ЛЕКЦИЯ № 2

Линейное программирование

1. Базисно допустимые решения

2. Критерий разрешимости

Симплекс-метод (С.-м.)

1. Идея метода

ЛП: понятие базисного допустимого решения (б.д.р.).

Базис — любой набор $\boldsymbol{A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(m)}}$ из $\boldsymbol{m}$ линейно независимых столбцов матрицы системы ограничений $\boldsymbol{A}$.

Матрица $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(m)}}]$ называется базисной.

Обозначения:

$$\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{\sigma}(1), \ldots, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{m})\}, \boldsymbol{S}' = \{1, \ldots, \boldsymbol{n}\} \setminus \boldsymbol{S}, \boldsymbol{A} = [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N}],$$

где $\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{A_j}]_{\boldsymbol{j \in S'}}$, $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_B}, \boldsymbol{x_N})$, $\boldsymbol{x_B} = (\boldsymbol{x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}})$ — базисные, а $\boldsymbol{x_N} = (\boldsymbol{x_j})_{\boldsymbol{j \in S'}}$ — небазисные переменные.

$$\boldsymbol{E\, x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b} \qquad (6')$$

Определение 3. **Решение** $(\boldsymbol{x_B}, \boldsymbol{x_N}) = (\boldsymbol{B^{-1} b}, 0)$ **системы уравнений (6) назовем базисным (соответствующим базису** $\boldsymbol{B}$**).**

ЛП: понятие б.д.р.

Лемма 3. **Вектор $\boldsymbol{x}$ — базисное решение системы (6) тогда и только тогда, когда множество столбцов с индексами из множества $\boldsymbol{S(x) = \{j | x_j \neq 0\}}$ — линейно независимо.**

Определение 4. **Базисным допустимым решением (б.д.р.)** называется любой элемент множества $\boldsymbol{Q}$, являющийся базисным решением системы уравнений $\mathbf{(6)}$.

Замечание 2. Решение соответствующее базису $\boldsymbol{B}$ — б.д.р. $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{B^{-1}b \geq 0}$.

ЛП: понятие б.д.р.

Определение 5. Вектор $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}$ — **крайняя точка или вершина** множества $\boldsymbol{Q}$, если не существует допустимых решений $\boldsymbol{x}^1 \neq \boldsymbol{x}^2$ из $\boldsymbol{Q}$ таких, что $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}^1 + (1 - \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{x}^2$, где $\mathbf{0} < \boldsymbol{\alpha} < \mathbf{1}$.

Теорема 3. **Вектор $\boldsymbol{x}$ — б.д.р. тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x}$ — крайняя точка множества $\boldsymbol{Q}$.**

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}$ — крайняя точка, но не б.д.р. Из леммы 3 $\Longrightarrow$

$$\exists\, \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0} :\; \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}. \qquad (*)$$

ЛП: понятие б.д.р.

При этом можем считать, что $(x_j = 0 \Longrightarrow y_j = 0) \Longrightarrow$

$$\{j | y_j \neq 0\} \subseteq \{j | x_j > 0\}. \qquad (**)$$

Т.к. $x \in Q$, то из $(*) \Longrightarrow$

$$\forall\, t \in R : z(t) = x + t\, y - \text{решение } (6),$$

тогда из $(**) \Longrightarrow$

$$\forall \text{ малого } t \in R : \ z(t) \in Q.$$

$\Longrightarrow$

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \ x^1 = x + \varepsilon y \in Q, x^2 = x - \varepsilon y \in Q,$$

$\Longrightarrow$

$$x^1 \neq x^2 \text{ и } x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow\rightarrow\leftarrow\Rightarrow x - \text{б.д.р.}.$$

ЛП: понятие б.д.р.

