t)dt \le 0,$ т.е. $P(t)Bu(t) = 0$ для всех $t \in [t^*, t_1]$. Следовательно, $\max\limits_{u \in U} P(t)Bu = 0$, $t \in [t^*, t_1]$.

Пусть U_1 – грань многогранника минимальной размерности и $0 \in U_1$. Следовательно, $\dim U_1 \ge 1$, так как по условию 0 не является вершиной U. Поэтому в U_1 имеется не меньше двух соседних вершин.

Пусть (u_1, u_2) – одна из таких пар соседних вершин. Нулевой вектор является относительно внутренней точкой U_1, так как $0 \in U_1$ и 0 не является вершиной U_1.

Так как $\max\limits_{u \in U} P(t)Bu = 0$, $t \in [t^*, t_1]$, то линейная функция $P(t)Bu$, достигающая максимума во внутренней точке, тождественно равна 0 на грани U_1.

Пусть $w = u_1 - u_2$. Следовательно, $P(t)Bw = 0$, $t \in [t^*, t_1]$.

По лемме 4 вектор Bw принадлежит некоторому собственному инвариантному пространству относительно преобразования A, что противоречит условию общности положения. ■