Пусть $\boldsymbol{x}$ — б.д.р., но

$$\exists\, \mathbf{0} < \boldsymbol{\alpha} < \mathbf{1}, \exists\, \boldsymbol{x}^1 \neq \boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in \boldsymbol{Q} : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{x}^1 + (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{x}^2.$$

По условию $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^2 (= \boldsymbol{b}) \Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2) = \mathbf{0}$, но

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2) = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \{\boldsymbol{A}_j | \boldsymbol{x}_j^1 \neq \boldsymbol{x}_j^2\}$ — линейно зависимо $\Rightarrow$

$\{\boldsymbol{A}_j | \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{x}_j^1 + (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{x}_j^2 > \mathbf{0}\}$ — линейно зависимо $\Rightarrow$

$\{\boldsymbol{A}_j | \boldsymbol{x}_j > \mathbf{0}\}$ — линейно зависимо $\Rightarrow \rightarrow \leftarrow$,

т.е. если x — б.д.р., то $\boldsymbol{x}$ — крайняя точка множества Q. ■

ЛП: Критерий разрешимости

Теорема 4 (Критерий разрешимости). Задача линейного программирования (5)-(7) разрешима тогда и только тогда, когда множество допустимых решений не пусто и целевая функция ограничена на нем.

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности покажем, что

$$\forall\, \boldsymbol{x^0} \in \boldsymbol{Q}\ \exists\ \text{б.д.р. } \boldsymbol{\overline{x}} : \boldsymbol{w(\overline{x}) \leq w(x^0)}.$$

Пусть

$$\boldsymbol{\overline{x} \in Q^0 = \{x \in Q | w(x) \leq w(x^0)\} \neq \emptyset}$$

и имеет минимальное число ненулевых компонент $(\boldsymbol{supp(\overline{x})})$.

Докажем, что $\boldsymbol{\overline{x}}$ — б.д.р. Допустим противное. $\Longrightarrow$

ЛП: Критерий разрешимости

множество

$$\{A_j | \overline{x}_j > 0\} \text{ линейно зависимо } \Longrightarrow$$

$$\exists\ y \neq 0 : Ay = 0 \text{ и если } \overline{x}_j = 0, \text{ то } y_j = 0.$$

Пусть $w(y) \leq 0$ (если необходимо, то возьмем $-y$). Положим $x(t) = \overline{x} + ty$. Выполняется следующее свойство

$$\forall \text{ малого } t \in R : \ x(t) \in Q.$$

1). Пусть $\forall j : y_j \geq 0 \Rightarrow \forall t \geq 0\ x(t) \geq 0 \Rightarrow \forall t \geq 0\ x(t) \in Q$

отсюда и неравенства $w(x(t)) = w(\overline{x}) + tw(y) \geq const$(по условию)

учитывая, что $w(y) \leq 0$ и $t \geq 0$ — произвольно,

имеем: $w(y) = 0$ и, следовательно, $w(x(t)) = w(\overline{x})\ \forall t.$

ЛП: Критерий разрешимости

Т.к. из условия $y_j > 0 \Rightarrow \overline{x}_j > 0$, то

$$\forall \text{ малого по абсолютной величине } t < 0: \; x(t) \in Q.$$

Найдем такое $\overline{t}$ наибольшее по абсолютной величине из условия:

$$\forall j (y_j > 0 \Rightarrow \overline{x}_j + \overline{t} y_j \geq 0)$$

которое эквивалентно условию:

$$\forall j (y_j > 0 \Rightarrow \overline{x}_j \geq (-\overline{t}) y_j) \iff$$

$$(-\overline{t}) = \min_{y_j > 0} \frac{\overline{x}_j}{y_j} \iff \overline{t} = -\min_{y_j > 0} \frac{\overline{x}_j}{y_j}.$$

Итак $x(\overline{t}) \in Q$ и $w(x(\overline{t})) = w(\overline{x}) \leq w(x^0) \Rightarrow x(\overline{t}) \in Q^0$.

Получили противоречие. Т.к. $supp(x(\overline{t})) = supp(\overline{x}) - 1$.

ЛП: Критерий разрешимости

2). Пусть $\exists \boldsymbol{j} : \boldsymbol{y_j} < \mathbf{0}$. Тогда

$$\forall \text{ достаточно малых } \boldsymbol{t} \geq \mathbf{0} : \ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{Q}.$$

Найдем наибольшее такое $\bar{\boldsymbol{t}}$ из условия:

$$\forall \boldsymbol{j}(\boldsymbol{y_j} < \mathbf{0} \Rightarrow \overline{\boldsymbol{x}}_j + \bar{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{y_j} \geq \mathbf{0})$$

которое эквивалентно условию:

$$\forall \boldsymbol{j}(\boldsymbol{y_j} < \mathbf{0} \Rightarrow \overline{\boldsymbol{x}}_j \geq \bar{\boldsymbol{t}}(-\boldsymbol{y_j})) \iff$$

$$\iff \bar{\boldsymbol{t}} = \min_{y_j < 0} \frac{\overline{\boldsymbol{x}}_j}{-\boldsymbol{y_j}}.$$

Итак $\boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{t}}) \in \boldsymbol{Q}$ и т.к. $\bar{\boldsymbol{t}} > \mathbf{0}, \boldsymbol{d} \leq \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{t}})) = \boldsymbol{w}(\overline{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{d}\bar{\boldsymbol{t}} \leq$ $\leq \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}) \Rightarrow \boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{t}}) \in \boldsymbol{Q}^{\mathbf{0}}$.

Получили противоречие. Т.к. $\boldsymbol{supp}(\boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{t}})) = \boldsymbol{supp}(\overline{\boldsymbol{x}}) - \mathbf{1}$.

ЛП: Критерий разрешимости

Т.к. по условию $\boldsymbol{Q} \neq \varnothing$, то множество базисных допустимых решений задачи не пусто. Т.к. оно конечно, то

$$\exists\ \boldsymbol{x}^* - \text{б.д.р.}: \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}^*) \leq \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\ \forall\ \text{б.д.р. } \boldsymbol{x}.$$

Из ранее доказанного следует, что $\boldsymbol{x}^*$ — оптимальное решение. ■

Следствие 3. Если множество допустимых решений задачи ЛП не пусто, то существуют базисные допустимые решения.

Следует из доказательства теоремы 4 (взять $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{0}$).

Следствие 4. Если задача ЛП разрешима, то существует оптимальное базисное решение.

Определение грани множества Q

Пусть $S' \cup S = \{1, \ldots, n\}$, $S' \cap S = \emptyset$. Множество решений системы уравнений

$$Ax = b, x_j = 0, j \in S', x_j \geq 0, j \in S,$$

называется гранью множества допустимых решений (6)-(7).

Определение грани множества Q

Величина $\boldsymbol{n-m-|S'|}$ — размерность данной грани (здесь $\boldsymbol{m+|S'|}$ – ранг системы уравнений).

Так как $\overline{\boldsymbol{x}}$ – б.д.р., то $\boldsymbol{|S'| = n-m}$, следовательно, $\overline{\boldsymbol{x}}$ – грань размерности 0.

Если $\boldsymbol{|S'| = n - m - 1}$, то получим грань размерности 1, т.е. ребро: ограниченное или неограниченное.

Идея симплекс-метода

Пусть $\overline{\boldsymbol{x}}$ — б.д.р., $\boldsymbol{B = (A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(m)})}$ — базисная матрица. Тогда

$$\boldsymbol{Ex_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b,} \qquad (6')$$

следовательно

$$\boldsymbol{Ex_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N,} \text{ и}$$

$$\boldsymbol{w(x) = c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N,} \qquad (5')$$

Элементарное преобразование б.д.р.

$\boldsymbol{x(t), t \geq 0:}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_{\sigma(i)}(t)} &\boldsymbol{= \overline{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t,} \\ \boldsymbol{x_s(t)} &\boldsymbol{= t,} \\ \boldsymbol{x_j(t)} &\boldsymbol{= 0, j \in S' \backslash s} \end{aligned} \tag{10}$$

Идея симплекс-метода

$$z_{0j} = c_j - c_B B^{-1} A_j,\ j = 1, \dots, n,$$

Величины z_{0j} называются оценками замещения. Знак оценки замещения определяет характер изменения целевой функции при движении по ребру.

$$(z_{10}, \dots, z_{m0})^\top = B^{-1} b,$$

$$(z_{1j}, \dots, z_{mj})^\top = B^{-1} A_j,\ \ j = 1, \dots, n.$$

Лемма 4 (признак оптимальности). Если оценки замещения неотрицательны, то текущее базисное допустимое решение $\overline{x}$ является оптимальным решением задачи (5)–(7).

Пусть $x \in Q$. Так как $z_{0j} \geq 0$ и $x_j \geq 0$, $j \in S'$, то из $(5')$ следует, что

$$w(x) = c_B B^{-1} b + \sum_{j \in S'} z_{0j} x_j \geq c_B B^{-1} b =$$

$$= w(\overline{x}) \ \blacksquare$$

Идея симплекс-метода

Лемма 5 (о неразрешимости). Если для номера $\boldsymbol{s}$ оценка замещения $\boldsymbol{z_{0s} < 0}$ и для всех индексов $\boldsymbol{i}$ коэффициенты замещения $\boldsymbol{z_{is}}$ неположительны, то в задаче (5)–(7) не существует оптимального решения.

Идея симплекс-метода

Лемма 6 (о существовании лучшей вершины). Если оценка замещения $z_{0s} < 0$ и существуют базисные переменные с коэффициентами замещения $z_{is} > 0$, то элементарное преобразование приведёт либо в вершину с меньшим значением целевой функции, либо вершина останется прежней, но изменится её базис.

Идея симплекс-метода

Пусть

$$\bar{t} = \frac{\bar{x}_{\sigma(r)}}{z_{rs}} = \frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min_{z_{is}>0,\ i\geq 1} \frac{z_{i0}}{z_{is}}.$$

Предположим, что $\bar{t} > 0$. Тогда

$$\forall i \forall t < \bar{t}:\ x_{\sigma(i)}(t) = \bar{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t > 0,$$

$x_{\sigma(r)}(\bar{t}) = 0$ и для $\forall t > \bar{t}$ имеем $x_{\sigma(r)}(\bar{t}) < 0$
$\Longrightarrow$

Идея симплекс-метода

Семейство векторов $\boldsymbol{x(t), 0 \le t \le \bar{t}}$ – ограниченное ребро множества $\boldsymbol{Q}$.

Вектор $\boldsymbol{x(\bar{t})}$ – б.д.р.:

$$\boldsymbol{(z_{1s}, \ldots, z_{ms})^\top = B^{-1}A_s \Longleftrightarrow}$$

$$\boldsymbol{A_s = B(z_{1s}, \ldots, z_{ms})^\top \Longleftrightarrow}$$

$$\boldsymbol{A_s = \sum_{i=1}^{m} z_{is} A_{\sigma(i)}}$$ (отсюда и условия) $\boldsymbol{z_{rs} > 0}$

следует, что матрица $\boldsymbol{B'}$ со столбцами

Идея симплекс-метода

$[\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(r-1)}, \boldsymbol{A}_{s}, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(r+1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(m)}]$ невырождена.

Следовательно $\boldsymbol{B}'$ – базис б.д.р. $\boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{t}})$. Т.к.

$$\forall \boldsymbol{t}, \mathbf{0} < \boldsymbol{t} \leq \bar{\boldsymbol{t}}, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})) = -\boldsymbol{z}_{\mathbf{00}} + \boldsymbol{z}_{\mathbf{0}\boldsymbol{s}}\boldsymbol{t} < -\boldsymbol{z}_{\mathbf{00}},$$

то $\boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{t}})$ – искомое б.д.р. с меньшим значением целевой функции.

Идея симплекс-метода

Пусть $\bar{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{0}$. В силу выбора $\boldsymbol{r} : \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r})}(\bar{\boldsymbol{t}}) = = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r})}(\boldsymbol{0}) = \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{i})} = \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{r}\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{0}$.

Т.к. $\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{rs}} > \boldsymbol{0}$, то матрица $\boldsymbol{B}'$ со столбцами

$$[\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{1})}, \ldots, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{1})}, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{s}}, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{1})}, \ldots, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{m})}]$$

снова невырождена. Следовательно $\boldsymbol{B}'$ – другой базис вершины $\overline{\boldsymbol{x}}$. ■